Corrigés des exercices de la neuvième feuille

74 — MP

Considérons $f\ :\ x \mapsto 1 + x - \frac{1}{2}\,x^2$, de sorte que $u_{n+1} = f(u_n)$. Cherchons le(s) point(s) fixe(s) de f. La seule racine de l'équation $f(\ell) = \ell$ dans l'intervalle $]1,2[$ est $\ell = \sqrt{2}$.

Procédons par récurrence. Comme $u_0 \in\ ]1,2[$,

$$|u_0 - \sqrt{2}| < 1 = 2^{-0}.$$

De même, $u_1 \in\ ]1, \frac{3}{2}[$, donc

$$|u_1 - \sqrt{2}| < 2^{-1}.$$

Supposons que la proposition soit vraie au rang $n \geqslant 1$. Pour tout x dans $]1, \frac{3}{2}[$, on a $f'(x) < \frac{1}{2}$, donc pour tous x et y dans $]1, \frac{3}{2}[$,

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{1}{2}\,|x - y|,$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. Alors,

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - \sqrt{2}| &= |f(u_n) - f(\sqrt{2})| \\ &< \tfrac{1}{2}\,u_n - \sqrt{2} < 2^{-(n+1)}.\end{aligned}$$

Et la propriété est vraie à l'ordre $n+1$. Ainsi, elle est vraie par récurrence pour tout $n \geqslant 1$. Et comme elle est vraie au rang 0, elle est vraie pour tout n.

75

Voici deux approches, entre autres.

Récurrence double. On calcule sans peine que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 15\,u_{n+1} - 50\,u_n$ et $v_{n+2} = 15\,v_{n+1} - 50\,v_n$. Ainsi, (u_n) et (v_n) vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2. La fin ne pose pas de difficulté.

Matrices. En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, on voit que

$$U_{n+1} = A U_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. La fin ne pose toujours pas de difficulté.

76 — CS

1. (u_n) croît, (v_n) décroit et $u_n - v_n \to 0$: les suites sont adjacentes et ont donc une limite commune ℓ.

2. Supposons par l'absurde que $\ell = p/q$. On sait que $u_q < \ell < v_q$. En multipliant par $q\,q!$,

$$q\,q!\,u_q < p\,q! < q\,q!\,u_q + 1.$$

Or $qq!u_q = q\sum_{k=0}^{q} q!/k! = q\sum_{k=0}^{q}\prod_{j=k+1}^{q} j \in \mathbb{N}$. Alors l'entier $pq!$ est strictement entre deux entiers consécutifs : c'est impossible, donc $\ell \notin \mathbb{Q}$.

77

En s'inspirant de la trigonométrie, on calcule

$$\begin{aligned}
&I_{n+1} + I_{n-1} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos((n+1)\,\theta) + \cos((n-1)\,\theta)}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{2\cos\theta\cos(n\,\theta)}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{(5 + 4\cos\theta - 5)\cos(n\,\theta)}{2\,(5 + 4\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(n\,\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{5}{2}\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\,\theta)}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{5}{2}\,I_n.
\end{aligned}$$

Donc I_n est le terme général d'une suite récurrente d'ordre 2 que l'on résout sans difficulté :

$$I_n = -\frac{1}{3}\,(I_0 + 2\,I_1)\,(-2)^n - \frac{2}{3}\,(2\,I_0 + I_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Voici un moyen détourné de calculer I_0 et I_1. En intégrant par parties, pour $n \neq 0$, on a

$$I_n = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n\,\theta)\sin\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

donc $$|I_n| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il s'ensuit que le coefficient de $(-2)^n$ est nul, donc $I_1 = -\frac{1}{2}\,I_0$. Or

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{5 + 4\cos\theta - 5}{5 + 4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{5}{4}\,I_0$$

donc $I_0 = \frac{\pi}{3}$ et $I_1 = -\frac{\pi}{6}$. Ainsi,

$$I_n = \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

78

On a $e^{\sqrt{\ln n}}/n = e^{\sqrt{\ln n} - \ln n}$. Or $\sqrt{\ln n} \ll \ln n$ donc l'exposant tend vers $-\infty$ et l'exponentielle vers 0.

