Corrigés des exercices de la cinquième feuille

41

1. Puisque (A, B, C, D) constitue un système complet d'évènements, avec les probabilités totales, en nommant R l'évènement qu'il arrive en retard, on a

$$\begin{aligned} P(R) &= \sum_{E \in \{A,B,C,D\}} P(R \,|\, E)\, P(E) \\ &= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{120}. \end{aligned}$$

2. Grâce à la formule de Bayes,

$$P(C \,|\, R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R \,|\, C)\, P(C)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{120}} = \frac{2}{7}.$$

42

1. En dénombrant les boules, on a

$$P(A_1) = \frac{1}{n+k}, \; P(A_2) = \frac{n-1}{n+k}, \; P(A_3) = \frac{k}{n+k}.$$

2. Voici deux approches.

Version longue. Quand le jeu s'arrête, c'est qu'on tire une boule bleue. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, considérons l'évènement B_i : « on tire la boule bleue lors du tirage numéro i ». La famille $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements donc on peut écrire la formule des probabilités totales :

$$P(A_0) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_0 \,|\, B_i)\, P(B_i).$$

Constatons que cette série converge d'après le cours. D'une part, puisque les tirages se font avec remise, le tirage numéro i est identique au premier tirage, donc

$$P(B_i) = P(A_3) = \frac{k}{n+k}.$$

D'autre part, l'évènement $A_0 \,|\, B_i$ signifie que lors des $i-1$ premiers tirages, on n'a pas tiré la boule numéro 1, donc, puisque tous les tirages sont indépendants,

$$P(A_0 \,|\, B_i) = P(A_2)^{i-1} = \left(\frac{n-1}{n+k}\right)^{i-1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+k}\right)^{i-1} \frac{k}{n+k} \\ &= \frac{k}{n+k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n-1}{n+k}} = \frac{k}{k+1}. \end{aligned}$$

Version courte. La famille (A_1, A_2, A_3) forme clairement un système complet d'évènements donc

$$\begin{aligned} P(A_0) = P(A_0 \,|\, A_1)\, P(A_1) &+ P(A_0 \,|\, A_2)\, P(A_2) \\ &+ P(A_0 \,|\, A_3)\, P(A_3). \end{aligned}$$

Tout aussi clairement, A_0 et A_1 sont incompatibles, donc $P(A_0 | A_1) = 0$. De même, si A_3 est réalisé, le jeu s'arrête et A_0 est réalisé, donc $P(A_0 \,|\, A_3) = 1$. Enfin, puisque les tirages sont indépendants, $P(A_0 \,|\, A_2) = P(A_0)$. Alors

$$P(A_0) = P(A_0)\, \frac{n-1}{n+k} + \frac{k}{n+k}$$

d'où $P(A_0) = \dfrac{k}{k+1}$.

43 CCP17

1. Comme il y a au moins une boule, elle entre forcément dans un compartiment de la boite, donc les trois compartiments ne peuvent être tous trois vides. Ainsi, le nombre de compartiments vides après l'expérience est 2 si $n = 1$; 1 ou 2 si $n = 2$; et 0, 1 ou 2 si $n \geqslant 3$.

2. Explicitons l'évènement B_2. Choisir exactement deux compartiments vides revient à choisir le troisième compartiment, qui est occupé par les n boules. Comme les compartiments sont identiques, il y a trois choix possibles du compartiment occupé. Et une fois qu'il est choisi, la probabilité que les n boules y soient tombées est $1/3^n$. Alors

$$P(B_2) = 3\, \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

3. De même, intéressons-nous à l'évènement B_1. Il s'agit de choisir le compartiment vide, nommons-le A : il y a trois possibilités. Ensuite, les n boules se répartissent entre les deux autres compartiments, nommons-les B et C, avec au moins une boule dans chacun, pour qu'aucun ne soit vide. Parmi ces n boules, k sont dans B, avec probabilité $1/3^k$, et $n-k$ sont dans C, avec probabilité $1/3^{n-k}$. On doit avoir $k \geqslant 1$ pour que B ne soit pas vide, et $k \leqslant n-1$ pour que C ne le soit pas. Enfin, il s'agit de choisir les k boules qui atterrissent dans B, et il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de le faire. Alors

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}\, \frac{1}{3^{n-k}} \\ &= \frac{1}{3^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 - 1 \right) = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Constatons que si $n = 1$, $P(B_1) = 0$, ce qui est cohérent avec le fait que B_1 ne se produit pas.

Enfin, sachant que B_0, B_1 et B_2 forment un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(B_0) &= 1 - P(B_1) - P(B_2) \\ &= \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Constatons que si $n \in \{1, 2\}$, $P(B_0) = 0$.

44 MT18

Sachant que l'un des enfants est un garçon, l'univers considéré est $\{(G,F), (F,G), (G,G)\}$, avec des notations évidentes. Où l'on voit que la probabilité cherchée vaut $\frac{1}{3}$.

45

Considérons l'évènement

A : « au moins l'une des cartes tirées est un roi ».

Voici une approche par l'évènement contraire. Il est bien-sûr possible de considérer directement l'évènement A. L'évènement contraire de A est

$\overline{A}$: « aucune des cartes tirées n'est un roi ».

