Cinquième feuille d'exercices

Espaces probabilisés

41

Pour se rendre à son lycée, un étudiant a le choix entre quatre itinéraires, nommés A, B, C, et D. La probabilité qu'il a de choisir A, respectivement B et C, est $\frac{1}{3}$, respectivement $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{12}$. La probabilité d'arriver en retard en empruntant A, rexpectivement B et C, est $\frac{1}{20}$, respectivement $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5}$. En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

2. Un jour donné, il arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

42

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée.

1. Déterminer les probabilités des évènements

A_1 : « la première boule tirée est la boule n° 1 » ;

A_2 : « la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1 » ;

A_3 : « la première boule tirée est une boule bleue ».

2. Déterminer la probabilité de l'évènement

A_0 : « la boule n° 1 n'est jamais tirée lors du jeu ».

43 — **CCP17**

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On lance simultanément n boules indiscernables dans une boite séparée en trois compartiments identiques.

1. Combien de compartiments peuvent rester vides à l'issue de l'expérience ?

2. Déterminer la probabilité de l'évènement B_2 « il reste deux compartiments vides à l'issue de l'expérience ».

3. Déterminer la probabilité de l'évènement B_k « il reste k compartiments vides à l'issue de l'expérience », pour les autres valeurs possibles de k.

44 — **MT18**

Une famille a deux enfants dont un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

45

On dispose de deux jeux de 52 cartes et l'on tire une carte de chaque jeu. Quelle est la probabilité de tirer au moins un roi ?

46 — **CCP**

Dans une zone désertique, un éthologue observe le comportement d'un animal qui erre entre trois points d'eau, qu'il nomme A, B et C. Au premier jour de son observation (le jour 0), l'animal se trouve au point A. Chaque jour, l'animal change de point d'eau aléatoirement, mais de façon apparemment équiprobable.

Dans son carnet d'observation, l'éthologue consigne les évènements suivants : pour un entier $n \in \mathbb{N}$, « au n^{e} jour, l'animal se trouve au point A, respectivement B et C », qu'il nomme respectivement A_n, B_n et C_n. Et il pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

Déterminer a_n, b_n et c_n.

47 — **CS16**

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, on considère une suite d'évènements (A_n) et on note

$$A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n.$$

1. Montrer que $P(A) = \lim\limits_{k \to +\infty} P\left(\bigcup\limits_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$.

2. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge.
Déterminer $P(A)$.

3. Déterminer $P(B)$, où B est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité de A_n.

4. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum P(A_n)$ diverge.

Déterminer $P(A)$. On pourra s'intéresser à $P(\overline{A})$.