Corrigés des exercices de la huitième feuille

68

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons la variable aléatoire X_n qui teste la réussite de chaque expérience : on sait que $X_n \sim \mathscr{B}(p)$.

1. D'après le cours, si $m = 1$, $X \sim \mathscr{G}(p)$.

2. L'évènement $(X = n)$ traduit le fait que l'on obtient m succès pour la première fois à la n^{e} expérience : d'une part, cette dernière expérience est un succès, donc $X_n = 1$; et d'autre part, parmi les expériences précédentes, on n'a obtenu que $m-1$ succès. Ainsi

$$(X = n) = (X_1 + \cdots + X_{n-1} = m-1) \cap (X_n = 1).$$

Puisque les X_i sont indépendantes,

$$P(X = n) = P\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = m-1\right) P(X_n = 1).$$

On sait que $\sum_{i=1}^{n-1} X_i \sim \mathscr{B}(n-1, p)$ donc

$$P(X = n) = \binom{n-1}{m-1} p^{m-1} (1-p)^{n-m} p.$$

Ce résultat est encore valable quand $n \leqslant m$ car le coefficient binomial est alors nul.

69 **CCP**

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Supposons que $N = j$. Sachant que chacun des j électrons émis est efficace indépendamment des autres, le nombre de ceux qui le sont suit une loi binomiale $\mathscr{B}(j, p)$. Donc pour tout $k \in [\![0, j]\!]$,

$$P(X = k \,|\, N = j) = \binom{j}{k} p^k q^{j-k},$$

en notant $q = 1 - p$.

2. Les évènements $(N = j)_{j \in \mathbb{N}}$ forment un système complet donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = k \,|\, N = j)\, P(N = j) \\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} P(X = k \,|\, N = j)\, P(N = j) \\
&= \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{j!}{k!\,(j-k)!} p^k q^{j-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{p^k q^{j-k} \lambda^k \lambda^{j-k}}{k!\,(j-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{j-k}}{(j-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda q} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!},
\end{aligned}$$

car $p + q = 1$. Ainsi, $X \sim \mathscr{P}(\lambda p)$ et $E(X) = \lambda p$, $V(X) = \lambda p$.

3. La réponse est surement oui, sachant que les électrons sont efficaces indépendamment les uns des autres. Prouvons-le.

Sur le même principe que plus haut, en inversant les rôles de p et q, $Y \sim \mathscr{P}(\lambda q)$. Soient k et ℓ des entiers. Comme $N = X + Y$,

$$\begin{aligned}
P((X = k) \cap (Y = \ell)) &= P((X = k) \cap (N = k + \ell)) \\
&= P(X = k \,|\, N = k + \ell)\, P(N = k + \ell) \\
&= \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} p^k q^\ell e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} \\
&= e^{-\lambda(p+q)} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{(\lambda q)^\ell}{\ell!} \\
&= P(X = k)\, P(Y = \ell).
\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit que l'on a bien $X \perp\!\!\!\perp Y$, comme on le pensait.

4. Comme $N = X + Y$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, N) &= \operatorname{Cov}(X, X + Y) \\
&= \operatorname{Cov}(X, X) + \operatorname{Cov}(X, Y) = V(X),
\end{aligned}$$

car $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$ puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Or $X \neq 0$, donc $V(X) > 0$. Ainsi, $\operatorname{Cov}(X, N) > 0$ donc en particulier, $\operatorname{Cov}(X, N) \neq 0$. Cela entraine que X et N ne sont pas indépendantes.

70 **CCP15**

Comme $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

D'après le théorème du transfert, on a

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n} P(X = n) \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n+1)\,n!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Ce calcul est justifié, parce que l'on a manipulé des sommes à termes positifs et que le résultat est fini.

71 **MP**

Pour simplifier, notons $q = 1 - p$ et $b = 1 - a$.

1. Par construction, $U(\Omega) = \{0\} \cup Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P(U = n) &= P(U = n \,|\, X = 0)\, P(X = 0) \\
&\quad + P(U = n \,|\, X = 1)\, P(X = 1) \\
&= \begin{cases} 1q + 0p = q & \text{si } n = 0, \\ 0q + P(Y = n)p = pab^{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(U=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p\,a\,b^{n-1} \\ &= p\,E(Y) = \frac{p}{a}. \end{aligned}$$

Le calcul est valide car les sommes manipulées sont à termes positifs et le résultat est fini.

Sur le même principe,

$$\begin{aligned} V(U) &= E(U^2) - E(U)^2 = p\,E(Y^2) - (p\,E(Y))^2 \\ &= p\,(V(Y) + E(Y)^2) - p^2\,E(Y)^2 \\ &= p\,V(Y) + p\,q\,E(Y)^2 \\ &= p\,\frac{b}{a^2} + \frac{p\,q}{a^2} = \frac{p\,(b+q)}{a^2}. \end{aligned}$$

