Corrigés des exercices de la sixième feuille

48 — TPE

Pour l'intérêt de l'exercice, supposons que $n \geqslant 2$.

Notations. On a
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Pour faciliter les calculs, écrivons A par blocs sous la forme
$$A = \begin{pmatrix} O & C \\ L & 1 \end{pmatrix},$$
où O est la matrice nulle de $\mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$,
$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$$
$$\text{et } L = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}).$$
Constatons que $L = C^{\top}$, mais l'on gardera L pour alléger les écritures.

Polynôme annulateur. Pour trouver les valeurs propres de A, cherchons-en un polynôme annulateur. En calculant par blocs,
$$A^2 = \begin{pmatrix} O & C \\ L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & C \\ L & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CL & C \\ L & LC+1 \end{pmatrix}.$$
Or $LC = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n-1$, donc
$$A^2 = \begin{pmatrix} CL & C \\ L & n \end{pmatrix}.$$
Alors, sachant que $LC = n-1$,
$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{pmatrix} CL & C \\ L & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & C \\ L & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CL & CLC+C \\ nL & LC+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} CL & nC \\ nL & 2n-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Donc
$$A^3 - A^2 = \begin{pmatrix} O & (n-1)\,C \\ (n-1)\,L & n-1 \end{pmatrix} = (n-1)\,A.$$
Cela signifie que le polynôme
$$P = X^3 - X^2 - (n-1)\,X = X\,(X^2 - X - n + 1)$$
est annulateur de A. Les racines de P sont 0, $\lambda = \frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{4n-3}\,)$ et $\mu = \frac{1}{2}\,(1 - \sqrt{4n-3}\,)$. Ainsi,
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0, \lambda, \mu\}.$$
Valeur propre 0. Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(A) = -1 \neq 0$, donc $0 \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

Supposons $n \geqslant 3$. On voit que $\mathrm{rg}(A) = 2$, donc 0 est valeur propre de A, et $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-2$, d'après le théorème du rang. De plus, en notant $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, pour tout $j \in [\![2, n-1]\!]$, $C_j = C_1$, ou encore $C_1 - C_j = 0$, donc en nommant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A\,(e_1 - e_j) = 0$. Alors, la famille $(e_1 - e_j)_{2 \leqslant j \leqslant n-1}$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$. Comme elle est clairement libre, elle en est une base, puisqu'elle contient $n-2$ vecteurs. Ainsi, $E_0(A) = \mathrm{Vect}((e_1 - e_j)_{2 \leqslant j \leqslant n-1})$.

Valeur propre λ. Supposons que λ soit valeur propre de A. Considérons un vecteur propre X associé à λ : on a $AX = \lambda X$. Pour continuer les calculs par blocs, écrivons
$$X = \begin{pmatrix} Y \\ x \end{pmatrix}$$
où $Y \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} & AX = \lambda X \\ \iff\ & \begin{pmatrix} O & C \\ L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Y \\ x \end{pmatrix} \\ \iff\ & \begin{cases} xC = \lambda Y \\ LY + x = \lambda x \end{cases} \end{aligned}$$
Si $x = 0$, $\lambda Y = 0$ (la colonne nulle de $\mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$) ; or $\lambda \neq 0$, donc $Y = 0$; alors $X = 0$ (la colonne nulle de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) : cela contredit le fait que X est un vecteur propre de A, donc il est non nul. Ainsi $x \neq 0$. En changeant au besoin X en $\frac{\lambda}{x}\,X$, on peut donc supposer que $x = \lambda$. Alors la première équation du système précédent devient $\lambda C = \lambda Y$, ou encore $Y = C$, d'où
$$X = \begin{pmatrix} C \\ \lambda \end{pmatrix}.$$
On vérifie sans peine que
$$AX = \begin{pmatrix} \lambda C \\ LC + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C \\ n-1+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda C \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda X,$$
où l'on se rappelle que $\lambda^2 = \lambda + n - 1$ puisque λ est racine de P et n'est pas nul. Ainsi, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et
$$E_\lambda(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} C \\ \lambda \end{pmatrix}.$$
Commentaire. On a raisonné par analyse-synthèse.

