

Devoirs surveillé n° 4
8h00 – 12h00 4 heures

Calculatrices NON autorisées

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 4 problèmes indépendants.

1^{er} problème : Étude cinétique de décomposition du substrat dans un digesteur anaérobie

La matière organique complexe à décomposer comprend des polysaccharides, protéines, lipides... elle est nommée le substrat S .

La transformation chimique d'hydrolyse des macromolécules du substrat S est l'étape cinétiquement limitante dans le processus global de biodégradation anaérobie. Le substrat S est hydrolysé en matières organiques solubles (glucides simples, acides aminés, glycérol...) que l'on nommera les produits P .

On note la constante de vitesse k associée à la réaction d'hydrolyse du substrat S en produits P ,



On remarque que cette réaction peut être accélérée en ajoutant des enzymes. La réaction d'hydrolyse peut être modélisée par une cinétique d'ordre 1 par rapport au substrat S .

Q 1. Donner la définition d'un catalyseur. Sur quelle grandeur thermodynamique a-t-il une action ?

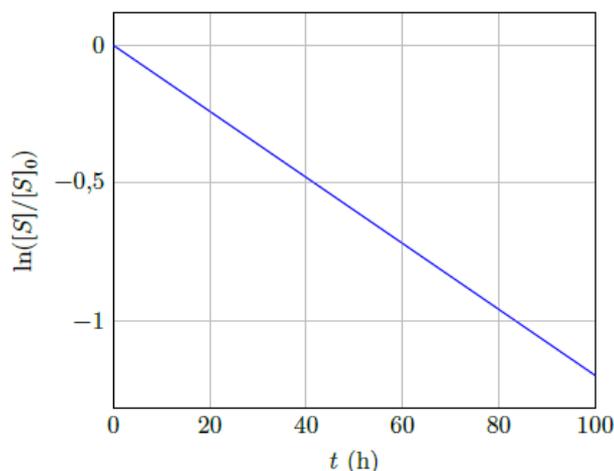
Q 2. Exprimer $[S](t)$ en fonction de la concentration initiale en substrat $[S]_0$ de k et de t .

La figure ci-contre donne l'évolution de $\ln([S]/[S]_0)$ en fonction du temps.

Q 3. Déterminer graphiquement la valeur de k .

Q 4. Rappeler la définition du temps de demi-réaction $t_{1/2}$. Établir son expression en fonction de k .

Q 5. Evaluer graphiquement le temps de demi-réaction. Donnée $\ln 2 \approx 0,7$.



2è problème : Étude du profil de pesanteur

On suppose usuellement que l'accélération de la pesanteur g est uniforme sur terre, or celle-ci est plus faible à haute altitude. Il est possible d'obtenir l'expression de $g(r)$, où r est la distance au centre de la Terre, en étudiant une situation analogue en électrostatique.

On considère ainsi une boule chargée uniformément (densité volumique de charge électrique ρ), de rayon R . Cette distribution de charges produit un champ électrique \vec{E} . On utilise les coordonnées sphériques (r, θ, φ) dont le centre O est le centre de la boule.

Q6 - Donner l'expression de la charge électrique totale, notée Q , portée par la boule, en fonction de ρ et de R .

Q7 - En explicitant les invariances et les symétries du problème, donner les variables dont dépend le champ électrique \vec{E} , ainsi que sa direction en fonction des vecteurs de la base sphérique.

Q8 - En utilisant le théorème de Gauss, établir l'expression du champ électrique \vec{E} à la fois dans la boule et à l'extérieur.

Q9 - Faire un tableau d'analogies entre électrostatique et gravitation, pour en déduire l'expression du champ de gravitation $\vec{G}(r)$, à l'intérieur et à l'extérieur de la terre de rayon R_T , de masse M_T supposée uniformément répartie. On pose G constante de gravitation universelle.

Q10 - Montrer que pour $r \geq R_T$
$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

Q11 - En déduire l'expression de g en fonction de l'altitude z par rapport au sol, du rayon terrestre R_T , et de la valeur g_0 de la pesanteur en $z = 0$.

