

Corrigés des exercices de la septième feuille

56 ————— CCP

Nommons A cette matrice. Voici deux approches.

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A) \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3).\end{aligned}$$

Il est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

VALEURS PROPRES. On voit que la somme des colonnes donne la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc ce vecteur colonne est associé à la valeur propre 1. Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$. Or $\operatorname{Tr}(A) = 4$ donc A admet 3 comme autre valeur propre. Ainsi A est diagonalisable, qui admet deux valeurs propres distinctes.

57 —————

Nommons toujours A la matrice étudiée.

1. Le polynôme caractéristique de la matrice A est défini pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\chi_A(x) = -\det(A - xI_3) = (x - 5)(x + 1)^2,$$

donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 5\}$, où l'on a indexé les valeurs propres par leur multiplicité. On trouve sans difficulté

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad E_5(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec

$$\begin{aligned}D &= \operatorname{diag}(-1, -1, 5) \\ \text{et } P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Commentaire. A était forcément diagonalisable, puisqu'elle est symétrique réelle.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 2).$$

Il n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc on poursuit dans $\mathbb{C}$. On a $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{3, 1 + i, 1 - i\}$ et on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{1+i}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 - 2i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne fait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{1+i}(A)$, $AX = (1 + i)X$ donc en conjuguant, $A\bar{X} = (1 - i)\bar{X}$, donc $\bar{X} \in E_{1-i}(A)$. Alors

$$E_{1-i}(A) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 2 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec

$$\begin{aligned}D &= \operatorname{diag}(3, 1 + i, 1 - i) \\ \text{et } P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - 2i & 1 + 2i \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & i & -i \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = x^2(x - 3)$, donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 3\}$. On trouve

$$E_0(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_3(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $\dim E_0(A) = 1 < 2 = m(0)$ et A n'est pas diagonalisable. Cherchons à la trigonaliser.

Soit u l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A . Cherchons une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice T de u soit triangulaire. Sur la diagonale de T figurent les valeurs propres de u , donc celles de A :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut choisir $e_1 \in E_0(A)$ et $e_3 \in E_3(A)$ c'est-à-dire $b = c = 0$: par exemple, choisissons

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi choisir $a = 1$: ce résultat hors-programme n'est pas à connaître, et l'examinateur est censé donner l'indication lors de l'exercice ; ou alors, on mène les calculs qui suivent avec a quelconque, et l'on voit que ce choix est possible.

Cherchons $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $u(e_2) = 0e_2 + e_1$,

c'est-à-dire $Ae_2 = e_1$. On résout donc

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution.

Ainsi, $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

58

Voici deux méthodes, entre autres.

PAR LE RANG. La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale : 1 et 2 sont valeurs propres doubles. Donc A est diagonalisable si et seulement si ses espaces propres $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des plans, autrement dit, si et seulement si les matrices $A - I_4$ et $A - 2I_4$ sont de rang 2. On voit que $\text{rg}(A - I_4) = 2$ si et seulement si $a = 0$ et $\text{rg}(A - 2I_4) = 2$ si et seulement si $f = 0$. Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $a = f = 0$.

PAR LES POLYNÔMES. Comme $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1_2, 2_2\}$, A est diagonalisable si et seulement si le polynôme

$$\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} (X - \lambda) = (X - 1)(X - 2)$$

est annulateur de A . La matrice

$$(A - I_4)(A - 2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & -a & ad & ae + bf \\ 0 & 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nulle si et seulement si $a = f = 0$.

59**ENS**

1. Pour déterminer le rang de φ , trouvons son noyau plutôt que son image :

$$\text{Ker } \varphi = \{A \in E \mid AM = 0_E\}.$$

Soit $A \in E$. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M , les colonnes de AM sont $AC_1, \dots, AC_n$. Donc $A \in \text{Ker } \varphi$ si et seulement si les AC_j sont nulles pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si et seulement si les C_j sont dans $\text{Ker } A$, si et seulement si $\text{Im } M \subset \text{Ker } A$. Ainsi,

$$\text{Ker } \varphi = \{A \in E \mid \text{Im } M \subset \text{Ker } A\}.$$

Considérons une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ adaptée à $\text{Im } M$. Dans une telle base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A s'écrit par blocs