Valeur propre μ. Comme μ a les mêmes propriétés que λ, on peut le substituer à λ dans les calculs précédents : $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et
$$E_\mu(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} C \\ \mu \end{pmatrix}.$$

49 — CCP

Notons N cette matrice : $N = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (0) & 1 \end{pmatrix}$.

Voici deux approches.

Système linéaire. Notons $I = [\![2, n-1]\!]$, qui n'est pas vide.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une colonne. On a
$$\begin{aligned} & NX = \lambda X \\ \iff\ & \begin{cases} x_1 + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_i + x_n = \lambda x_i, \ i \in I \\ x_1 + x_n = \lambda x_n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_n = \lambda x_1 \\ (\lambda - 1)\, x_i = \lambda x_1,\ i \in I \\ (\lambda - 2)\,(x_1 + x_n) = 0 \end{cases}$$

en faisant $L_n \leftarrow L_n + L_1$ et $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in I$. Discutons selon λ l'existence de solutions non nulles de ce système.

Si $\lambda = 0$, $x_1 + x_n = 0$ et $x_i = 0$ pour $i \in I$. Donc $0 \in \mathrm{Sp}(N)$ et $E_0(N) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ (0) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 1$, $x_1 = x_n = 0$. Donc $1 \in \mathrm{Sp}(N)$ et

$$E_1(N) = \bigoplus_{i=2}^{n-1} \mathbb{R}\begin{pmatrix} (0) \\ 1 \\ (0) \end{pmatrix} \leftarrow \text{position } i\,.$$

Si $\lambda = 2$, $x_n = x_1$ et $x_i = 2x_1$ pour $i \in I$. Donc $2 \in \mathrm{Sp}(N)$ et $E_2(N) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ (2) \\ 1 \end{pmatrix}$.

On constate que

$$\dim E_0(N) + \dim E_1(N) + \dim E_2(N) = n,$$

donc il n'y a pas d'autre valeur propre.

Commentaire. Et en passant, N est diagonalisable.

Considérations élémentaires. Clairement, 1 est valeur propre évidente, car il figure seul sur la diagonale dans les $n-2$ colonnes centrales. De plus, il est valeur propre d'ordre au moins $n-2$.

De même, 0 est valeur propre évidente, car les deux colonnes extrêmes sont les mêmes, donc N n'est pas inversible. De plus, 0 est valeur propre d'ordre au moins 1.

Alors, le polynôme caractéristique de N, qui est de degré n, admet au moins $n-1$ racines réelles, donc il est scindé sur $\mathbb{R}$ et, en nommant λ la dernière valeur propre (peut-être encore 0 ou 1), on a

$$\mathrm{Tr}(N) = 0 \cdot 1 + (n-2) \cdot 1 + 1 \cdot \lambda = n,$$

donc $\lambda = 2$, qui est donc valeur propre d'ordre au moins 1.

Alors, il ne peut y avoir d'autre valeur propre et les ordres sont ceux annoncés. En passant, N est diagonalisable.

Enfin, de façon évidente, avec les remarques précédentes, en nommant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$E_1(N) = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n-1}),$$
$$E_0(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_n)$$

et en tatonnant ou en résolvant $N\,X = 2\,X$,

$$E_2(N) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_n + 2\textstyle\sum_{k=2}^{n-1} e_k).$$

50 — CS

1. Posons $E = \mathbb{R}_3[X]$ et montrons que $\varphi \in \mathfrak{L}(E)$.

Pour tout $P \in E$, d'après la division euclidienne, il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_3[X]$ tel que $(X^4 - 1)\, P = (X^4 - X)\, Q + R$, donc $R \in E$. Ainsi φ, qui à P associe R, est bien définie de E dans E.

Soient P_1, P_2 dans E et λ dans $\mathbb{R}$. D'une part, il existe Q_1 et Q_2 tels que

$$(X^4 - 1)\, P_1 = (X^4 - X)\, Q_1 + \varphi(P_1),$$
$$(X^4 - 1)\, P_2 = (X^4 - X)\, Q_2 + \varphi(P_2).$$

Alors

$$\begin{aligned}&(X^4 - 1)\,(P_1 + \lambda P_2) \\ &= (X^4 - X)\,(Q_1 + \lambda Q_2) + \varphi(P_1) + \lambda\,\varphi(P_2).\end{aligned}$$

De plus, $\deg(\varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)) < 4$. D'autre part, il existe Q tel que

$$(X^4 - 1)\,(P_1 + \lambda\, P_2) = (X^4 - X)\, Q + \varphi(P_1 + \lambda\, P_2)$$

avec $\deg(\varphi(P_1 + \lambda\, P_2)) < 4$. Par unicité de la division euclidienne, $\varphi(P_1) + \lambda\,\varphi(P_2) = \varphi(P_1 + \lambda\, P_2)$, ce qui prouve la linéarié de φ.

