

DEVOIR DE REVISIONS N°1 : Mécanique du point

Calculatrices autorisées

Trajectoires des satellites du système GPS E3A PC 2020

Le principe du positionnement par GPS (Global Positioning System ou Géopositionnement Par Satellite) repose sur la mesure de la durée de transit d'un signal transmis par une onde électromagnétique (OEM) entre des satellites dont la position est exactement connue à tout instant, dénommés NAVSTAR (NAVigation Satellite Timing And Ranging) et un récepteur. Cette durée est ensuite simplement convertie en distance puisqu'on connaît très précisément la célérité d'une OEM. Pour une précision optimale, un récepteur sur Terre doit « voir » au minimum quatre satellites simultanément.

Le système fut mis en place par le département de la Défense des États-Unis à partir de 1973, à l'origine, uniquement à des fins militaires. Avec ses vingt-quatre satellites, il est devenu totalement opérationnel en 1995. Le 2 mai 2000, le président étatsunien Bill Clinton confirme l'intérêt de la technologie à des fins civiles et autorise une diffusion non restreinte des signaux GPS, permettant une précision de l'ordre d'une dizaine de mètres et une démocratisation de la technologie au grand public à partir du milieu des années 2000. De nos jours les récepteurs GPS se sont banalisés et ont envahi notre environnement quotidien (automobile, smartphones, montre connectée, etc).

Le système comprend vingt-quatre satellites placés sur des orbites pratiquement circulaires d'altitudes voisines de $2,00 \times 10^4$ km (voir figure 1). Les satellites sont placés sur six orbites dont le plan est incliné de 55° par rapport au plan de l'équateur. Ces orbites sont décalées en longitude de 60° . Sur chaque orbite, il y a quatre satellites. On notera pour information que les satellites ne sont pas régulièrement espacés sur leur orbite. Leur répartition a été choisie pour optimiser le nombre de satellites visibles en chaque point de la Terre à un instant « t ». Les zones les plus défavorisées sont voisines des pôles. Sur la photo de la figure 2 prise lors de la phase finale d'assemblage, on peut se faire une idée des dimensions d'un satellite NAVSTAR munis de ses panneaux solaires en le comparant à la personne située à ses côtés.

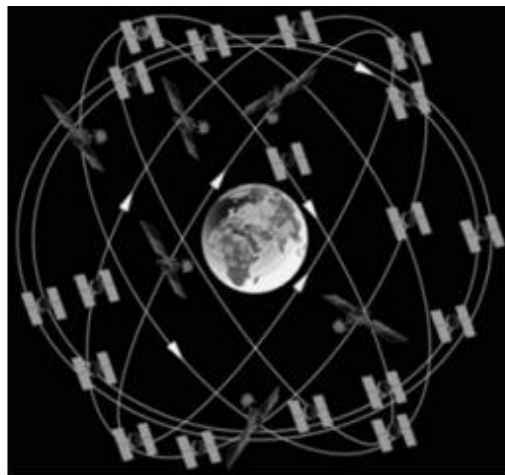


FIGURE 1 – Constellation satellite GPS

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>.

Vu sur le site <https://www.maanmittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

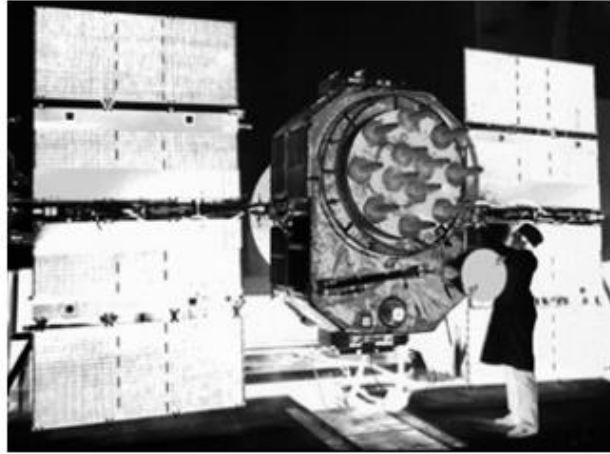


FIGURE 2 – Satellite NAVSTAR

Public domain, <http://www.gps.gov/multimedia/images/constellation.gif>.

