Sixième feuille d'exercices

ÉLÉMENTS PROPRES

48 ————— **TPE**

Déterminer les éléments propres de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq n$ et $j \neq n$, et $a_{in} = a_{ni} = 1$.

49 ————— **CCP**

Soit un entier $n \geq 3$. Déterminer les éléments propres de la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, les première et dernière colonnes, et des 0 partout ailleurs.

50 ————— **CS**

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$, qui au polynôme P associe le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 - X$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. Déterminer son spectre.

51 ————— **MT**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(A) \neq 0$. Trouver les éléments propres de l'endomorphisme

$$\Phi \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A. \end{array} \right.$$

52 ————— **CCP**

Soient $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $AB - BA = \alpha A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B - B A^k = \alpha k A^k$.
2. Montrer que A est nilpotente. On pourra s'intéresser à l'application $L : M \mapsto MB - BM$.

53 ————— **CCP**

1. Étant donné un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension 3, montrer qu'un plan H de E est stable par u si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Im}(u - \lambda \text{id}_E) \subset H$.

2. Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

54 ————— **MP**

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. À tout élément f de E , on associe la fonction $\Phi(f) = g$ définie par $g(0) = f(0)$ et $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x > 0$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
2. Étudier son noyau, puis ses éléments propres.
3. Tracer le spectre de Φ dans le plan complexe.

55 ————— **MP**

Donner les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe

$$TP(X) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

On pourra utiliser les $(X+a)^k$, avec a judicieusement choisi.