Q12 - À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en z/R_T , donner l'expression de g pour $z \ll R_T$.

Q13 - De combien la pesanteur a-t-elle diminuée à une altitude de 6,4km ? On prendra $R_T = 6400$ km. Est-ce en accord avec le tableau de données du document 1 ?

| Altitude m | Température °C | Pression kPa | Accélération gravitationnelle g , m/s ² |
|---------------|-------------------|-----------------|--|
| 0 | 15,00 | 101,33 | 9,807 |
| 200 | 13,70 | 98,95 | 9,806 |
| 400 | 12,40 | 96,61 | 9,805 |
| 600 | 11,10 | 94,32 | 9,805 |
| 800 | 9,80 | 92,08 | 9,804 |
| 1 000 | 8,50 | 89,88 | 9,804 |
| 1 200 | 7,20 | 87,72 | 9,803 |
| 1 400 | 5,90 | 85,60 | 9,802 |
| 1 600 | 4,60 | 83,53 | 9,802 |
| 1 800 | 3,30 | 81,49 | 9,801 |
| 2 000 | 2,00 | 79,50 | 9,800 |
| 2 200 | 0,70 | 77,55 | 9,800 |
| 2 400 | -0,59 | 75,63 | 9,799 |
| 2 600 | -1,89 | 73,76 | 9,799 |
| 2 800 | -3,19 | 71,92 | 9,798 |
| 3 000 | -4,49 | 70,12 | 9,797 |
| 3 200 | -5,79 | 68,36 | 9,797 |
| 3 400 | -7,09 | 66,63 | 9,796 |
| 3 600 | -8,39 | 64,94 | 9,796 |
| 3 800 | -9,69 | 63,28 | 9,795 |
| 4 000 | -10,98 | 61,66 | 9,794 |
| 4 200 | -12,3 | 60,07 | 9,794 |
| 4 400 | -13,6 | 58,52 | 9,793 |
| 4 600 | -14,9 | 57,00 | 9,793 |
| 4 800 | -16,2 | 55,51 | 9,792 |
| 5 000 | -17,5 | 54,05 | 9,791 |
| 5 200 | -18,8 | 52,62 | 9,791 |
| 5 400 | -20,1 | 51,23 | 9,790 |
| 5 600 | -21,4 | 49,86 | 9,789 |
| 5 800 | -22,7 | 48,52 | 9,785 |
| 6 000 | -24,0 | 47,22 | 9,788 |
| 6 200 | -25,3 | 45,94 | 9,788 |
| 6 400 | -26,6 | 44,69 | 9,787 |
| 6 600 | -27,9 | 43,47 | 9,786 |
| 6 800 | -29,2 | 42,27 | 9,785 |
| 7 000 | -30,5 | 41,11 | 9,785 |
| 8 000 | -36,9 | 35,65 | 9,782 |
| 9 000 | -43,4 | 30,80 | 9,779 |
| 10 000 | -49,9 | 26,50 | 9,776 |
| 12 000 | -56,5 | 19,40 | 9,770 |
| 14 000 | -56,5 | 14,17 | 9,764 |
| 16 000 | -56,5 | 10,53 | 9,758 |
| 18 000 | -56,5 | 7,57 | 9,751 |

Document 1 : propriétés moyennes de l'air à haute altitude – en partie d'après relevés expérimentaux.
(Source : *Thermodynamique, une approche pragmatique*, Çengel et al.)

3è problème : Détecteur capacitif de pluie

Les détecteurs de pluie présents dans les parebrises de voiture utilisent de plus en plus l'effet capacitif. Un élément chauffant intégré au capteur permet de le maintenir sec en vaporisant l'eau tombée. Ceci évite les fausses communications dues au brouillard ou à des phénomènes de condensation (rosée du matin). Le capteur est une platine sur substrat céramique, son principe de fonctionnement repose sur une détection de type capacitive. Ainsi l'accumulation de pluie sur la surface de la plaque aura pour conséquence de modifier la valeur de sa capacité, ainsi que les lignes du champ électrique.