2. Pour déterminer le spectre de φ, cherchons sa matrice M dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E. On a

$$X^4 - 1 = X^4 - X + X - 1,$$
$$(X^4 - 1)\, X = (X^4 - X)\, X + (X - 1)\, X,$$
$$(X^4 - 1)\, X^2 = (X^4 - X)\, X^2 + (X - 1)\, X^2.$$

D'où l'on tire $\varphi(1) = X - 1$, $\varphi(X) = X^2 - X$ et $\varphi(X^2) = X^3 - X^2$. De plus,

$$\begin{aligned}(X^4 - 1)\, X^3 &= (X^4 - X)\, X^3 + X^4 - X^3 \\ &= (X^4 - X)\, X^3 + X^4 - X + X - X^3 \\ &= (X^4 - X)\,(X^3 + 1) + X - X^3,\end{aligned}$$

d'où $\varphi(X^3) = X - X^3$. Alors,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En développant par rapport à la dernière colonne,

$$\begin{aligned}&\det(M - \lambda\, I_4) \\ &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^4 + \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda)^4 - (1+\lambda) \\ &= (1+\lambda)\,\lambda\,(\lambda^2 + 3\,\lambda + 3).\end{aligned}$$

Comme le facteur du second degré n'a pas de racines réelles,

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{-1, 0\}.$$

Commentaire. En passant, φ n'est pas diagonalisable, car son polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

51 — MT

Notons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Polynôme annulateur. Cherchons un polynôme annulateur de Φ. Soit $M \in E$. On a

$$\begin{aligned}\Phi^2(M) &= \Phi(\mathrm{Tr}(A)\,M - \mathrm{Tr}(M)\,A)\\ &= \mathrm{Tr}(A)\Phi(M) - \mathrm{Tr}(M)\Phi(A)\\ &= \mathrm{Tr}(A)\Phi(M).\end{aligned}$$

Cela signifie que $\Phi^2 - \mathrm{Tr}(A)\,\Phi = 0$, ou encore que le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}(A)\,X$ est annulateur de Φ. Alors, les valeurs propres de Φ sont parmi les racines de P : $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \{0, \mathrm{Tr}(A)\}$.

Valeur propre 0. On a vu que $\Phi(A) = 0$. Comme $A \neq 0$, c'est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre 0. Ainsi, $0 \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et $\mathbb{R}\,A \subset E_0(\Phi)$.

Valeur propre $\mathrm{Tr}(A)$. On voit également que si $\mathrm{Tr}(M) = 0$, $\Phi(M) = \mathrm{Tr}(A)\,M$, donc si $M \neq 0$, M est un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $\mathrm{Tr}(A)$. Ainsi, $\mathrm{Tr}(A) \in \mathrm{Sp}(\Phi)$ et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} \subset E_{\mathrm{Tr}(A)}(\Phi)$.

Conclusion. Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $A \notin \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$ donc $E = \mathbb{R}\,A \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$ car $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$ est un hyperplan de E. Grâce aux inclusions précédentes,

$$E = \mathbb{R}\,A \oplus \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr} \subset E_0(\Phi) \oplus E_{\mathrm{Tr}(A)}(\Phi) \subset E.$$

Alors les inclusions sont toutes des égalités : en particulier, $E_0(\Phi) = \mathbb{R}\,A$ et $E_{\mathrm{Tr}(A)}(\Phi) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}$.

Bonus. En passant, on a aussi $E = E_0(\Phi) \oplus E_{\mathrm{Tr}(A)}(\Phi)$ donc Φ est diagonalisable.