Vu sur le site <https://www.maanmittauslaitos.fi/en/research/interesting-topics/satellite-based-positioning-systems>

Dans tout le problème, le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Constante de gravitation universelle : $G = 6,67430 \times 10^{-11}$ USI
 Masse de la Terre : $M_T = 5,9722 \times 10^{24}$ kg
 Rayon terrestre : $R_T = 6,371 \times 10^3$ km

On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M, $r > R_T$.

1. En ne prenant en compte que l'unique force d'attraction exercée par la terre sur le satellite, montrer que :

- a) sa trajectoire est plane ;
- b) son énergie mécanique notée E_m est conservée ;
- c) et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m , M_T , G et de la constante des aires C. L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini ;

d) $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ où T est la période révolution du satellite et a le demi-grand axe de l'ellipse. On se placera dans le cas du mouvement circulaire et on montrera qu'on obtient une expression identique en remplaçant a par r_0 le rayon de la trajectoire. Quel est le nom de cette loi ?

2. Soit la fonction $E_{\text{eff}}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$. Tracer son allure puis prouver qu'elle passe par un minimum noté r_0 . Exprimer r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique ainsi que l'ordre de grandeur de sa valeur numérique pour un satellite NAVSTAR placé sur son orbite de travail. Comment est habituellement dénommée cette fonction $E_{\text{eff}}(r)$?

3. Calculer la période de révolution du satellite sur son orbite de travail. Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min 4 s.

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 4) :

Phase 1 : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où

$$h_1 = 1,50 \times 10^3 \text{ km.}$$

Phase 2 : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.

Phase 3 : une seconde impulsion permet d'atteindre l'orbite finale supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2 .

4. Exprimer l'énergie mécanique Em_1 d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800 \text{ kg}$ sur son orbite basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3 \text{ km}$. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

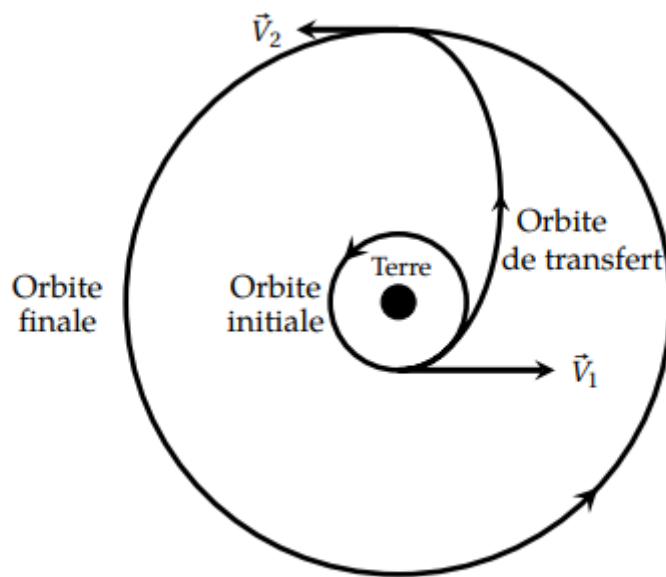


FIGURE 4 – Orbites circulaires et orbite de transfert

5. Comparer Em_1 à $Em_0 = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude λ . Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,6 \times 10^7 \text{ J}$ et $\beta = 5,006 \times 10^{10} \text{ J}$. Quelle est la valeur optimale pour λ ? Faire l'application numérique pour cette valeur optimale. Conclure.

6. À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon r , on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon r la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique Em_{12} sur l'orbite de transfert.

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

7. En déduire la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'application numérique.

8. Quelle est la durée du transfert ?

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

8. Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée digne d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver de manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.

10. Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS ?
Expliciter votre réponse.