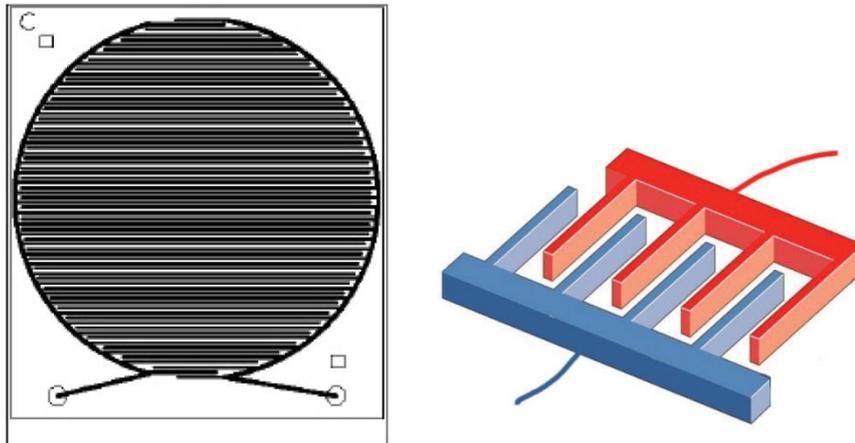


FIGURE 3 – Cellule capacitive et schéma de principe de sa géométrie

Q14. Justifier que ce capteur puisse se modéliser par l'association de condensateurs en parallèle et établir l'expression de la capacité équivalente de N condensateurs en parallèle.

Q15. On s'intéresse au champ électrique créé par un plan infini (Oxy) de densité surfacique σ , plongé dans le vide.

Montrer, par l'étude des symétries et des invariances que celui-ci s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = A(z)\vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ \vec{E} = -A(z)\vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

Q16. Établir alors l'expression de $A(z)$ en fonction de σ et ϵ_0 par application du théorème de Gauss.

Q17. En admettant que le résultat précédent reste valable pour un plan fini, établir l'expression de la capacité C_0 d'un condensateur plan dont le diélectrique est assimilé à du vide, constitué de deux armatures planes identiques de surface S , distantes de e et portant des charges opposées $+q$ et $-q$.

Q18. La cellule capacitive est assimilée à une association de 40 condensateurs. La capacité totale de l'ensemble vaut $C_{tot} = 2$ pF. On suppose l'épaisseur des armatures négligeable, et la surface d'une armature vaut $S = 0,5 \text{ mm}^2$. On rappelle la permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$. Évaluer l'épaisseur e entre les armatures d'un condensateur.

Q19. Montrer que l'unité de la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 peut s'écrire sous la forme $F^\alpha m^\beta$ avec α et β des coefficients à déterminer.

- Q20.** La capacité du condensateur varie en fonction de la présence ou non de goutte d'eau sur le capteur. Afin de mesurer sa valeur, le condensateur, initialement déchargé, est chargé avec un courant constant i et l'on mesure la durée Δt nécessaire pour que la tension à ses bornes atteigne la valeur de référence U_{ref} . Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de i , U_{ref} et Δt .
- Q21.** Tracer l'allure de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps, lors d'une charge sous une tension constante U_{ref} à travers une résistance R . Tracer le graphe de la tension aux bornes du condensateur lors d'une charge à courant constant i l'emmenant à une tension finale U_{ref} . Comparer les graphes.
- Q22.** Proposer un montage permettant de mesurer la capacité C d'un condensateur au laboratoire, en précisant les mesures effectuées.

Dans la pratique le condensateur utilisé dans le capteur capacitif est intégré dans le feuilletage des vitres. À l'approche d'une couche d'eau, les lignes du champ électrique sont modifiées (il s'agit du même principe utilisé pour les écrans tactiles capacitifs). Les lignes de champ sur un tel capteur sont les suivantes :