79 — WP

Pour $n \geqslant 2$,

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2},$$

donc $v_n - v_{n-1} < 0$ à partir d'un certain rang, et v décroit strictement à partir de ce rang. De même,

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2},$$

donc w croît strictement à partir d'un certain rang.

Comme $v_n - w_n = \ln(1 + 1/n)$ tend vers 0 quand n augmente, les suites v et w sont adjacentes : elles convergent, vers une même limite ℓ.

Alors, puisque $u_n = v_n + \ln n$ et que $v_n \sim \ell \ll \ln n$, $u_n \sim \ln n$.

80 — MP

Considérons la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{3}x^2$, de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f s'annule en $\pm\sqrt{3}$. Elle croît sur $\mathbb{R}_-$ et décroit sur $\mathbb{R}_+$. Alors, l'intervalle $I = [0, \sqrt{3}\,]$ est stable par f. Puisque f décroit sur I, l'idée est d'étudier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Malheureusement, l'étude est un peu longue. Voici une approche différente.

Comme polynôme, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur I. Pour tout $x \in I$,

$$|f'(x)| = \tfrac{2}{3}\,x \leqslant \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = M.$$

f est donc M-lipschitzienne sur I. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}|u_{n+1} - u_n| &= |f(u_n) - f(u_{n-1})|\\ &\leqslant M|u_n - u_{n-1}|.\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant M^n |u_1 - u_0|.$$

Comme $M > 1$, la suite (M^n) diverge vers $+\infty$ et l'on ne peut conclure.

Mais $u_1 = 1$, donc $J = f(I) = [0, 1]$, et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in J$. En outre, pour tout $x \in J$,

$$|f'(x)| \leqslant \tfrac{2}{3} = m.$$

Par le même raisonnement, f est m-lipschitzienne sur J et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant m^{n-1}|u_2 - u_1|.$$

Comme $m < 1$, la *série* géométrique $\sum m^n$ converge, donc aussi la série $\sum_{n\geqslant 1}|u_{n+1} - u_n|$. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge. Par équivalence suite-série, cela signifie que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, donc aussi (u_n).

Pour finir, puisque f est continue sur I et que la suite (u_n) converge, en nommant ℓ sa limite, $\ell = f(\ell)$. L'on trouve $\ell = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{21}\,)$.

En conclusion, la suite converge vers $\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{21}\,)$.

81

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $ka - 1 < \lfloor ka \rfloor \leqslant ka$, par définition. Or $\sum_{k=1}^{n} ka = \frac{1}{2}n(n+1)a$, donc

$$\frac{(n+1)}{2n}a - \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor ka \rfloor \leqslant \frac{(n+1)}{2n}a.$$

Les deux extrêmes tendent vers $a/2$, donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor ka \rfloor = \frac{a}{2}.$$

82 — MP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1 + k^2/n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/(1+x^2)$ est continue, donc d'après les sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

2. Pour comparer deux objets, il est bon qu'ils aient même forme. Écrivons donc

$$\begin{aligned}u_n - \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Là, on imagine que $f(\frac{k}{n}) - f(t)$ est proche de $(\frac{k}{n} - t)\,f'(\frac{k}{n})$ et donc que $u_n - \frac{\pi}{4}$ est proche de

$$\begin{aligned}v_n &= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(\frac{k}{n} - t\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} - t\right)^2\right]_{(k-1)/n}^{k/n}\\ &= \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

Comme f' est continue sur $[0,1]$, toujours d'après les sommes de Riemann,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $v_n \sim -\dfrac{1}{4n}$ et surement $u_n - \dfrac{\pi}{4} \sim -\dfrac{1}{4n}$ aussi.

