

Corrigés des exercices de la quatrième feuille

29

1. Voici deux approches du calcul.

ASPECT VECTORIEL. Nommons $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H . On a $h(e_1) = 0$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $h(e_i) = e_{i-1}$.

Donc $h^2(e_1) = h^2(e_2) = 0$ et pour tout $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$, $h^2(e_i) = e_{i-2}$. Cela signifie que la matrice H^2 comporte la même diagonale de 1 que H , mais décalée d'un cran vers la droite, donc commençant à la troisième colonne.

Par une récurrence immédiate, pour $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $h^p(e_i) = 0$ si $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $h^p(e_i) = e_{i-p}$ si $i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$. Ainsi, la matrice H a la même diagonale de 1 que H , mais décalée de p crans à droite, donc commençant à la $(p+1)^e$ colonne.

Enfin, si $p \geq n$, $H^p = 0$.

ASPECT MATRICIEL. Posons $H^p = (h_{ij}^{(p)})_{i,j}$. Montrons par récurrence la proposition

$$P(p) : h_{ij}^{(p)} = \delta_{i+p,j},$$

où $\delta_{p,q}$ est le symbole de Kronecker.

Le terme général de H s'écrit $h_{ij} = \delta_{i+1,j}$, donc $P(1)$ est vraie.

Supposons $P(p-1)$ vraie. Le terme général de $H^p = H H^{p-1}$ s'écrit

$$h_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^n h_{ik}^{(1)} h_{kj}^{(p-1)} = \sum_{k=1}^n \delta_{i+1,k} \delta_{k+p-1,j} = \delta_{i+p,j}$$

car le produit des deux deltas ne vaut 1 que si

$$k = i+1 \text{ et } j = k+p-1 = i+p.$$

Finalement, la propriété est vraie. Elle signifie que la matrice H^p est constituée d'une diagonale de 1 décalée de p crans vers la droite; en particulier, pour tout $p \geq n$, H^p est la matrice nulle.

2. La première matrices vaut $A = \sum_{k=0}^{n-1} a^k H^k$. De l'identité $(1-X) \sum_{k=0}^{n-1} X^k = 1 - X^n$, on tire $(I_n - aH)A = I - a^n H^n = I_n$. Alors A est inversible et son inverse est $A^{-1} = I_n - aH$.

L'autre matrice est $B = \sum_{k=1}^n k H^{k-1} = P(H)$ où $P = 1 + 2X + \dots + nX^{n-1} = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}$. On pense à la dérivation. Dans $\mathbb{R}(X)$,

$$\begin{aligned} P &= \left(\sum_{k=0}^n X^k \right)' = \left(\frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} \right)' \\ &= \frac{1 - (n+1)X^n + nX^{n+1}}{(1-X)^2}, \end{aligned}$$

d'où $(1-X)^2 P = 1 - (n+1)X^n + nX^{n+1}$. En évaluant cette égalité polynomiale en H , on obtient $(I_n - H)^2 B = I_n - (n+1)H^n + nH^{n+1} = I_n$, donc B est inversible et $B^{-1} = (I_n - H)^2$.

30

CCP

1. Comme $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$, $p \circ q \in \mathcal{L}(E)$. De plus,

$$(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q,$$

donc $p \circ q$ est un projecteur.

2. Montrons que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

$\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$. En effet, si $x \in \text{Im}(p \circ q)$, $x = p \circ q(x) = q \circ p(x)$ et $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

$\text{Im } p \cap \text{Im } q \subset \text{Im}(p \circ q)$ car, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, $x = p(x) = q(x)$ donc $x = p \circ q(x) \in \text{Im}(p \circ q)$.

3. Montrons que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

$\text{Ker}(p \circ q) \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q$. En effet, si $x \in \text{Ker}(p \circ q)$, $p \circ q(x) = 0$. De plus, comme $E = \text{Ker } q \oplus \text{Im } q$, on peut écrire $x = y + z$ où $(y, z) \in \text{Ker } q \times \text{Im } q$. Alors $q(x) = q(z) = z$ et $p \circ q(x) = p(z) = 0$ donc $z \in \text{Ker } p$. Ainsi, $x = y + z$ où $(y, z) \in \text{Ker } q \times \text{Ker } p$.

