Huitième feuille d'exercices

Variables aléatoires

68

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Considérons une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $1-p$ d'échouer. On la répète indépendamment jusqu'à obtenir m succès et l'on note X le nombre d'essais nécessaires à leur obtention.

1. Déterminer la loi de X lorsque $m = 1$.

2. Déterminer la loi de X lorsque $m \geqslant 2$.

69 — **CCP**

Un élément chimique émet des électrons pendant une durée T ; on note N la variable aléatoire qui dénombre les électrons émis et on admet que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Un électron a une probabilité p d'être efficace, indépendamment des autres. On note X la variable aléatoire qui dénombre les électrons efficaces et Y celle qui dénombre ceux qui ne le sont pas.

1. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X = k \,|\, N = j)$.

2. En déduire la loi marginale de X puis donner $E(X)$ et $V(X)$ sans calcul.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

4. En posant $N = X + Y$, calculer $\operatorname{Cov}(X, N)$ et en commenter le signe.

70 — **CCP15**

Calculer $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$ où X est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

71 — **MP**

Soient trois variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathscr{B}(p)$, $Y \sim \mathscr{G}(a)$ et $Z \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de U qui vaut 0 si $X = 0$ et Y si $X = 1$.

2. Mêmes questions pour V qui vaut Y si $X = 0$ et Z si $X = 1$.

72 — **CS**

Un train va et vient sur une ligne de métro de quatre arrêts : il met une minute pour aller d'une station à l'autre et s'y arrête pendant un temps négligeable. Un voyageur fatigué monte à la station 0 au temps $t = 0$ et s'endort ; la variable aléatoire T associée au temps qu'il met à se réveiller suit une loi géométrique. Trouver la loi suivie par la variable aléatoire X représentant le numéro de la station où il se réveille.

73 — **CCP18**

1. Posons $j = e^{2i\pi/3}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, simplifier l'expression $S_k = 1 + j^k + j^{2k}$.

2. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre 1, et Y est le reste de la division euclidienne de X par 3. Que vaut $P(Y = 0)$?