Quatrième feuille d'exercices

Compléments sur les espaces vectoriels

29

1. Calculer H^p pour $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

2. En déduire les inverses des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}.$$

30 — **CCP**

Dans un espace vectoriel E, soient p et q deux projecteurs qui commutent.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrer que $\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$.

3. Montrer que $\operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} q$.

31 — **AM**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M^2 + 2M - 3I_3$.

2. En déduire M^n.

32 — **AM**

Existe-t-il deux matrices carrées A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

33 — **WP**

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication. On pourra utiliser la formule de Taylor.

34

Montrer que $E = F \oplus G$, où $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F est l'ensemble des fonctions nulles en 2 et $G = \operatorname{Vect}(\exp)$.

35

Soit $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que les ensembles

$$H = \{f \in E \,|\, f'(0) = 0\} \text{ et } K = \{f \in E \,|\, \textstyle\int_0^1 f = 0\}$$

sont des hyperplans de E et en donner un supplémentaire.

36 — **ESB**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathfrak{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg}(f)).$$

37

Considérons l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 2x + 3y). \end{array} \right.$$

1. Montrer que $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

38 — **CCP**

Soient deux matrices A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins égal à 1 tel que $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

39 — **CCP**

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $f^3 + 2f^2 - f - 2\,\mathrm{id}_E = 0$. Montrer que f est bijectif.

40 — **WP**

Dans un espace vectoriel E, soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{id}_E$. Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(u^2 + u + \mathrm{id}_E).$$