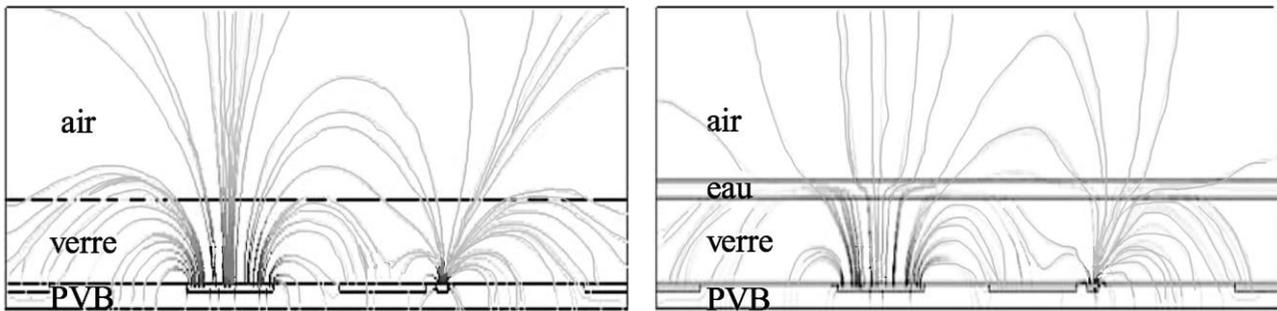


FIGURE 4 – Lignes du champ électrique sur la surface du capteur en absence d'eau, et déformation de ces lignes en présence de gouttes d'eau. PVB représente la plaque du capteur.

- Q23.** Préciser la zone où la norme du champ électrique est la plus grande.

4^e problème - Études des performances acoustiques

Une annexe est fournie en fin de problème

Source : Manuel Van Damme, Isolation aux bruits aériens : principes et matériaux, Bruxelles Environnement

Les bruits aériens sont transmis à un bâtiment principalement à travers ses parois. Dans le but de protéger un immeuble des bruits extérieurs, il est possible de l'isoler. Dans cette partie, la valeur de l'indice d'affaiblissement acoustique du Kairlin®, isolant acoustique, sera estimée à l'aide de mesures expérimentales.

On considère le panneau isolant de Kairlin®, comme une plaque infiniment fine située en $x=0$, de masse surfacique μ . Elle sépare deux fluides parfaits de même masse volumique. Les deux milieux 1 et 2 sont supposés illimités.

La source du bruit émet une onde sonore incidente qui se propage dans le milieu 1 jusqu'à la plaque. Deux ondes sont alors créées, comme l'illustre la **figure 5** :

- l'onde réfléchie, se propageant dans le milieu 1 dans le sens opposé à l'onde incidente ;
- l'onde transmise, se propageant dans le milieu 2 dans le même sens que l'onde incidente.

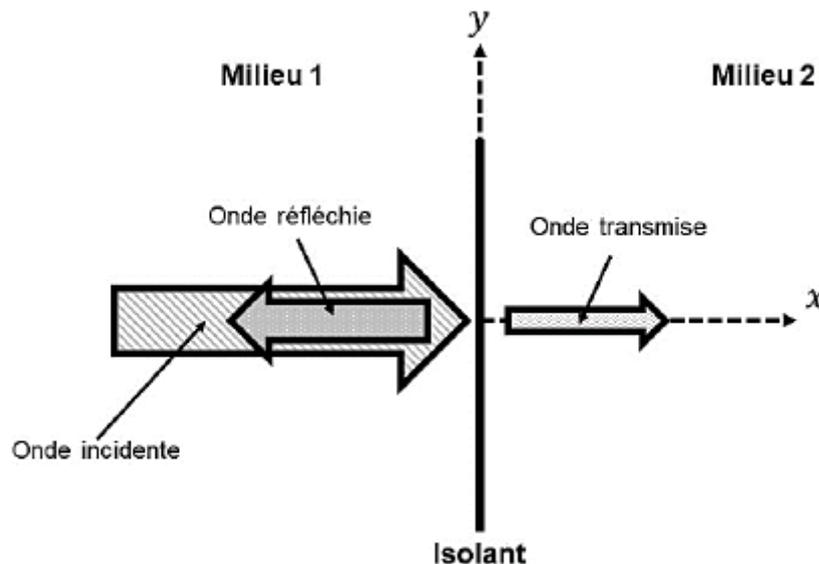


Figure 5 - Comportement de l'onde incidente

1 - Modélisation de la propagation des ondes

Tout d'abord, on cherche à obtenir une expression des grandeurs associées aux ondes sonores supposées longitudinales et planes. On introduit ainsi les grandeurs caractéristiques de l'air suivantes :