52 — CCP

1. Procédons par récurrence. Pour $k = 1$, c'est vrai. Supposons que ce soit vrai pour k.

$$\begin{aligned}&A^{k+1}\,B - B\,A^{k+1} = A^{k+1}\,B - B\,A^k\,A\\ &= A^{k+1}\,B - (A^k\,B - \alpha\,k\,A^k)\,A\\ &= A^{k+1}\,B - A^k\,(A\,B - \alpha\,A) + \alpha\,k\,A^{k+1}\\ &= (k+1)\,A^{k+1}\end{aligned}$$

et c'est vrai au rang $k+1$.

2. Considérons l'application suggérée,

$$L : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ M \mapsto M\,B - B\,M.$$

Clairement, c'est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. La question 1 s'écrit alors $L(A^k) = \alpha\,k\,A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si A n'est pas nilpotente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \neq 0$ donc A^k est vecteur propre de L associé à la valeur propre αk. Comme $\alpha \neq 0$, cela signifie que L possède une infinité de valeurs propres, ce qui n'est pas possible puisque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Alors, A est nilpotente.

53 — CCP

1. Commençons par supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$. Constatons qu'alors, comme H est de dimension 2, $\dim \mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \leqslant 2$, ou encore $\mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \leqslant 2 < 3$ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\,u$. Soit $x \in H$. On a

$$u(x) = u(x) - \lambda x + \lambda x \in H$$

car $u(x) - \lambda x \in \mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$ et $\lambda x \in H$. Ainsi, $u(H) \subset H$.

Supposons réciproquement que $u(H) \subset H$. Alors, en nommant D une droite supplémentaire de H, on a $E = H \oplus D$. Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice A de u est triangulaire par blocs, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \gamma & \varepsilon \\ \beta & \delta & \zeta \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array}\right).$$

Là aussi, constatons que λ est alors une valeur propre évidente de A, donc de u. En outre,

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \gamma & \varepsilon \\ \beta & \delta - \lambda & \zeta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où l'on voit que $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est engendré par les colonnes de cette matrice, lesquelles ont une coordonnée nulle selon le troisième vecteur de la base, celui qui engendre D : ainsi, $\mathrm{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$.

2. Clairement, l'énoncé suggère de confondre, volontairement, les espaces $\mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et les endomorphismes et leurs matrices associées.

Selon la question précédente, il est raisonnable de chercher le spectre de A. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\chi_A(x) = (-1)^3 \det(A - x\,I_3)\\ &= -\begin{vmatrix} -1-x & 2 & -3 \\ -2 & 5-x & -2 \\ -3 & 2 & -1-x \end{vmatrix}\\ &= -\begin{vmatrix} 2-x & 2 & -3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ -2+x & 2 & -1-x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_3\\ &= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ -1 & 2 & -1-x \end{vmatrix}\\ &= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ 0 & 4 & -4-x \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1\\ &= (x-2)\,((5-x)\,(-4-x) + 8)\\ &= (x-2)\,(x^2 - x - 12)\\ &= (x-2)\,(x-4)\,(x+3).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 2, 4\}$. En passant, A est diagonalisable, qui a trois valeurs propres distinctes.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par A. Discutons selon sa dimension.

— Si $\dim F = 0$, $F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, qui est bien stable par A.

— Si $\dim F = 1$, F est une droite stable, donc est engendré par un vecteur propre. Comme il y a trois valeurs propres distinctes, il n'y a que trois droites stables, qui sont les trois sous-espaces propres de A. Déterminons-les.

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\iff \begin{cases} -3x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} -3x + 2y - 3z = 0 \\ 5y = 0 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \end{cases}\\ &\iff x + z = 0, y = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $E_2(A) = \mathbb{R}(1,0,-1)$. De même,

$$X \in E_4(A) \iff \begin{cases} -5x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + \ \ y - 2z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x \quad + \ z = 0 \ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ \quad x \quad - \ z = 0 \ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff x = z, y = 4z.$$

Ainsi, $E_4(A) = \mathbb{R}(1,4,1)$. Enfin,

$$X \in E_{-3}(A) \iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 8y - 2z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + \ 2y - 3z = 0 \\ \qquad 10y - 5z = 0 \ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \qquad 10y - 5z = 0 \ L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff z = 2y, x = 2z.$$

Ainsi, $E_{-3}(A) = \mathbb{R}(2,1,2)$.

