PSI
2023/2024

vendredi, 10 novembre 2023

Devoirs surveillé n° 2
14h00 – 18h00 4 heures

Calculatrices NON autorisées

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Toutes les interprétations seront comptabilisées
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 4 problèmes indépendants.

* * *

1^er^ problème : gonflage d'un gilet de sauvetage

On étudie le modèle à " gonflage automatique hydrostatique " d'un gilet de sauvetage : lors de l'immersion, la pression de l'eau agit sur une membrane qui libère le percuteur d'une cartouche de gaz sous haute pression. Le gaz se détend, assurant ainsi un gonflage immédiat de la vessie (enveloppe étanche) du gilet.

Le modèle de gilet étudié a un volume de 15L pour lequel une cartouche d'une contenance de 33 g de dioxyde de carbone, CO_2, est préconisée.

Le volume utile de la cartouche de CO_2 est de 15 mL

Données			
Atome	Numéro atomique	Nombre de masse	Masse molaire ($g \cdot mol^{-1}$)
C	6	12	12
O	8	16	16
Constante des gaz parfaits : $R = 8,3\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ Pression atmosphérique : $Patm = 1,0$ bar Masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$			

Capacité thermique massique à pression constante de $CO_{2(g)}$: $c_P = 1,0\ kJ.kg^{-1}$

Chaque fois que c'est nécessaire, on suppose que le CO_2(g) se comporte comme un gaz parfait.

On fournit en figure 3 le diagramme de phase dans le plan (Pression, Température) pour le CO_2, ou courbe d'équilibre liquide-vapeur. (1) et (2) sont des domaines, (3) et (4) sont des transformations et (5) est un point particulier.

