Septième feuille d'exercices

Réduction

56 — CCP

La matrice $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

57

Réduire les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

58

Diagonalisabilité de $\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

59 — ENS

Soient $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $M \in E$ donnée. Soit φ l'endomorphisme de E qui à A associe AM ; en déterminer le rang et montrer qu'il est diagonalisable si et seulement si M l'est.

60 — CS

Soit A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre commune.

1. Montrer que $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer que pour toute matrice M, il existe une unique matrice X telle que $AX - XB = M$.

61 — CCP

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, de trace égale à 7 et vérifiant $A^3 - 5A^2 + 6A = 0$.

62 — CCP

Montrer que l'application g, définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $g(P) = n^2 X P - (X^2 + X) P' - X^3 P''$ est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ? Injectif ?

63 — CCP

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Considérons une matrice diagonale D semblable à A. Montrer que si une matrice commute avec D, elle est diagonale.

3. Déterminer les matrices $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$M^7 + M + I_3 = A.$$

64 — ENS16

Existe-t-il $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & x & y \\ 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

65

Exprimer en fonction de n les suites définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n + 1, \\ v_{n+1} = 2v_n + 1, \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 3w_n. \end{cases}$$

66 — CS

Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

67 — AM

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 7x - 12y + 6z \\ y' = 10x - 19y + 10z + te^t \\ z' = 12x - 24y + 13z \end{cases}$$