2. On a $V(\Omega) = Y(\Omega) \cup Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(V=n) &= P(V=n\,|\,X=0)\,P(X=0) \\ &\qquad + P(V=n\,|\,X=1)\,P(X=1) \\ &= P(Y=n)\,P(X=0) + P(Z=n)\,P(X=1) \\ &= \begin{cases} p\,e^{-\lambda} & \text{si } n=0, \\ q\,a\,b^{n-1} + p\,e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^n}{n!} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(V) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(V=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,q\,a\,b^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,p\,e^{-\lambda}\,\frac{\lambda}{n!} \\ &= q\,E(Y) + p\,E(Z) \\ &= \frac{q}{a} + p\lambda. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} V(V) &= E(V^2) - E(V)^2 \\ &= q\,E(Y^2) + p\,E(Z^2) - (q\,E(Y) + p\,E(Z))^2 \\ &= q\,(V(Y) + E(Y)^2) + p\,(V(Z) + E(Z)^2) \\ &\qquad - q^2\,E(Y)^2 - p^2\,E(Z)^2 - 2\,p\,q\,E(Y)\,E(Z) \\ &= q\,V(Y) + p\,V(Z) + p\,q\,(E(Y) - E(Z))^2 \\ &= q\,\frac{b}{a^2} + p\lambda + p\,q\left(\frac{1}{a} - \lambda\right)^2 \\ &= \frac{q\,(b+p)}{a^2} + \frac{p\lambda(a-2q)}{a} + p\,q\,\lambda^2. \end{aligned}$$

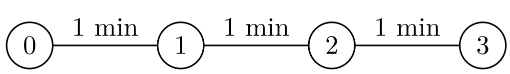
Commentaires.

L'hypothèse d'indépendance est inutile.

Le nom V pour une variable aléatoire n'est pas des plus heureux, sauf si l'examinateur pensait noter $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ pour l'espérance et la variance.

72 — **CS**

Faisons un schéma de la ligne :



Soit $p \in \,]0,1[$ le paramètre de T.

Puisqu'il y a 4 stations, numérotées 0, 1, 2 et 3, $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

L'évènement $(X=0)$ peut se réaliser la première fois au temps $t = 6$ min, et ensuite toutes les 6 minutes, le temps d'un aller-retour sur la ligne :

$$(X=0) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (T = 6n)$$

donc, puisque les évènements $(T=t)$ sont incompatibles,

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(T=6n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{6n-1} \\ &= p\,(1-p)^5 \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{6n-6} = \frac{p\,(1-p)^5}{1-(1-p)^6}. \end{aligned}$$

De même, l'évènement $(X=3)$ peut se réaliser pour la première fois pour $t = 3$ min, et ensuite toutes les 6 minutes :

$$(X=3) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (T = 6n+3)$$

donc

$$P(X=3) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=6n+3) = \frac{p\,(1-p)^2}{1-(1-p)^6}.$$

L'événement $(X=1)$ peut se réaliser une première fois pour $t = 1$ min, une seconde fois au retour pour $t = 5$ min, et ce schéma se répète ensuite toutes les 6 minutes :

$$\begin{aligned} (X=1) &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((T=6n+1) \cup (T=6n+5)) \\ &= \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (T=6n+1)\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (T=6n+5)\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=6n+1) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=6n+5) \\ &= \frac{p}{1-(1-p)^6} + \frac{p\,(1-p)^4}{1-(1-p)^6}. \end{aligned}$$

Sur le même principe,

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=6n+2) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(T=6n+4) \\ &= \frac{p\,(1-p)}{1-(1-p)^6} + \frac{p\,(1-p)^3}{1-(1-p)^6}. \end{aligned}$$

73 — **CCP18**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la division euclidienne par 3, il s'écrit de façon unique $k = 3q + r$, où $r \in [\![0,2]\!]$. Alors, sachant que $j^3 = 1$,

$$\begin{aligned} S_k &= 1 + j^{3q+r} + j^{2(3q+r)} \\ &= 1 + (j^3)^q\,j^r + (j^3)^{2q}\,j^{2r} \\ &= 1 + j^r + j^{2r}. \end{aligned}$$

Si $r=0$, $1+j^0+j^0=3$. Si $r=1$, $1+j+j^2=0$. Et si $r=2$, $1+j^2+j^4=1+j^2+j=0$. Finalement,

$$S_k=\begin{cases}3 & \text{si } k=3q\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2. Clairement, $(X=k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$P(Y=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=0\,|\,X=k)\,P(X=k).$$

Comme plus haut, tout $k\in\mathbb{N}$ s'écrit de façon unique $k=3q+r$ avec $r\in[\![0,2]\!]$, donc

$$P(Y=0\,|\,X=k)=\begin{cases}1 & \text{si } r=0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}P(Y=0)&=\sum_{q=0}^{+\infty}P(X=3q)\\&=\sum_{q=0}^{+\infty}e^{-1}\,\frac{1^{3q}}{(3q)!}=\frac{1}{e}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{(3q)!}.\end{aligned}$$

Avec la question précédente, écrivons artificiellement

$$\begin{aligned}&\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{(3q)!}\\&=\frac{1}{3}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{S_{3q}}{(3q)!}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{S_{3q+1}}{(3q+1)!}+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{S_{3q+2}}{(3q+2)!}\right),\end{aligned}$$

puisque $S_{3q}=3$ et $S_{3q+1}=S_{3q+2}=0$. Alors,

$$\begin{aligned}3\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{(3q)!}&=\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1+j^{3q}+j^{2(3q)}}{(3q)!}\\&\quad+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1+j^{3q+1}+j^{2(3q+1)}}{(3q+1)!}\\&\quad+\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1+j^{3q+2}+j^{2(3q+2)}}{(3q+2)!}\\&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j^{2k}}{k!}\\&=e+e^j+e^{j^2}.\end{aligned}$$

Comme $j=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}$ et $j^2=\overline{\jmath}$, on a $e^{j^2}=\overline{e^{\jmath}}$ et

$$e^j+e^{j^2}=2\,\mathrm{Re}(e^j)=2\,e^{-1/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}P(Y=0)&=\frac{1}{3e}\left(e+2\,e^{-1/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\,e^{-3/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$