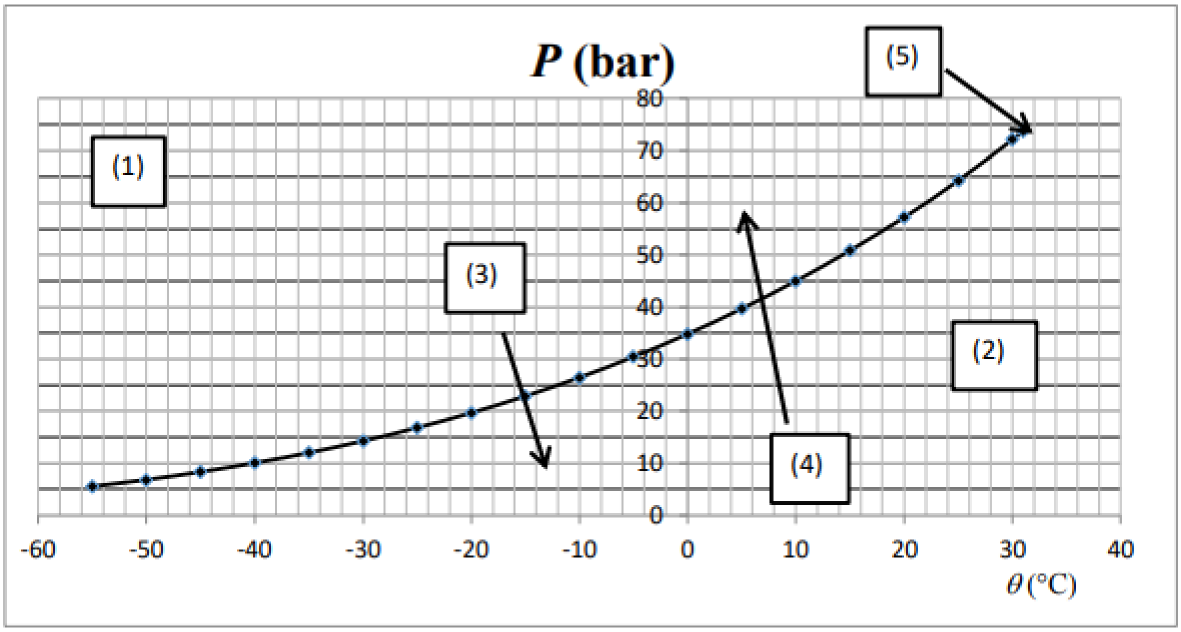

Figure 3 - Courbe d'équilibre liquide - vapeur pour CO_2

θ (°C)	P (bars)	v' volume massique du liquide saturant (m^3/kg)	v'' volume massique de la vapeur saturante (m^3/kg)	h' enthalpie massique du liquide saturant (kJ/kg)	h'' enthalpie massique de la vapeur saturante (kJ/kg)
10	45,06	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$7,52 \cdot 10^{-3}$	27,2	228,6
15	50,93	$1,22 \cdot 10^{-3}$	$6,32 \cdot 10^{-3}$	42,3	222,6
20	57,33	$1,30 \cdot 10^{-3}$	$5,27 \cdot 10^{-3}$	58,6	213,9
25	64,32	$1,41 \cdot 10^{-3}$	$4,17 \cdot 10^{-3}$	78,7	198,2
30	71,92	$1,68 \cdot 10^{-3}$	$2,98 \cdot 10^{-3}$	108,5	171,5
31,1	73,76	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$2,16 \cdot 10^{-3}$	139,8	139,8

Tableau 1 - Table de caractéristiques de CO_2 pour l'équilibre liquide-vapeur

Q1. Donner les 5 noms manquants de la figure 3.

Q2. En respectant au mieux les échelles**,** tracer les isothermes 25° C et 30°C sur le diagramme (p,v), représentant la pression en fonction du volume massique du CO_2. On notera les valeurs numériques remarquables, ainsi que celles qui correspondent au point 5 de la figure 3. Tracer l'allure de la courbe de saturation et annoter les différentes parties de ce diagramme.

Q3. Quelle quantité de matière de CO_2 trouve-t-on dans les cartouches préconisées pour le gonflage du gilet ?

Q4. Quelle serait la pression à l'intérieur de la cartouche si tout le CO_2 à la température T = 300 K se trouvait à l'état gazeux (hypothèse gaz parfait) ? Conclure éventuellement quant à l'état physique correspondant.

Q5. En calculant le volume massique du fluide dans la cartouche, justifier l'état physique dans lequel se trouve le CO_2. Placer le point I correspondant sur le diagramme précédent.

Q6. La cartouche est percutée à 25°C. Dans quel état physique se trouve le CO_2 à l'état final ? Evaluer le transfert thermique au cours de cette transformation. En précisant les hypothèses faites, déterminer la variation de température subie par le CO_2 et conclure.

On suppose que le volume du gilet, initialement vide, est occupé uniquement par du dioxyde de carbone CO_2 gazeux, obtenu après ouverture de la cartouche. On suppose la température du gaz T = 300 K (θ = 27 °C). On considère que le gonflage est correct dès que la pression à l'intérieur du gilet dépasse la pression atmosphérique.

Q7. Montrer que la pression à l'intérieur du gilet permet un gonflage correct du gilet. Déterminer un ordre de grandeur du volume massique du CO_2 dans le gilet.
Sur le diagramme (p,v), placer le point F représentant l'état précédent. On ne respectera pas les échelles.

On a supposé ici une détente isotherme du CO_2 lorsque la cartouche est percutée, mais cette détente est en réalité très rapide, si bien que la transformation peut plutôt s'apparenter à une détente adiabatique (1) suivie d'une évolution isochore (2).

Q8. On suppose ici, un état initial où CO_2 est sous forme vapeur saturante. Placer ce point I' sur le diagramme précédent. Représenter la transformation I'F, succession des 2 transformations (1) et (2) précédentes pour la phase gazeuse.

2è problème : Synthèse de l'ammoniac

On considère la synthèse de l'ammoniac $NH_{3(g)}$ dans le procédé Haber-Bosch selon la réaction :

$$3\ H_2(g) + N_2(g) = 2\ NH_3(g) \qquad (1)$$

La réaction est réalisée à 450°C.
À 450°C, l'enthalpie standard $\Delta_r H_1°$de la réaction (1) vaut $-114{,}7\ kJ\cdot mol^{-1}$; son entropie standard de réaction $\Delta_r S_1°$vaut $-245{,}9\ J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}$.