La probabilité de tirer un roi d'un des jeux de cartes est $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, donc la probabilité de tirer une carte qui ne soit pas un roi est $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$. Comme le tirage des cartes de chaque jeu est indépendant, $P(\overline{A}) = \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{144}{169}$. Alors $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{25}{169}$.

46 — **CCP**

Plusieurs résolutions sont possibles. En voici une. À vous d'en trouver d'autres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque les évènements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) = {} & P(A_{n+1} \,|\, A_n)\, P(A_n) \\ & + P(A_{n+1} \,|\, B_n)\, P(B_n) \\ & + P(A_{n+1} \,|\, C_n)\, P(C_n). \end{aligned}$$

Comme il change de point d'eau chaque jour, $P(A_{n+1} \,|\, A_n) = 0$. De plus, $P(A_{n+1} \,|\, B_n) = \frac{1}{2}$. En effet, quand il est au point B au jour n, il a autant de chance le jour $n+1$ de venir en A que d'aller en C. De même, $P(A_{n+1} | C_n) = \frac{1}{2}$. Alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n)$. En outre, toujours parce que A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, $a_n + b_n + c_n = 1$. Alors $a_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - a_n)$, et la suite (a_n) est arithmético-géométrique.

Cherchons ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}(1-\ell)$: $\ell = \frac{1}{3}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de ℓ,

$$a_{n+1} - \ell = \tfrac{1}{2}(1 - a_n) - (\tfrac{1}{2}(1-\ell)) = -\tfrac{1}{2}(a_n - \ell).$$

La suite $(a_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc $a_n - \ell = (-\frac{1}{2})^n (a_0 - \ell)$. Comme $a_0 = 1$,

$$a_n = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}(-\tfrac{1}{2})^n.$$

De même, le suites (b_n) et (c_n) vérifient la même relation de récurrence, avec $b_0 = c_0 = 0$. En passant, elles sont donc égales :

$$b_n = c_n = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2})^n.$$

47 — **CS16**

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, considérons $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$, de sorte que $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$. On voit que la suite (B_k) est décroissante. En effet, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n = A_k \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{+\infty} A_n \right) = A_k \cup B_{k+1},$$

où l'on voit bien que $B_{k+1} \subset B_k$. Alors, d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$P(A) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right).$$

2. Supposons que $\sum P(A_n)$ converge. Alors, d'après le théorème de sous-additivité, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n),$$

où l'on reconnait le reste d'ordre $k-1$ de la série convergente $\sum P(A_n)$. Il s'ensuit que

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n) = 0,$$

donc, par majoration,

$$\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right) = 0,$$

ou encore, $P(A) = 0$.

3. Soit $\omega \in B$. Par définition, $\omega \in A_n$ pour une infinité d'indices n. Autrement dit, l'ensemble d'indices

$$I_\omega = \{ n \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_n \}$$

est infini. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \in I_\omega$ tel que $n \geqslant k$, ce qui signifie que $\omega \in A_n$ avec $n \geqslant k$, donc $\omega \in \bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p = B_k$. Comme c'est vrai pour tout k, $\omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k = A$. Donc $B \subset A$.

Réciproquement, soit $\omega \in A$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in B_k$, c'est-à-dire qu'il existe $n \geqslant k$ tel que $\omega \in A_n$; et l'ensemble I_ω est infini, donc $\omega \in B$. Donc $A \subset B$.

Alors, $B = A$ et $P(B) = 0$.

4. D'après les lois de De Morgan, avec les notations de la question 1,

$$\overline{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{B_k}.$$

Comme la suite (B_k) est décroissante, la suite $(\overline{B_k})$ est croissante. Donc, d'après le théorème de la continuité croissante,

$$P(\overline{A}) = \lim_{k\to+\infty} P(\overline{B_k}).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Étant donné $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant k$, on a

$$\overline{B_k} = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n} \subset \bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n},$$

donc

$$P(\overline{B_k}) \leqslant P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right).$$

Comme les A_n sont mutuellement indépendants, les $\overline{A_n}$ le sont aussi et

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right) = \prod_{n=k}^{N} P(\overline{A_n}).$$

En outre,

$$P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) \leqslant e^{-P(A_n)},$$

sachant que pour tout $x \in [0,1]$, $1 - x \leqslant e^{-x}$, par convexité par exemple. Alors,

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right) \leqslant \prod_{n=k}^{N} e^{-P(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=k}^{N} P(A_n) \right).$$

Or par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ diverge, donc aussi la série $\sum_{n\geqslant k} P(A_n)$ et la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=k}^{N} P(A_n)\right)_{N\geqslant k}$ croît vers $+\infty$. Alors

$$\lim_{N\to+\infty} \exp\left(-\sum_{n=k}^{N} P(A_n) \right) = 0,$$

donc, par majoration,

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n} \right) = 0,$$

et, toujours par majoration,

$$P(\overline{B_k}) = 0.$$

Ainsi, $P(\overline{A}) = 0$ et $P(A) = 1$.

Commentaire. L'intervention de l'exponentielle tient du miracle, et je ne sais pas faire autrement. J'imagine que l'examinateur avait prévu de donner l'indication le jour de l'oral...