$\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p \circ q)$. En effet, si $x \in \text{Ker } p + \text{Ker } q$, $x = y + z$ où $(y, z) \in \text{Ker } p \times \text{Ker } q$. Alors $p \circ q(x) = q(p(y)) + p(q(z)) = 0$ et $x \in \text{Ker}(p \circ q)$.

31

AM

1. Sans difficulté, $M^2 + 2M - 3I_3 = 0$. Ainsi, le polynôme $P = X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3)$ est annulateur de M .

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de X^n par P : il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^n = PQ_n + a_n X + b_n$ (*). En évaluant cette égalité en M , on a $M^n = a_n M + b_n I_3$. Pour trouver a_n et b_n , évaluons (*) en les racines 1 et -3 de P . On a $1^n = a_n \cdot 1 + b_n$ et $(-3)^n = a_n \cdot (-3) + b_n$, d'où $a_n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)$, $b_n = \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)$ et

$$M^n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)M + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)I_3.$$

Constatons que $M(M + 2I_3) = 3I_3$, donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{3}(M + 2I_3)$, ce qui revient à faire $n = -1$ dans l'expression précédente. Alors, par récurrence, prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^{-n} = \frac{1}{4}(1 - (-3)^{-n})M + \frac{1}{4}(3 + (-3)^{-n})I_3.$$

L'initialisation, pour $n = 1$, vient d'être établie. La transmission ne pose pas de problème : si l'expression est vraie au rang n , $M^{-(n+1)} = M^{-n} M^{-1}$, et en développant grâce aux expressions précédentes, on obtient la formule au rang $n+1$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$M^n = \frac{1}{4}(1 - (-3)^n)M + \frac{1}{4}(3 + (-3)^n)I_3.$$

32

AM

Soient des matrices carrées A et B : $\text{Tr}(I_n) = n$ et $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$ donc $AB - BA \neq I_n$.

33

WP

POLYNÔME ANNULATEUR. On a $(A - I_3)^2 = 0$.

Commentaire. En fait, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = (x-1)^3$, et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = (A - I_3)^3 = 0$. Mais ici on a mieux, car notre polynôme annulateur est de degré moindre.

PUISSANCES POSITIVES. Soit un polynôme quelconque $P \in \mathbb{R}[X]$. D'après la formule de Taylor appliquée en 1,

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (X-1)^k,$$

où la somme est finie. Évaluons cette égalité en A :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (A - I_3)^k \\ &= P(1)I_3 + P'(1)(A - I_3), \end{aligned}$$

car pour tout $k \geq 2$, $(A - I_3)^k = 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= 1^n I_3 + n 1^{n-1} (A - I_3) \\ &= (1 - n)I_3 + nA \\ &= \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ -2n & 2n+1 & 2n \\ n & -n & 1-n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

PUISSANCES NÉGATIVES. On a vu que $(A - I_3)^2 = 0$, c'est-à-dire $A(2I_3 - A) = I_3$, donc A est inversible et $A^{-1} = 2I_3 - A$. On retrouve l'expression précédente avec $n = -1$. Alors, on imagine que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^{-n} = (1 + n)I_3 - nA.$$

Prouvons-le. On a

$$\begin{aligned} A^n((1 + n)I_3 - nA) &= (I_3 + n(A - I_3))(I_3 - n(A - I_3)) \\ &= I_3 - n^2(A - I_3)^2 = I_3, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'expression annoncée.

34

Tout d'abord, F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E . Voici deux méthodes.

À LA MAIN. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $h \in E$.

Analyse. Si $h = f + g$, où $(f, g) \in F \times G$, alors $g = \lambda \exp$ et $f(2) = 0$. Il en découle que $h(2) = \lambda e^2$, $\lambda = h(2)e^{-2}$ et $f = h - h(2)e^{-2} \exp$.