Q 9. Commenter ces deux valeurs numériques.

Q10. Exprimer la constante d'équilibre K_1 de la réaction (1) à la température T en fonction de $\Delta_r H_1°$et $\Delta_r S_1°$à la même température.

À 450°C, l'application numérique conduit à $K_1 = 3\cdot 10^{-5}$. Le diazote et le dihydrogène sont introduits en proportions stœchiométriques dans le réacteur qui est maintenu, tout au long de la synthèse, à une pression totale P de 300 bars et à une température de 450°C. Le mélange initial contient exclusivement du diazote et du dihydrogène.
On définit le rendement r de la synthèse comme le rapport entre la quantité de matière d'ammoniac obtenue à l'équilibre et la quantité de matière d'ammoniac que l'on obtiendrait si la réaction était totale.

Q11. Exprimer K_1 en fonction de r, P et p° = 1 bar.

Q12. Quel est l'effet d'une augmentation de la pression totale à température constante sur le rendement de la synthèse ? Commenter le choix de la valeur 300 bars pour la pression totale de la synthèse industrielle.

Q13. Quel est l'effet d'une augmentation modérée de la température à pression constante sur le rendement de la synthèse ?

Q14. En quoi aurait-il été préférable de se placer à 25°C ? Quelle peut être la raison du choix de 450°C ? Quel est le rôle d'un catalyseur ?

3è problème : Hydratation d'un cycliste

Données :

Enthalpies standards de formation :
$\Delta_f H°(CO_2(g)) = -393{,}5\ kJ \cdot mol^{-1}$
$\Delta_f H°(H_{2O}(l)) = -285{,}8\ kJ \cdot mol^{-1}$
$\Delta_f H°(C_6H_{12}O_6\ (s)) = -1\ 274\ kJ \cdot mol^{-1}$

Masses molaires :
$M(H) = 1\ g \cdot mol^{-1}$
$M(C) = 12\ g \cdot mol^{-1}$
$M(O) = 16\ g \cdot mol^{-1}$

L'hydratation est une règle d'or du cycliste. 1 % de perte de poids en eau fait chuter les performances sportives de près de 10 %. D'où l'importance de s'hydrater, surtout lorsque les températures grimpent au-dessus de 25 °C.
Avant l'effort, il est recommandé de boire des boissons minéralisées. Ensuite pendant l'effort, il s'agit plutôt de boissons minéralisées et sucrées. En effet, le sucre permet d'apporter de l'énergie aux muscles tandis que les minéraux vont compenser les pertes liées à la sudation.

Apport en eau, thermorégulation du cycliste

On se propose ici d'évaluer le volume d'eau que doit boire un cycliste pour maintenir la température de son corps à Tc = 37 °C lors d'une sortie estivale d'une durée Δt = 4 h, effectuée par une température extérieure Ta = 30 °C. Pour que la température du corps reste stationnaire, il faut que la puissance thermique interne, notée Pint, générée par le métabolisme du cycliste soit entièrement évacuée. Cette puissance traverse d'abord la couche dermique, puis les vêtements du cycliste de résistance thermique globale Rd. À la surface des vêtements, on observe deux modes de transferts thermiques principaux :
- un échange conducto-convectif entre le cycliste et l'air décrit par la loi de Newton :

$$Pcc = hS\ (Ts - Ta)$$

où Ts est la température de surface des vêtements du cycliste, Ta la température de l'air, h un coefficient d'échange, S la surface du cycliste et Pcc la puissance transférée à l'air ;
- un transfert thermique conduisant à la vaporisation de l'eau issue de la sudation.

On donne : Pint = 400 W, S = 2 m^2, Rd = $3 \cdot 10^{-2}\ W \cdot K^{-1}$, h = $36\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$ et l'enthalpie de vaporisation de l'eau à la température considérée lvap = $2{,}4 \cdot 10^3\ kJ \cdot kg^{-1}$.

Ce problème thermique peut être modélisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure 1. On ne se souciera pas de la façon dont se rebouclent les courants.