— Si $\dim F = 2$, F est un hyperplan, et d'après la première question, F contient l'une des trois images $\mathrm{Im}(A - 2I_3)$, $\mathrm{Im}(A - 4I_3)$ et $\mathrm{Im}(A + 3I_3)$. Mais ces images sont des plans, d'après le théorème du rang, et sachant que les noyaux correspondants sont les espaces propres précédents. Donc F est l'un de ces trois plans. Trouvons-les.
On a
$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$
donc $\mathrm{Im}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}((-3,-2,-3),(2,3,2))$. De même,
$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$
donc $\mathrm{Im}(A - 4I_3) = \mathrm{Vect}((-5,-2,-3),(2,1,2))$ et
$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 8 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$
donc $\mathrm{Im}(A + 3I_3) = \mathrm{Vect}((2,-2,-3),(2,8,2))$.

— Si $\dim F = 3$, $F = \mathbb{R}^3$, qui est bien-sûr stable par A.

54 — MP

1. Φ est clairement linéaire, donc il reste à prouver que $\Phi(E) \subset E$. Soit $f \in E$. La fonction $g = \Phi(f)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $F' = f$, car f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Or pour $x > 0$,

$$g(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0},$$

où l'on reconnait le taux d'accroissement de F en 0, donc $\lim_0 g = F'(0) = f(0) = g(0)$. Ainsi, g est continue en 0, donc $g \in E$. Finalement, Φ est bien un endomorphisme de E.

2. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc en dérivant, $f(x) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$, Φ est injective et $0 \notin \mathrm{Sp}(\Phi)$.

Commentaire. E n'est pas de dimension finie donc Φ n'est pas forcément bijective.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de Φ et f une fonction propre associée. Alors, $f(0) = \lambda f(0)$, donc $f(0) = 0$. En outre, pour tout $x > 0$, $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda x f(x)$. Avec la même notation que plus haut, on a $F(x) = \lambda x F'(x)$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $F(x) = \alpha x^{1/\lambda}$. Comme $F' = f$, on en déduit que $f(x) = \beta x^{1/\lambda - 1}$, avec $\beta \in \mathbb{C}$. On veut que f soit dans E, c'est-à-dire qu'elle soit continue en 0. Pour cela, il faut que $\mathrm{Re}(1/\lambda - 1) > 0$. Si l'on prend un λ quelconque vérifiant cette condition, alors par construction, les fonctions de E définies par $f(x) = \beta x^{1/\lambda - 1}$ sont fonctions propres de Φ associées à la valeur propre λ. On a raisonné par analyse-synthèse.

3. Pour finir, si l'on pose $\lambda = a + ib$, la condition sur λ s'écrit $a^2 - a + b^2 < 0$. On reconnait l'intérieur du disque de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

55 — MP

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ tel que $TP = \lambda P$. D'après la formule de Taylor,

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(-a)}{n!}(X + a)^n,$$

où l'on se rappelle que la somme est finie. Alors

$$\begin{aligned} TP(X) &= P\left(\frac{X+1}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(-a)}{n!}\left(\frac{X+1}{2} + a\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(-a)}{2^n\, n!}(X + 1 + 2a)^n. \end{aligned}$$

Pour pouvoir identifier TP et λP, il serait agréable d'avoir $a = 1 + 2a$, c'est-à-dire $a = -1$: faisons ce choix. Alors,

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(1)}{n!}(X - 1)^n,$$

$$TP(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(1)}{2^n\, n!}(X - 1)^n.$$

Donc $TP = \lambda P$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{P^{(n)}(1)}{2^n\, n!} = \lambda \frac{P^{(n)}(1)}{n!}.$$

Comme $P \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^{(k)}(1) \neq 0$, donc $\lambda = 1/2^k$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{k\}$, $\lambda \neq 1/2^n$, donc $P^{(n)}(1) = 0$, d'où $P = \alpha(X-1)^k$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Synthèse. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $P_k = (X-1)^k$:

$$\begin{aligned} TP_k(X) &= \left(\frac{X+1}{2} - 1\right)^k \\ &= \frac{1}{2^k}(X-1)^k = \frac{1}{2^k} P_k(X). \end{aligned}$$

Conclusion. Finalement, $\mathrm{Sp}(T) = \{1/2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_{1/2^k}(T) = \mathbb{R} P_k$.