

Partie I - Latitude de mise au point d'un microscope

Un microscope est schématisé par deux lentilles minces convergentes de même axe optique :

L_1 (objectif) de centre O_1 et de distance focale image $f'_1 = 5 \text{ mm}$,

L_2 (oculaire) de centre O_2 et de distance focale image $f'_2 = 25 \text{ mm}$.

On note F'_1 et F'_2 respectivement les foyers image de L_1 et objet de L_2 . On donne l'intervalle optique $\Delta = \overline{F'_1 F'_2} = 25 \text{ cm}$ (axe optique orienté de O_1 vers O_2).

I.A -

L'œil placé au foyer image de l'oculaire, étudie un petit objet AB disposé dans un plan de front (AB perpendiculaire à l'axe optique, A situé sur l'axe optique).

I.A.1) Où doit être situé A pour que l'œil n'ait pas à accommoder ? Répondre en donnant l'expression littérale et la valeur numérique de $\overline{F_1 A}$. On précise que sans accommoder (i.e. sans fatigue) l'œil « normal » vise à l'infini.

I.A.2) On se place dans les conditions de la question précédente. Sur une figure où l'on ne cherchera pas à respecter les ordres de grandeur de f'_1 , f'_2 , Δ mais où on tiendra seulement compte de la relation d'ordre : $f'_1 < f'_2 < \Delta$, représenter la marche d'un faisceau lumineux issu de B .

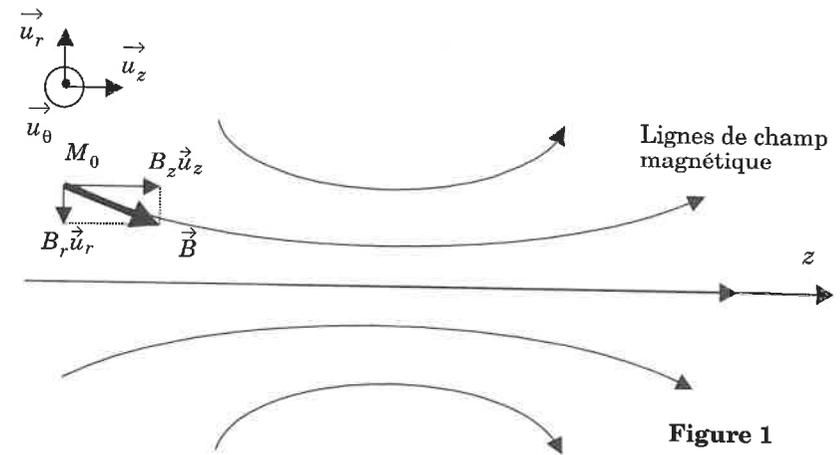
I.A.3) Soient α' l'angle algébrique sous lequel l'œil voit l'image définitive de AB à travers le microscope et α l'angle algébrique sous lequel il apercevrait l'objet sans se déplacer en l'absence de microscope. Calculer le grossissement $G = \alpha'/\alpha$ (littéralement puis numériquement). Interpréter le signe de ce rapport.

I.B -

En accommodant, l'œil peut observer nettement un objet situé entre 25 cm et l'infini. De combien peut-on modifier la distance entre l'objectif et l'objet si l'on veut toujours pouvoir observer nettement l'objet AB à travers le microscope (latitude de mise au point) ? Commenter.

Partie II - Lentille magnétique

Dans une région finie de l'espace vide règne un champ magnétique permanent présentant une symétrie axiale autour de l'axe des z (Figure 1).



II.A -

Nous cherchons à déterminer ici de façon qualitative les principales conséquences d'une telle structure sur un faisceau électronique paraxial (trajectoires proches de l'axe et peu inclinées par rapport à l'axe).

Considérons pour fixer les idées un électron initialement en M_0 avec une vitesse parallèle à \vec{u}_z . Comment est dirigée la force initiale ?

En déduire une conséquence sur le début de modification de mouvement de l'électron et constater l'apparition de nouvelles composantes de la force. Montrer que s'amorce une action focalisante (radialement vers l'axe Oz), accompagnant une rotation autour de Oz , sur le faisceau électronique paraxial.

Nous allons traiter la suite du problème de façon quantitative mais en conservant une certaine généralité. Nous écrivons le champ magnétique sous la forme : $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{u}_r + B_z(r, z)\vec{u}_z$. S'intéressant aux électrons de charge $q = -e$ et de masse m d'un faisceau paraxial, on ne considérera que des distances r à l'axe Oz très faibles. D'autre part, on négligera le poids devant la force magnétique.

II.B -

Rappeler la propriété générale du flux magnétique et la mettre en œuvre en considérant un cylindre d'axe Oz et de faible rayon r , situé entre les abscisses z et $z + dz$, pour établir la relation :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) (0, z) \quad (\text{calcul au 1}^{\text{er}} \text{ ordre en } r).$$

II.C -

II.C.1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique (RFD) à l'aide des coordonnées cylindriques (en projection sur \vec{u}_r , \vec{u}_θ , \vec{u}_z).

II.C.2) Montrer que la projection sur \vec{u}_θ conduit à

$$r^2 \dot{\theta} - \frac{e}{2m} r^2 B_z(0, z) = K \quad (\text{constante})$$

II.D -

On adopte la modélisation suivante.