Prouvons-le. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$,

$$\begin{aligned}&\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \sup\nolimits_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}|f''|\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \|f''\|_\infty^{[0,1]}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\left|u_n - \frac{\pi}{4} - v_n\right|\\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) - \left(\frac{k}{n} - t\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) - \left(\frac{k}{n} - t\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \|f''\|_\infty^{[0,1]}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2\mathrm{d}t\\ &= \|f''\|_\infty^{[0,1]}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = \frac{\|f''\|_\infty^{[0,1]}}{6n^2}.\end{aligned}$$

Comme $v_n \sim -\dfrac{1}{4n}$, $\dfrac{1}{n^2} \ll |v_n|$. Donc $u_n - \dfrac{\pi}{4} - v_n \ll v_n$ et $u_n - \dfrac{\pi}{4} \sim v_n \sim -\dfrac{1}{4n}$.

83

Avec le manque d'imagination usuel, nommons tous ces termes u_n, sauf les derniers.

1. Pour la première, voici deux méthodes.

Règle de d'Alembert. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Équivalent. D'une part, $u_n > 0$. D'autre part, d'après la formule de Stirling, quand n est au voisinage de $+\infty$,

$$u_n \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} = \underbrace{\sqrt{2\pi n}\, e^{-n/2}}_{\to 0}\, e^{-n/2} \ll e^{-n/2}.$$

Or $\sum e^{-n/2}$ converge comme série géométrique de raison $e^{-1/2} \in \,]0,1[$, donc les séries $\sum \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}$ et $\sum u_n$ convergent.

2. Appliquons la règle de d'Alembert : pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \frac{(2n+2)!\,(n!)^2\, 2^{4n}\,(2n+1)}{((n+1)!)^2\, 2^{4n+4}\,(2n+3)\,(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n+1)}{(n+1)^2\, 2^4\,(2n+3)}\\ &\sim \frac{2^3\, n^3}{2^5\, n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1,\end{aligned}$$

donc $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{10}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi n \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)\\ &= \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\ &= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= (-1)^n \frac{\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

La série $\sum(-1)^n/n$ converge grâce au critère spécial des séries alternées, et la série $\sum \mathrm{O}(1/n^3)$ converge absolument car c'est le cas de $\sum 1/n^3$. Alors la série $\sum u_n$ converge.

5. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n\,(1+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

La série $\sum(-1)^n/n$ converge grâce au critère spécial des séries alternées et $\sum \mathrm{O}(1/n^2)$ converge absolument car $2 > 1$. Ainsi, la série de départ converge.

6. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).\end{aligned}$$

D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ converge. La série $\sum 1/n^{3/2}$ converge, donc la série $\sum \mathrm{O}(1/n^{3/2})$ converge absolument. Mais la série harmonique $\sum 1/n$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

7. Considérons la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, de sorte que $a_{n+1} = f(a_n)$. Comme $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, la suite (a_n) est bien définie. De plus, pour $x > 0$, $f(x) < x$, donc $a_{n+1} < a_n$ et la suite (a_n) décroit. Comme elle est positive, il s'ensuit qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. Par continuité de f, à la limite on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell = 0$. Comme (a_n) tend vers 0 en décroissant, d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.

Comme (a_n) tend vers 0, on a

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + \mathrm{o}(a_n^2),$$

donc
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2}a_n + \mathrm{o}(a_n)$$

et
$$\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim -\frac{1}{2}a_n.$$

Mais $\lim a_n = 0$ donc $\lim \ln a_n = -\infty$. Or la suite $(\ln a_n)$ est de même nature que la série de terme général

$$\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

donc la série $\sum a_n$ diverge.