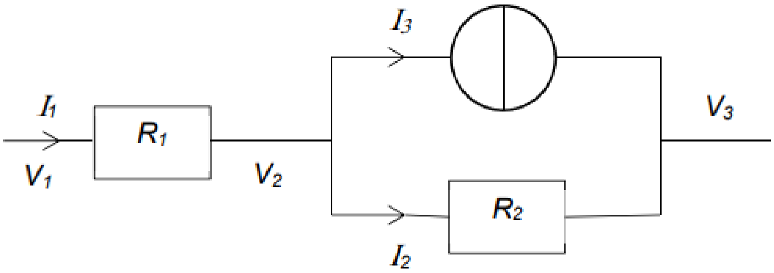

Figure 1 - Schéma électrique équivalent

Q15. À quelles grandeurs thermodynamiques correspondent les grandeurs électriques : I_1, I_2, I_3, R_1, V_1, V_2 et V_3 ?
Préciser l'expression de R_2 en fonction de grandeurs définies dans la présentation de ce problème.

Q16. Évaluer la température Ts en °C.

Q17. Déterminer l'expression de I_3 en fonction de I_1, h, S, V_2 et de V_3. Puis, exprimer la masse d'eau, notée m_{eau}, consommée pendant cette sortie en fonction de Δt, I_3 et de lvap, puis en donner une valeur numérique avec un chiffre significatif.

Apport en glucose, besoin énergétique du cycliste

Les boissons dites isotoniques ont une composition particulière destinée à compléter les besoins des sportifs durant l'effort. Elles sont riches en sodium pour compenser les pertes par sudation et en glucose ($C_6H_{12}O_6(s)$). Contrairement au saccharose et au fructose, ce sucre est immédiatement utilisable par l'organisme et permet aux muscles de fonctionner.

Combustion et consommation du glucose

Q18. Écrire la réaction de combustion d'une mole de glucose $C_6H_{12}O_6(s)$ avec le dioxygène $O_2(g)$ qui libère du dioxyde de carbone $CO_2(g)$ et de l'eau $H_2O(l)$.
Puis, déterminer la bonne valeur numérique de son enthalpie standard de réaction $\Delta rH°$ parmi celles proposées : $-$ 2 802 $kJ{\cdot}mol^{-1}$; $-$ 594,7 $kJ{\cdot}mol^{-1}$; 594,7 $kJ{\cdot}mol^{-1}$; 2 802 $kJ{\cdot}mol^{-1}$.

Q19. Un cycliste développe lors d'une sortie d'une durée d'environ Δt = 4 heures une puissance moyenne Pméca = 180 W. En considérant que son rendement musculaire η vaut 25 %, exprimer en fonction de $\Delta rH°$, Pméca, Δt, η et de la masse molaire du glucose Mgluc, la masse de glucose m_{gluc} qu'il doit consommer pour ne pas puiser dans ses réserves.
Puis, déterminer la bonne valeur numérique parmi celles proposées : 40 g ; 120 g ; 670 g.

4è problème : Etude des performances thermiques d'un matériau isolant

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix de tout isolant. En effet, ce paramètre influence directement l'énergie dissipée à travers les parois du bâtiment et est donc lié à l'énergie supplémentaire que l'on doit fournir au bâtiment pour maintenir une température donnée.

1 - Étude analytique du régime permanent

On s'intéresse tout d'abord aux transferts thermiques dans le matériau isolant (figure 2) lorsque la température intérieure T(t, x = 0) = Tint = 20 °C
et la température extérieure $T(t, x = L) = T\text{ext} = 5$ °C.

On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à $T(t = 0, x > 0) = T\text{ext}$.