$$B = \begin{pmatrix} 0_p & C \\ 0_{n-p,p} & D \end{pmatrix},$$

avec des notations évidentes où $p = \text{rg } M$. Où l'on voit que le nombre de coefficients arbitraires dans B vaut $n(n-p)$. Comme l'application qui à A associe B est un isomorphisme,

$$\dim \text{Ker } \varphi = n(n-p),$$

donc

$$\text{rg } \varphi = n^2 - n(n-p) = np = n \text{rg } M.$$

2. Comme E est de dimension finie, φ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Cherchons donc les polynômes annulateurs de φ .

Soit $A \in E$. On a $\varphi^2(A) = AM^2$ et pour tout k , $\varphi^k(A) = AM^k$, donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\varphi)(A) = AP(M)$. Ainsi, tout polynôme annulateur de φ l'est de M , et réciproquement.

Alors φ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, si et seulement s'il en est de même pour M , d'après ce qui précède, si et seulement si M est diagonalisable.

60**CS**

1. On peut écrire

$$\chi_A = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$$

car il est scindé sur $\mathbb{C}$, où l'on note $m(\lambda)$ la multiplicité de $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Alors,

$$\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} (B - \lambda I_n)^{m(\lambda)}.$$

Or $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \emptyset$ donc pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ et $B - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, comme produit de matrices inversibles, $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. La question revient à prouver que l'application

$$\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AX - XB$$

est bijective, donc qu'elle est injective puisque c'est clairement un endomorphisme.

Soit $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Phi(X) = 0$ c'est-à-dire $AX = XB$. Alors, $A^2X = AXB = XB^2$, donc par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^kX = XB^k$ et pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)X = X P(B)$. En particulier et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A)X = X \chi_A(B) = 0$. Comme $\chi_A(B)$ est inversible, $X = 0$.

61**CCP**

On a $A^3 - 5A^2 + 6A = A(A - 2I_3)(A - 3I_3) = 0$. Mais A est inversible donc $(A - 2I_3)(A - 3I_3) = 0$. Comme A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est diagonalisable. De plus, $\text{Sp}(A) \subset \{2, 3\}$. Enfin, $\text{Tr}(A) = 7$ est la somme des valeurs propres de A , donc la seule possibilité est que 2 soit valeur propre double et 3 simple. Ainsi, les matrices cherchées sont exactement les matrices semblables à $\text{diag}(2, 2, 3)$.

62**CCP**

1. L'application g est clairement linéaire, par linéarité de la dérivation et de la multiplication par un polynôme. En outre, si P est de degré $d \leq n-1$, $g(P)$ est possiblement de degré inférieur ou égal à $d+1 \leq n$. Enfin, $g(X^n) = -nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc g est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$g(X^k) = (n^2 - k^2)X^{k+1} - kX^k,$$

donc la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ n^2 & -1 & & & & (0) \\ & n^2 - 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & -k & & \\ & & & n^2 - k^2 & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots & -(n-1) \\ & & & & & n^2 - (n-1)^2 & -n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale. Ainsi,

$$\operatorname{Sp}(g) = \{0, -1, -2, \dots, -n\}.$$

Cela signifie que g admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc g est diagonalisable.

3. Comme $0 \in \operatorname{Sp}(g)$, g n'est pas injectif.

63 ————— CCP

1. Comme -1 est seul sur la diagonale dans la troisième colonne, -1 est valeur propre évidente de A , et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre évident associé.

Comme A est triangulaire par blocs, les deux autres valeurs propres de A sont celles du bloc $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire 1 et 3 , car ce bloc est lui-même triangulaire.

On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ et l'on voit que

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de cette matrice, donc est vecteur propre de A associé à 1 .

Enfin, $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ et l'on voit

que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est dans le noyau de cette matrice, donc est vecteur propre de A associé à 3 .

Ainsi, $A = P D P^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(-1, 1, 3)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Soit une matrice M qui commute avec D . Alors, les sous-espaces propres de D sont stables par M . Comme il s'agit des trois droites engendrées par les vecteurs de la base canonique de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, lesdits trois vecteurs sont propres pour M et M est diagonale.

3. Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ une telle matrice. On a

$$M^7 + M + I_3 = A$$

$$\iff M^7 + M + I_3 = P D P^{-1}$$

$$\iff P^{-1} M^7 P + P^{-1} M P + P^{-1} I_3 P = D$$

$$\iff (P^{-1} M P)^7 + P^{-1} M P + I_3 = D$$

$$\iff N^7 + N + I_3 = D,$$

en posant $N = P^{-1} M P$. Ainsi, D est un polynôme en N , donc commute avec N . D'après la question précédente, N est donc diagonale. En écrivant $N = \operatorname{diag}(a, b, c)$, on a

$$\operatorname{diag}(a^7 + a + 1, b^7 + b + 1, c^7 + c + 1) = \operatorname{diag}(-1, 1, 3).$$

En considérant $Q = X^7 + X + 1$, on cherche donc a, b et c tels que $Q(a) = -1$, $Q(b) = 1$ et $Q(c) = 3$. Mais

$Q' = 7X^6 + 1$ et $Q'(x) \geq 0$ pour tout x réel, donc Q est strictement croissant : il réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Or, on voit que $Q(0) = 1$, donc $b = 0$; et $Q(-1) = -1$, donc $a = -1$; et $Q(1) = 3$ donc $c = 1$. Finalement,

$$M^7 + M + I_3 = A$$

$$\iff M = P \operatorname{diag}(-1, 0, 1) P^{-1}.$$

Sans difficulté,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

64 ————— ENS16

Nommons A la matrice de l'énoncé et discutons selon $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'existence de $B \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, en raisonnant par condition nécessaire et suffisante.

CONDITION NÉCESSAIRE. Supposons que B existe. Comme A est un polynôme en B , A et B commutent, donc les espaces propres de A sont stables par B .

Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont -1 et 1 , donc celles de B^2 aussi. Mais ces dernières sont les carrés de celles de B , donc ± 1 est valeur propre de B , ainsi que $\pm i$. Or B est réelle, donc si l'une de ses valeurs propres est complexe, sa conjuguée doit l'être aussi. Alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{-i, i, \pm 1\}$. Ainsi B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, qui admet trois valeurs propres distinctes. Donc B^2 l'est aussi, c'est-à-dire que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donc

$$0 = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} (X - \lambda) \\ = (A - I_3)(A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2x & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $x = 0$.

CONDITION SUFFISANTE. Supposons que $x = 0$. Puisque A est triangulaire par blocs, cherchons B sous la forme

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $B_1 \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $C \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Constatons que le 0 ci-dessus est en fait la ligne $(0 \ 0)$. On a donc

$$B^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & B_1 C + C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On aimerait donc que $B_1^2 = -I_2$. Choisissons

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $C = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$:

$$B_1 C + C = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -v + u = y \\ u + v = z \end{cases} \\ \iff C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+z) \\ \frac{1}{2}(-y+z) \end{pmatrix}.$$

Par construction, la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2}(y+z) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(-y+z) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2 = A$. Constatons qu'elle n'est pas unique : Il existe une infinité de choix pour B_1 , donc pour B .

CONCLUSION. L'équation $B^2 = A$ admet des solutions dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $x = 0$.

65

FORMALISATION. Introduisons

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que le système s'écrive $U_{n+1} = AU_n + B$.

RÉDUCTION. Tentons de diagonaliser A . Le polynôme caractéristique de A est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\chi_A(x) = (-1)^3 \det(A - xI_3) = (x-2)^2(x-4).$$

Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 4\}$. On trouve sans peine que

$$E_2(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_4(A) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \text{diag}(2, 4, 2) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Commentaire. On a rangé les vecteurs propres dans un ordre différent de celui où on les a rencontrés pour une simple raison esthétique. C'est égal, mais il faut alors ranger les valeurs propres dans le même ordre sur la diagonale de D .