- Masse volumique : $\rho(M,t) = \rho_0 + \rho_1(M,t)$
- Pression : $p(M,t) = p_0 + p_1(M,t)$
- Champ de vitesse : $\vec{v}_1(M,t)$
- Coefficient de compressibilité isentropique : χ_s

Q24. Établir l'équation linéarisée de conservation de la masse dans le cas d'une propagation unidirectionnelle selon x en fonction de $\rho(M, t)$ et de $\vec{v}_1(M, t)$

Q25. Écrire la loi linéarisée de la conservation de la quantité de mouvement dans le cas d'une propagation unidirectionnelle selon x en fonction de $\rho(M, t)$, $\vec{v}_1(M, t)$ et $p(M, t)$.

Q26. Donner l'équation isentropique linéarisée reliant ρ_1 à ρ_0 , χ_s et p_1 .

Q27. En déduire l'équation (3). On prendra le soin de préciser l'expression de c en fonction de ρ_0 et χ_s :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

On définit l'impédance d'un milieu comme étant le rapport entre la pression et l'amplitude de la vitesse, **équation (4)** :

$$Z(x, t) = \frac{p_1(x, t)}{v_1(x, t)}$$

Dans le cas d'une onde plane progressive, on montre l'équation (5) : $Z = \rho_0 c$

- $p_1 = Zv_1$ si l'onde est directe (propagation dans le sens des x croissants);
- $p_1 = -Zv_1$ si l'onde est rétrograde (propagation dans le sens des x décroissants).

Q28. Montrer que le produit $\rho_0 c$ a bien la même unité qu'un rapport pression sur vitesse.

Q29. On rappelle que $p(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ est solution de l'équation (3). En déduire, à l'aide de l'équation (4), la forme générale des champs de vitesse parcourue dans un milieu fluide.

2 - Réflexion et transmission des ondes

Une onde sonore incidente progressive monochromatique de pulsation ω arrive sur la plaque depuis le milieu 1 vers le milieu 2, **figure 6**. On supposera que cette onde est longitudinale et plane. On rappelle que les deux milieux sont de même nature. On supposera que la forme du champ de pression associée à l'onde incidente progressive monochromatique de pulsation ω et de nombre d'ondes k qui arrive sur la plaque est définie par l'équation (6) :

$$p_i(x, t) = p_1 \cos(\omega t - kx).$$

Q30. Déterminer une expression des champs de vitesse et pression associés aux ondes transmises et réfléchies.

On cherche à déterminer les coefficients de réflexion $r = \frac{p_r}{p_1}$ et de transmission $t = \frac{p_t}{p_1}$ en amplitude pour la pression, p_r et p_t étant respectivement les amplitudes des ondes réfléchies et transmises.

Q31. Donner l'équation donnée par la continuité de la vitesse en $x = 0$.

Donner l'équation donnée par l'application du principe fondamental de la dynamique sur un élément de surface dS de la plaque.

En déduire que les coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude pour la pression sont donnés par l'équation (7), i étant l'argument complexe :

$$\begin{cases} r = \frac{i\omega\mu}{2Z + i\omega\mu} \\ t = \frac{2Z}{2Z + i\omega\mu} \end{cases}$$

Q32. Déterminer le coefficient de transmission en énergie $T_{\text{énergie}}$, rapport des flux moyen de puissance transmise et incidente en fonction de ω . En déduire l'expression de $T_{\text{énergie}}$ en dB. On rappelle que les densités de courants énergétiques sont données par la relation $\langle p \rangle$.

3 - Analyse des résultats expérimentaux

Nous allons dans cette sous-partie utiliser les résultats d'essais réalisés dans le but de quantifier les performances acoustiques du Kairlin® (**figure 6**). Ils consistent à enregistrer la réponse perçue par un récepteur suite à l'émission d'un son à fréquence variable par un émetteur placé de l'autre côté d'une plaque de Kairlin®.