La particule ($q = -e$) est issue d'un point A sur l'axe Oz (de symétrie de révolution du champ) à grande distance de la zone où règne \vec{B} , avec une vitesse \vec{v}_0 .

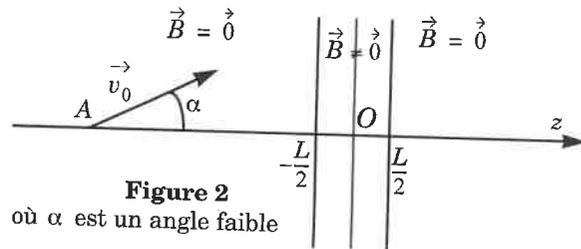


Figure 2 où α est un angle faible

Quelle est la nature de la trajectoire dans chaque zone où $\vec{B} = \vec{0}$?

II.E -

L'étude préliminaire du II.A nous permet de prévoir que le plan de la trajectoire de sortie a tourné d'un angle $\Delta\theta$ autour de Oz à partir du plan de la trajectoire d'entrée. Nous cherchons ici à déterminer $\Delta\theta$.

II.E.1) Dans le modèle décrit au II.D, montrer que la constante K est nulle. En déduire $\dot{\theta}$ à l'aide de $e, m, B_z(0, z)$.

II.E.2) Utiliser alors la projection sur \vec{u}_z de la RFD pour relier \ddot{z} à $e, m, r, B_z(0, z), \left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)(0, z)$.

Quel est l'ordre de \ddot{z} en r ? En déduire que, dans le cadre d'un calcul au 1^{er} ordre en r , \dot{z} est une constante à relier à v_0 et α . L'angle α étant faible on admettra pour la suite que $\dot{z} \approx v_0$.

II.E.3) La notion de trajectoire nous amène à considérer que θ et r sont des fonctions de z et la notion de mouvement fait que z dépend de t . En déduire $d\theta/dz$ à l'aide de e, m, v_0 et $B_z(0, z)$, puis $\Delta\theta$ à l'aide de e, m, v_0 et

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B_z(0, z) dz$$

II.F -

II.F.1) En reportant l'expression de $\dot{\theta}$ vue au II.E.1 dans la projection sur \vec{u}_r de la RFD, relier \ddot{r} à $e, m, r, B_z(0, z)$.

II.F.2) Remplacer \ddot{r} à l'aide de v_0 et de $\frac{d^2 r}{dz^2}$. En déduire le lien entre $\frac{d^2 r}{dz^2}, v_0, e, m, r, B_z(0, z)$.

II.G - Considérons la trajectoire d'entrée issue de A , comme précisée dans la question II.D, et la trajectoire de sortie correspondante en notant A' le point où cette dernière coupe l'axe Oz . Voir la figure ci-contre où l'on a

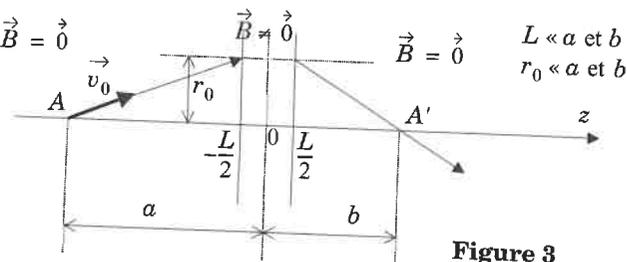


Figure 3

représenté, pour simplifier, la projection de la trajectoire de sortie sur le plan de la trajectoire d'entrée. La zone d'action du champ \vec{B} est si étroite que $L \ll a$ et b , et que l'on pourra confondre les distances à l'axe (notées r_0) à l'entrée et à la sortie de cette zone (lentille mince magnétique).

II.G.1) En déduire $\left(\frac{dr}{dz}\right)_A$ et $\left(\frac{dr}{dz}\right)_{A'}$ à l'aide de r_0, a, b .

II.G.2)

a) Intégrer l'équation du II.F.2 de $z = -a$ (point A) à $z = b$ (point A').

b) Simplifier le résultat en considérant que $r \approx r_0$ pour $z \in \left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$.

II.G.3)

a) En déduire l'expression de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ à l'aide de e, m, v_0 et $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B_z^2(0, z) dz$.

b) Montrer que toute particule passant par A , passe ensuite par A' . Conclusion ?

II.G.4) Définir et calculer une distance focale image f' . Quel est son signe ? Commenter.

II.H - Cas particulier et application numérique.

On suppose $B_z(0, z)$ uniforme : $B_z(0, z) = B_{z0} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

On donne : $L = 5 \text{ mm}$, $v_0 = 3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

II.H.1)

a) Utiliser le II.F.2 pour obtenir l'équation $r = f(z)$ de la trajectoire entre $-(L/2)$ et $+(L/2)$, sans préciser les constantes d'intégration.

b) Quelle est la forme de la projection de la trajectoire sur un plan méridien ($\theta = \text{constante}$) ?

II.H.2)

a) Énoncer un critère validant l'hypothèse du II.G : r très peu modifié dans la zone d'action de \vec{B} .

b) Montrer que ce critère est respecté si $L = 5 \text{ mm}$.

II.H.3) Donner la valeur numérique de f' .