RÉSOLUTION. Examinons les premiers termes de la suite :

$$U_1 = AU_0 + B,$$

$$U_2 = AU_1 + B = A^2U_0 + AB + B \\ = A^2U_0 + (I_3 + A)B,$$

d'où par une récurrence immédiate,

$$U_n = A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B.$$

D'une part, $B \in E_2(A)$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = 2^k B$ et

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k \right) B = \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \right) B = (2^n - 1) B.$$

D'autre part, $A^n U_0 = P D^n P^{-1} U_0$. On voit que $P U_0 = 2U_0$, donc $P^{-1} U_0 = \frac{1}{2} U_0$ et

$$A^n U_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} \\ 2^n \\ 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$U_n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^{n-1} \\ 2^n \\ 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} + (2^n - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} + 2^n + 2^{n-1} - 1 \\ 2^{n+1} - 1 \\ 2^{2n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

66

CS

RÉSOLUTION GÉNÉRALE. Diagonalisons A : sans difficulté, $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \text{diag}(-1, 2, 3) \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $t \mapsto X(t)$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \\ \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

Posons $Y = P^{-1}X$, ou aussi $X = PY$. Comme P ne dépend pas de t , on a $Y' = P^{-1}X'$, donc

$$X' = AX \iff Y' = DY.$$

$$\text{En écrivant } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = -y_1, \\ y_2' = 2y_2, \\ y_3' = 3y_3, \end{cases}$$

$$\iff \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \alpha e^{-t}, \\ y_2(t) = \beta e^{2t}, \\ y_3(t) = \gamma e^{3t}. \end{cases}$$

Puisque $X = PY$, en notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de P ,

$$X = y_1 C_1 + y_2 C_2 + y_3 C_3.$$

Ainsi, les solutions du système sont donc les fonctions

$$t \mapsto \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

CONDITIONS INITIALES. Pour $t = 0$, on a

$$X(0) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour obtenir les constantes correspondant aux conditions initiales données, on résout

$$P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = X(0)$$

pour les trois valeurs de $X(0)$. Pour cela, il suffit de calculer

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On peut même condenser le calcul de P^{-1} et du produit en une seule étape, en appliquant la méthode de Gauss-Jordan à P et à cette dernière matrice au lieu de l'identité :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & 5 & 2 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_3 - 4L_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - 8L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{matrix}$$

Ainsi, les solutions cherchées sont respectivement

$$t \mapsto \frac{7}{12} e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$t \mapsto \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

67 ————— **AM**
REFORMULATION. Le système s'écrit $Y' = AY + B$ où

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad B : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

SYSTÈME HOMOGÈNE. Diagonalisons A : sans difficulté, $A = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \text{diag}(-1, 1, 1).$$

Comme dans l'exercice précédent, l'ensemble des solutions du système homogène $Y' = AY$ est

$$\left\{ t \mapsto \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Pour trouver une solution particulière du système complet, inspirons-nous encore de l'exercice précédent et posons $Y = PZ$, ou encore $Z = P^{-1}Y$, où Z est une nouvelle fonction inconnue. Comme P ne dépend pas de la variable t du système différentiel, $Y' = PZ'$. Alors

$$\begin{aligned} Y' &= AY + B \\ \Leftrightarrow PZ' &= PDP^{-1}PZ + B \\ \Leftrightarrow Z' &= DZ + P^{-1}B. \end{aligned}$$

Sans difficulté, par exemple par le pivot de Gauss, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}B(t) = te^t \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Alors, en notant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} Y' &= AY + B \\ \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(t) = -z_1(t) + 2te^t, \\ z_2'(t) = z_2(t) - 9te^t, \\ z_3'(t) = z_3(t) - 12te^t. \end{cases} \end{aligned}$$

On est donc ramené à chercher des solutions particulières d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 classiques. Sans difficulté, on trouve (par exemple)

$$\begin{cases} z_1(t) = (t - \frac{1}{2})e^t, \\ z_2(t) = -\frac{9}{2}t^2e^t, \\ z_3(t) = -6t^2e^t. \end{cases}$$

Une solution particulière du système de départ est donc

$$Y = PZ = z_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CONCLUSION. Finalement, l'ensemble des solutions du système est

$$\begin{aligned} \left\{ t \mapsto \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right. \\ \left. + (t - \frac{1}{2})e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{9}{2}t^2e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 6t^2e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}. \end{aligned}$$