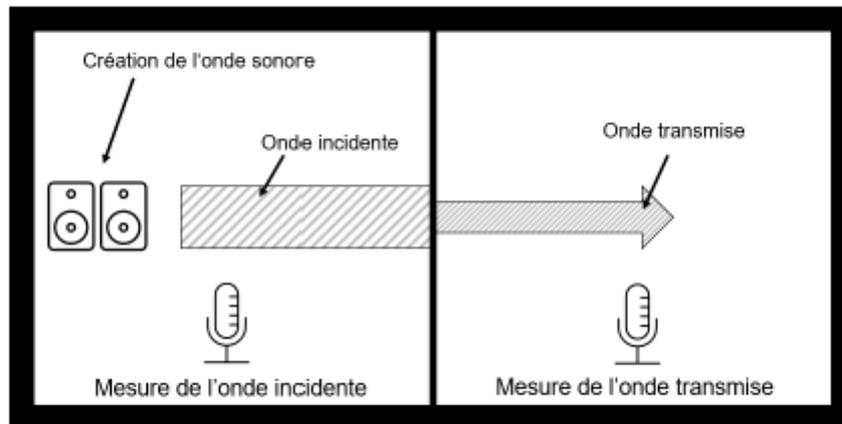


Figure 6 - Essais permettant de déterminer l'indice d'amortissement acoustique

Q33. Le fichier résultat comprend trois lignes précisant la fréquence du signal et les intensités perçues par le récepteur et l'émetteur. Compléter **Instructions 1.1**, **Instruction 1.2** et **Instructions 1.3** de l'**algorithme 2** permettant d'extraire sous trois listes distinctes **frequence**, **I_emetteur** et **I_recepteur** les fréquences de prise d'échantillonnage et les intensités perçues par l'émetteur et le récepteur. Ces listes seront initialisées par les **Instructions 1.1** et converties en tableaux à l'aide des **Instructions 1.3**.

On appelle indice d'amortissement acoustique le réel, exprimé en dB, R_w défini par l'**équation (8)**.

$$R_w = 10 \log \left(\frac{I_{\text{émetteur}}}{I_{\text{récepteur}}} \right)$$

Q34. Compléter l'**Instruction 2** de l'**algorithme 2** permettant de calculer **Gain_dB**, le gain en dB lié à l'amortissement acoustique de la plaque.

Q35. Compléter les **Instructions 3** de l'**algorithme 2** afin d'obtenir les résultats de la **figure 7**

- a. L'**Instruction 3.1** définit les grandeurs à tracer ;
- b. L'**Instruction 3.2** permet d'afficher la légende ;
- c. L'**Instruction 3.3** génère le titre de l'axe des abscisses ;
- d. L'**Instruction 3.4** génère le titre de l'axe des ordonnées ;
- e. L'**Instruction 3.5** nomme le graphique.

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Fichier = open("Resultats.txt", 'r')

[Instructions 1.1]
for lu in Fichier:
    ligne = lu.split("\t")
    [Instructions 1.2]
[Instructions 1.3]

[Instruction 2]