84

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} r^k \cos k = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} r^k e^{ik}\right).$$

On reconnait les sommes partielles de la série géométrique $\sum(r\,e^i)^n$, laquelle converge si et seulement si $|r\,e^i| < 1$, c'est-à-dire si $|r| < 1$. Alors, $\sum r^n \cos n$ converge si et seulement si $|r| < 1$. Dans ce cas, en passant à la limite ci-dessus,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{in}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{r\,e^i}{1-r\,e^i}\right)\\ &= \frac{r\cos 1 - r^2}{1 - 2r\cos 1 + r^2}.\end{aligned}$$

2. La série est clairement redevable du critère des séries alternées donc elle converge. Évaluons ses sommes partielles. Constatons que pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$\frac{1}{3n+1} = \int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t,$$

donc pour un entier $N \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1} &= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{3n}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{3n}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t^3)^{N+1}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \frac{t^{3N+3}}{1+t^3}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{3N+3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3N+4} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

donc, à la limite sur N,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$

Pour finir, calculons l'intégrale avec le module de calcul symbolique `sympy` de python :

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x')
>>> integrate( 1/(1 + x**3), (x, 0, 1) )
log(2)/3 + sqrt(3)*pi/9
```

Commentaire. Il n'est pas certain que l'on doive calculer explicitement l'intégrale le jour de l'oral, donc je l'ai fait ici avec `sympy`. À la main, c'est plus long...

3. Notons u_n le terme général : $u_n \sim 1/n^3$. Or $\sum 1/n^3$ converge car $3 > 1$, donc $\sum u_n$ converge.

Décomposons u_n en éléments simples :

$$u_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Malheureusement, on ne peut pas séparer la somme de la série, car les séries auxquelles on pense divergent. Mais, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

4. La suite $(\ln(1+1/n))$ tend vers 0 en décroissant donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série converge.

Pour avoir la somme, il suffit d'évaluer les sommes partielles d'indices pairs (ou impairs). Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2n} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \left[-\ln\left(1+\frac{1}{2p-1}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)\right] \\ &= \sum_{p=1}^{n} \ln \frac{(2p-1)(2p+1)}{(2p)^2} \\ &= \ln \frac{(2n+1)\prod_{p=1}^{n}(2p-1)^2}{\prod_{p=1}^{n}(2p)^2} \\ &= \ln \frac{(2n+1)((2n)!)^2}{(2^n n!)^4} \\ &\sim \ln \frac{2n\big[\sqrt{2\pi 2n}(2n/e)^{2n}\big]^2}{\big[2^n\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\big]^4} = \ln\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{2}{\pi}$.

5. Le terme général u_n garde manifestement un signe constant ; si $a \neq 1$, $u_n \sim (1-a)/(2n)$, donc $\sum u_n$ diverge ; si $a = 1$, $u_n \sim 1/(4n^2)$, donc $\sum u_n$ converge.

On ne peut pas séparer la somme de la série en une somme de plusieurs séries, car celles auxquelles on pense divergent. Alors, essayons d'évaluer les sommes partielles. Soit N un entier. On a

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N} u_n \\ &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-3} + \frac{1}{6n-1}\right) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{p=0}^{3N-1} \frac{1}{2p+1} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2p} \\ &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \sum_{n=N+1}^{3N-1} \frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

Comme vu en cours, quand N tend vers $+\infty$, la première somme tend vers

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Notons S_N la seconde somme. Pour l'évaluer, utilisons une comparaison avec des intégrales. Comme la fonction $t \mapsto 1/(2t+1)$ décroit sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1}$$

donc, en additionnant membre à membre,