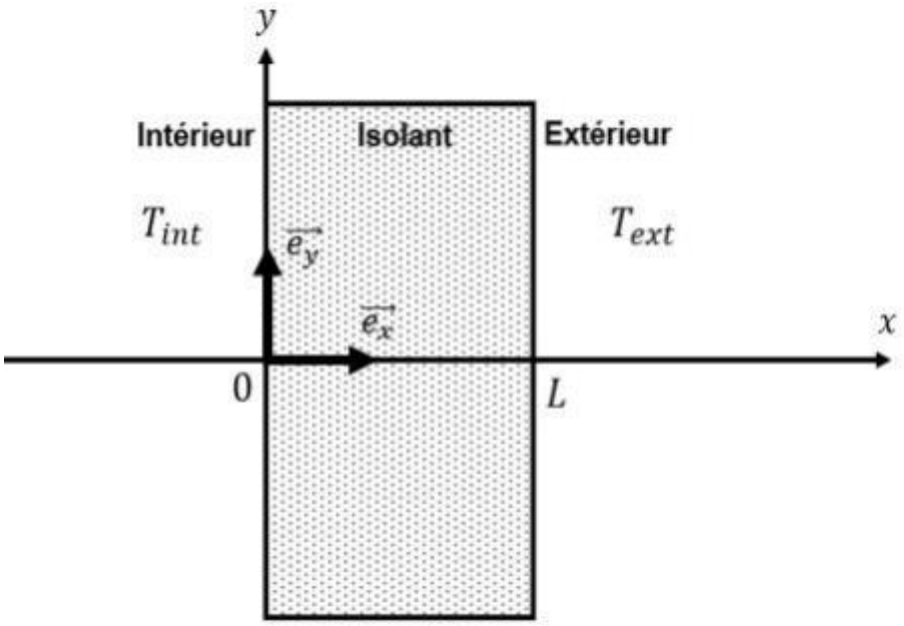

Figure 2 - Schématisation du problème

Q20. Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant x ?

Q21. Etablir, l'équation de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera T la température, $\lambda_{isolant}$ la conductivité thermique de l'isolant, ρ la masse volumique et cp la capacité thermique massique.

Q22. Donner les conditions aux limites, $T(t > 0, x = 0)$ et $T(t, x = L)$, et les conditions initiales $T(t = 0, x > 0)$ et $T(t = 0^+, x = 0)$ de la fonction $T(t, x)$.

Q23. Déterminer l'expression de la température en régime permanent $T(x)$ en fonction des variables x, $T\text{ext}$, $T\text{int}$ et L. Représenter graphique T(x) pour le régime permanent déterminé, ainsi que T(x) pour t < 0, régime permanent initial.

Q24. Proposer une définition de la résistance thermique et en donner la formule. En déduire l'expression de la résistance thermique de surface r_{th} de l'isolant en fonction de l'épaisseur L de la plaque et de la conductivité thermique de l'isolant $\lambda_{isolant}$.

Q25. Quelle doit être la valeur de l'épaisseur de l'isolant pour obtenir une résistance thermique de surface r_{th} = 3,15 m^2 · K · W^{-1} ? On prendra $\lambda_{isolant}$ = 0,037 W · K^{-1} · m^{-1}.

2 - Étude numérique du régime transitoire
(Quelques fonctions de la bibliothèque NUMPY sont données en fin d'énoncé)

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) \text{ où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

Q26. Exprimer la diffusivité thermique k_{th} en fonction de la conductivité thermique $\lambda_{isolant}$, de la masse volumique ρ et de la capacité thermique massique cp.

On discrétise l'intervalle [0, L], représentant l'épaisseur de l'isolant, en N_X + 1 points régulièrement espacés d'un pas spatial dx (figure 3). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

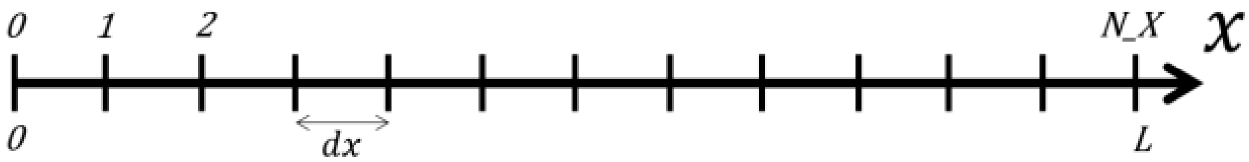

Figure 3 - Discrétisation de l'isolant selon x

Q27. Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle [0, L]. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du (i)-ème point.

Q28. Exprimer, à l'aide de la formule de Taylor-Young, équation (1) :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + o((x-a)^2) \qquad \textbf{(1)}$$

a. $T(t + dt, x)$, au premier ordre par rapport à t, dt étant l'incrément temporel ;
b. $T(t, x - dx)$, au second ordre par rapport à x ;
c. $T(t, x + dx)$, au second ordre par rapport à x.