plt.plot([Instruction 3.1])
[Instruction 3.2]
[Instruction 3.3]
[Instruction 3.4]
[Instruction 3.5]

```

Algorithme 2 - Algorithme permettant d'extraire et de tracer les résultats expérimentaux

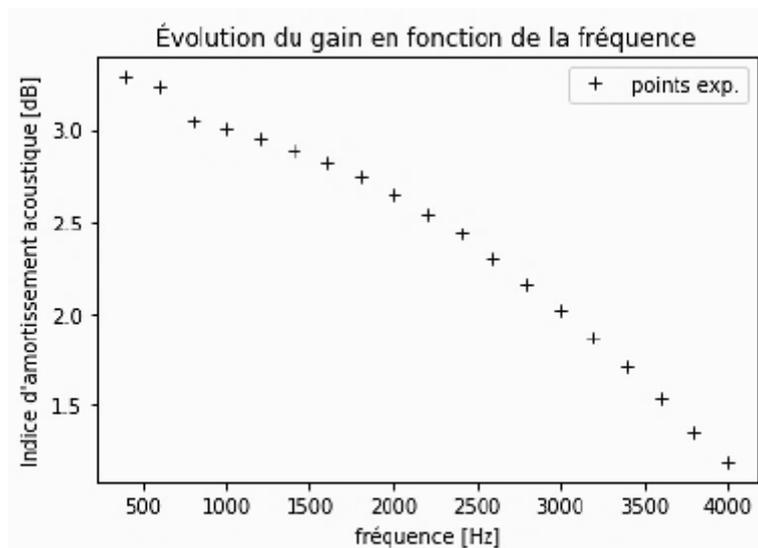


Figure 7 - Résultats expérimentaux

Q37. Les résultats expérimentaux sont-ils en adéquation avec le modèle établi ?

ANNEXE Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- `np.linspace(start, stop, N_point)` :

- o description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
- o argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
- o argument de sortie : un tableau

| Commande | Résultat |
|-----------------------------------|--|
| <code>np.linspace(1, 4, 5)</code> | <code>[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]</code> |

- `np.zeros(i)` :

- o description : renvoie un tableau de taille i rempli de zéros.
- o argument d'entrée : un scalaire
- o argument de sortie : un tableau

| Commande | Résultat |
|--------------------------|------------------------------|
| <code>np.zeros(5)</code> | <code>[0, 0, 0, 0, 0]</code> |

- `np.array(liste)` :

- o description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- o argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
- o argument de sortie : un tableau (matrice)

| Commande | Résultat |
|----------------------------------|------------------------|
| <code>np.array([4, 3, 5])</code> | <code>[4, 3, 5]</code> |

- `A[i, j]` :

- o description : retourne l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne i + 1 de la matrice A, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne j + 1 de la matrice A, on utilise la syntaxe `A[:, j]`
- o argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A
- o argument de sortie : l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A

| Commande | Résultat |
|--|----------|
| <code>A = np.array([[1, 2, 1], [4, 6, 3], [1, 3, 8]])</code> <code>A[1, 2]</code> | 3 |

- `chaine.split(motif)` :

- o description : divise une chaîne de caractères en une liste ordonnée de sous-chaînes, place ces sous-chaînes dans un tableau et retourne le tableau. La division est effectuée en recherchant un motif
- o argument d'entrée : motif

- o argument de sortie : un tableau

| Commande | Résultat |
|---|---------------------------------|
| <code>A = 'azert yuiop'</code> <code>A.split(' ')</code> | <code>['azert', 'yuiop']</code> |

II. - Bibliothèque MATPLOTLIB.PY PLOT

Cette bibliothèque permet de tracer des graphiques. Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `matplotlib.pyplot` a préalablement été importée à l'aide de la commande :
`import matplotlib.pyplot as plt.`

- o description : fonction permettant de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenues dans le vecteur x et les ordonnées dans le vecteur y. Cette fonction doit être suivie de la fonction `plt.show()` pour que le graphique soit affiché
- o argument d'entrée : un vecteur d'abscisses x (tableau de n éléments) et un vecteur d'ordonnées y (tableau de n éléments). La chaîne de caractères 'SC' précise le style et la couleur de la courbe tracée. Des valeurs possibles pour ces deux critères sont :

Valeurs possibles pour S (style) :

| Description | Ligne continue | Ligne traitillée | Marqueur rond | Marqueur plus |
|-------------|----------------|------------------|---------------|---------------|
| Symbole S | - | -- | o | + |

Valeurs possibles pour C (couleur) :

| Description | bleu | rouge | vert | noir |
|-------------|------|-------|------|------|
| Symbole C | b | r | g | k |

- o argument de sortie : un graphique

```
x= np.linspace(3,25,5)
y=sin(x)
plt.plot(x,y,'-b') # tracé d'une ligne bleue continue
plt.title('titre_graphique') # titre du graphe
plt.xlabel('x') # titre de l'axe des abscisses
plt.ylabel('y') # titre de l'axe des ordonnées
plt.show()
```