$$\begin{aligned}&\int_{N+1}^{3N} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{3N-1} \frac{1}{2n+1} \leqslant \int_{N}^{3N-1} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} \\ \iff\ & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6N+1}{2N+3}\right) \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6N-1}{2N+1}\right).\end{aligned}$$

Alors, $\lim S_N = \frac{1}{2}\ln 3$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3.$$

85 — ESM

1. D'une part, $\ln n/n \gg 1/n$ et $\sum 1/n$ diverge donc $\sum \ln n/n$ diverge.

D'autre part, $\ln n/n^2 \ll 1/n^{3/2}$ et $\sum 1/n^{3/2}$ converge donc $\sum \ln n/n^2$ converge.

2. La fonction $t \mapsto \ln t/t$ décroit sur $[e, +\infty[$. Alors, pour tout entier $k \geqslant 3$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

et en ajoutant membre à membre, pour tout $n \geqslant 3$,

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \int_2^{n} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_2^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\ln^2 n - \tfrac{1}{2}\ln^2 2 \sim \tfrac{1}{2}\ln^2 n$

et $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\ln^2(n+1) - \tfrac{1}{2}\ln^2 3 \sim \tfrac{1}{2}\ln^2 n.$

Alors $S_n \sim \frac{1}{2}\ln^2 n$.

86 — CCP

PREMIÈRE SOMME. Tout d'abord, $1/(k^2-1) \sim 1/k^2$ et la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge car $2 > 1$, donc $\sum 1/(k^2-1)$ converge. Pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$.

SECONDE SOMME. Notons u_k le terme général de la seconde série. Comme les u_k sont positifs, la suite (S_n) des sommes partielles croît. Alors cette suite converge si et seulement si elle admet une suite extraite qui converge.

Examinons le terme général de la série. Soit un entier $k \geqslant 1$. Il existe un unique entier $p \geqslant 2$ tel que $(p-1)^2 \leqslant k < p^2$, donc $p-1 \leqslant \sqrt{k} < p$ et $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = p-1$.

Si $(p-1)^2 \leqslant k < p^2-1$, alors $(p-1)^2 \leqslant k+1 < p^2$, donc $p-1 \leqslant \sqrt{k+1} < p$ et $\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor = p-1$. Alors, $u_k = 0$. Mais si $k = p^2-1$, $k+1 = p^2$ donc $\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor = p$ et $u_k = 1/(p^2-1)$.

Soit un entier $P \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}S_{P^2-1} &= \sum_{k=1}^{P^2-1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}\\ &= \sum_{p=2}^{P} \frac{1}{p^2-1} \xrightarrow[P\to+\infty]{} \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Alors, la suite extraite $(S_{P^2-1})_{P\in\mathbb{N}}$ de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc (S_n) converge. Ainsi, la seconde série converge et a pour somme

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k} = \frac{3}{4}.$$

87 — CS

1. Voir le cours :-)

2. La suite $(1/k)$ converge vers 0 en décroissant, donc d'après le critère spécial des séries alternées susnommé, la série alternée $\sum(-1)^{k+1}/k$ converge, c'est-à-dire que la suite (s_n) de ses sommes partielles converge.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \underbrace{(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{r_n}.\end{aligned}$$

En outre,

$$|r_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Alors, par continuité de l'exponentielle et du logarithme en $\ln 2$ et 1 respectivement, la suite (u_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(e^{\ln 2} - 1) = 0.$$

3. Avec les notations précédentes, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}u_n &= \ln(e^{\ln 2 + r_n} - 1) = \ln(2\,e^{r_n} - 1)\\ &= \ln[2\,(1 + r_n + \mathrm{O}(r_n^2)) - 1]\\ &= \ln(1 + 2\,r_n + \mathrm{O}(r_n^2))\\ &= 2\,r_n + \mathrm{O}(r_n^2).\end{aligned}$$

D'une part, d'après la question précédente, $r_n = \mathrm{O}(1/n)$ donc $\mathrm{O}(r_n^2) = \mathrm{O}(1/n^2)$. Or $\sum 1/n^2$ converge, donc $\sum \mathrm{O}(r_n^2)$ converge absolument.

D'autre part, on l'a vu, la suite $(|r_n|)$ converge vers 0. Et elle décroit car pour tout $t \in [0,1]$, $t^{n+1} \leqslant t^n$ donc

$$|r^{n+1}| = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = |r_n|.$$

Ainsi, toujours d'après le critère spécial des séries alternées, la série alternée $\sum r_n$ converge.

Finalement, par opérations usuelles sur les séries convergentes, $\sum u_n$ converge.