Neuvième feuille d'exercices

Suites numériques

74 — MP

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 \in]1,2[$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + u_n - \tfrac{1}{2} u_n^2.$$
Prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}.$$

75

Expliciter les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 6\,u_n - 2\,v_n, \\ v_{n+1} = -2\,u_n + 9\,v_n. \end{cases}$$

76 — CS

Montrer que les suites définies par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$$
sont adjacentes et convergent vers un irrationnel.

77

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\,\theta)}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

78

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{\ln n}}}{n}$.

79 — WP

Soient les suites u, v et w définies pour $n \geqslant 1$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ v_n = u_n - \ln n,\ w_n = u_n - \ln(n+1).$$
En étudiant les suites v et w, trouver un équivalent de u_n quand n augmente.

80 — MP

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$ et
$$u_{n+1} = 1 - \tfrac{1}{3} u_n^2.$$

81

Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor k\,a \rfloor$.

82 — MP

1. Prouver la convergence de la suite (u_n) où
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$$
et calculer sa limite ℓ.

2. Trouver un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Séries numériques

83

Étudier la nature des séries suivantes, dont on donne le terme général.

1. [CCP] $\dfrac{n!}{n^n}$; **2.** [CCP] $\dfrac{(2\,n)!}{(n!)^2\, 2^{4n}\,(2\,n+1)}$;

3. [CCP] $(-1)^n \dfrac{10^n}{n!}$; **4.** [ENS] $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

5. [AM] $\dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$; **6.** [CCP] $\ln \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$;

7. [CCP] $(-1)^n\, a_n$ et a_n,
où $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$;

84

Calculer les sommes suivantes.

1. [AM] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n$; **2.** [MP] $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$;

3. [ENSEA] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$;

4. [MP] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

5. [ENS] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1} - \frac{a}{2n}\right)$;

85 — ESM

1. Nature des séries de terme général $\dfrac{\ln n}{n}$ et $\dfrac{\ln n}{n^2}$.

2. Pour $n \geqslant 1$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

À l'aide d'intégrales, trouver un encadrement de S_n, puis un équivalent de S_n.

86 — CCP

Calculer la somme des séries
$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^2 - 1} \text{ et } \sum_{k\geqslant 1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}.$$

87 — CS

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } u_n = \ln(e^{s_n} - 1).$$

1. Énoncer et prouver le théorème spécial des séries alternées.

2. Prouver que les suites (s_n) et (u_n) convergent.

3. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.