Q29. En déduire une expression de $\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$ en fonction de dx, $T(t, x)$, $T(t, x - dx)$ et $T(t, x + dx)$.

La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée : T_i^n.

Q30. En reformulant le résultat des **questions Q28 et Q29,** déterminer une relation entre :

a. T_i^{n+1}, T_i^n, $\frac{\partial T(t,x)}{\partial t}$ et dt ;
b. T_{i+1}^n, T_{i-1}^n, T_i^n, $\frac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$ et dx.

Q31. À partir des **questions Q21 et Q30**, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt.\,k_{th}\left(\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2}\right) + T_i^n. \qquad \textbf{(2)}$$

Le code de **l'algorithme 1** ci-dessous permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

Q32. Donner l'**Instruction 1** permettant de définir la diffusivité thermique k_{th}.

Q33. L'équation (2) est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \ldots N\_X\}$?

Q34. Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les **Instruction 2.1** et **Instruction 2.2**. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps [0;$t_m$ax].

Q35. Déduire de la **question Q22** les **Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4**.

Q36. À partir de la **question Q31**, compléter **Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1       #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000    #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100      #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5       #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]       #Diffusivité thermique

#Discrétisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]


#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]
```

Algorithme 1 - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

On donne en figure 4 le profil de température dans le composite à plusieurs instants.

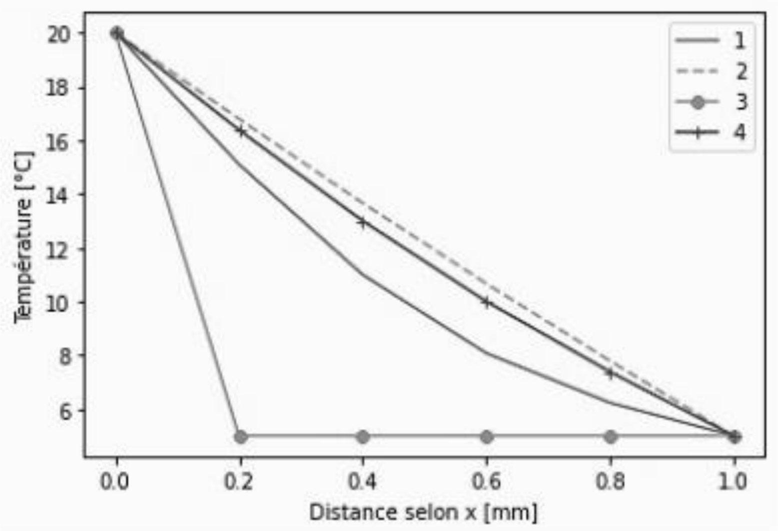

Figure 4 - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

Q37. Associer à chaque courbe de la **figure 4** les instants de la liste suivante :

$$t = [0\ s, 6\ 000\ s, 12\ 000\ s, 18\ 000\ s].$$

Q38. Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque **`numpy`** a préalablement été importée à l'aide de la commande : **`import numpy as np`**.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- **`np.linspace(start, stop, N point) :`**
  - description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
  - argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
  - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
`np.linspace(1, 4, 5)`	`[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]`

- **`np.zeros(i) :`**
  - description : renvoie un tableau de taille i rempli de zéros.
  - argument d'entrée : un scalaire
  - argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
`np.zeros(5)`	`[0, 0, 0, 0, 0]`

- **`np.array(liste) :`**
  - description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
  - argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
  - argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
`np.array([4, 3, 5])`	`[4, 3, 5]`

- **`A[i,j] :`**
  - description : retourne l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne i + 1 de la matrice A, on écrit A[i, :]. De même, pour obtenir toute la colonne j + 1 de la matrice A, on utilise la syntaxe A[: , j]
  - argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A
  - argument de sortie : l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A

Commande	Résultat
`A = np.array([[1, 2, 1],[4, 6, 3], [1, 3, 8]])` `A[1, 2]`	`3`