Synthèse. Posons $g = h(2)e^{-2} \exp$ et $f = h - g$. Clairement $h = f + g$ et $g \in G$. En outre, $f(2) = f(2) - f(2)e^{-2}e^2 = 0$, donc $f \in F$.

Conclusion. Tout élément h de E se décompose de façon unique en $h = f + g$ où $(f, g) \in F \times G$, ce qui signifie que $E = F \oplus G$.

HYPERPLANS. F est un hyperplan de E car $F = \text{Ker } \varphi$ où l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(2)$ est une forme linéaire non nulle. De plus, $\exp \notin F$, donc $E = F \oplus G$.

35

L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f'(0)$ est clairement une forme linéaire sur E , non nulle car $\varphi(\text{id}_{\mathbb{R}}) = 1$. Donc $H = \text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E . En outre, $E = H \oplus \mathbb{R} \text{id}_{\mathbb{R}}$ car $\text{id}_{\mathbb{R}} \notin H$.

Idem pour K .

36

ESB

SUPPOSONS QUE $\text{Im } f = \text{Ker } f$. D'après le théorème du rang, $n = 2 \text{rg}(f)$. De plus, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im } f = \text{Ker } f$ donc $f(f(x)) = 0$ et $f^2 = 0$.

SUPPOSONS QUE $f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg}(f)$. Alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ et d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker } f) = \text{rg}(f)$ donc $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

37

1. Soient $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + (x', y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), 2(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(x + 2y) + (x' + 2y'), \lambda(2x + 3y) + (2x' + 3y')) \\ &= \lambda(x + 2y, 2x + 3y) + (x' + 2y', 2x' + 3y') \\ &= \lambda f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $(x, y) \in \text{Ker } f$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) = (0, 0) &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 & (L_1) \\ 2x + 3y = 0 & (L_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 0 & (L_1) \\ -y = 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases} \\ &\iff x = y = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Ker } f = \{(0, 0)\}$. Cela entraîne que f est injective. Comme c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, f est donc aussi surjective et $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$.

38

CCP

D'après la division euclidienne de P par X , il existe un (unique) polynôme Q tel que

$$P = XQ + P(0) = XQ + 1.$$

Alors $P(A) = AQ(A) + I_n$, d'où $AB = AQ(A) + I_n$ et $A(B - Q(A)) = I_n$. Cela signifie que A est inversible et que $A^{-1} = B - Q(A)$.

En outre, $B = A^{-1} + Q(A)$ commute avec A , car c'est le cas de A^{-1} et de $Q(A)$.

39

CCP

On a $\frac{1}{2}(f^2 + 2f - \text{id}_E) \circ f = \text{id}_E$, ce qui signifie que f est bijective et que $f^{-1} = \frac{1}{2}(f^2 + 2f - \text{id}_E)$.

40

WP

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.

ANALYSE. Supposons que l'on ait $x = y + z$ avec $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $z \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{id}_E)$. Alors $u(y) - y = 0$, c'est-à-dire $u(y) = y$, et $z + u(z) + u^2(z) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} u(x) &= u(y) + u(z) = y + u(z), \\ u^2(x) &= u(y) + u^2(z) = y + u^2(z). \end{aligned}$$

Alors, $x + u(x) + u^2(x) = 3y + z + u(z) + u^2(z) = 3y$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)), \\ z &= x - y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(u(x) + u^2(x)). \end{aligned}$$

SYNTHÈSE. Posons

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)), \\ z &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}u(x) - \frac{1}{3}u^2(x). \end{aligned}$$

On a bien $x = y + z$. Comme $u^3(x) = x$, on a

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{1}{3}(u(x) + u^2(x) + u^3(x)) \\ &= \frac{1}{3}(u(x) + u^2(x) + x) = y \end{aligned}$$

et $y \in \text{Ker}(u - \text{id}_E)$. De même,

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{2}{3}u(x) - \frac{1}{3}u^2(x) - \frac{1}{3}x, \\ u^2(z) &= \frac{2}{3}u^2(x) - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}u(x), \end{aligned}$$

d'où $u^2(z) + u(z) + z = 0$ et $z \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{id}_E)$.

CONCLUSION.

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{id}_E).$$