Thème : échantillonnage

APPLICATION DIRECTE :

1. Echantillonnage

a. Remplir le tableau ci-dessous pour les 3 cas présentés, où T_{acq} est la durée d'acquisition du signal, N le nombre d'échantillons, Te la période d'échantillonnage, fe la fréquence d'échantillonnage, To la période du signal, f_o la fréquence du signal f_o, f_S la fréquence du signal échantillonné, la résolution spectrale (le plus petit intervalle de fréquence mesurable) $\Delta f = f_e / N$. Préciser les relations qui existent entre les grandeurs.

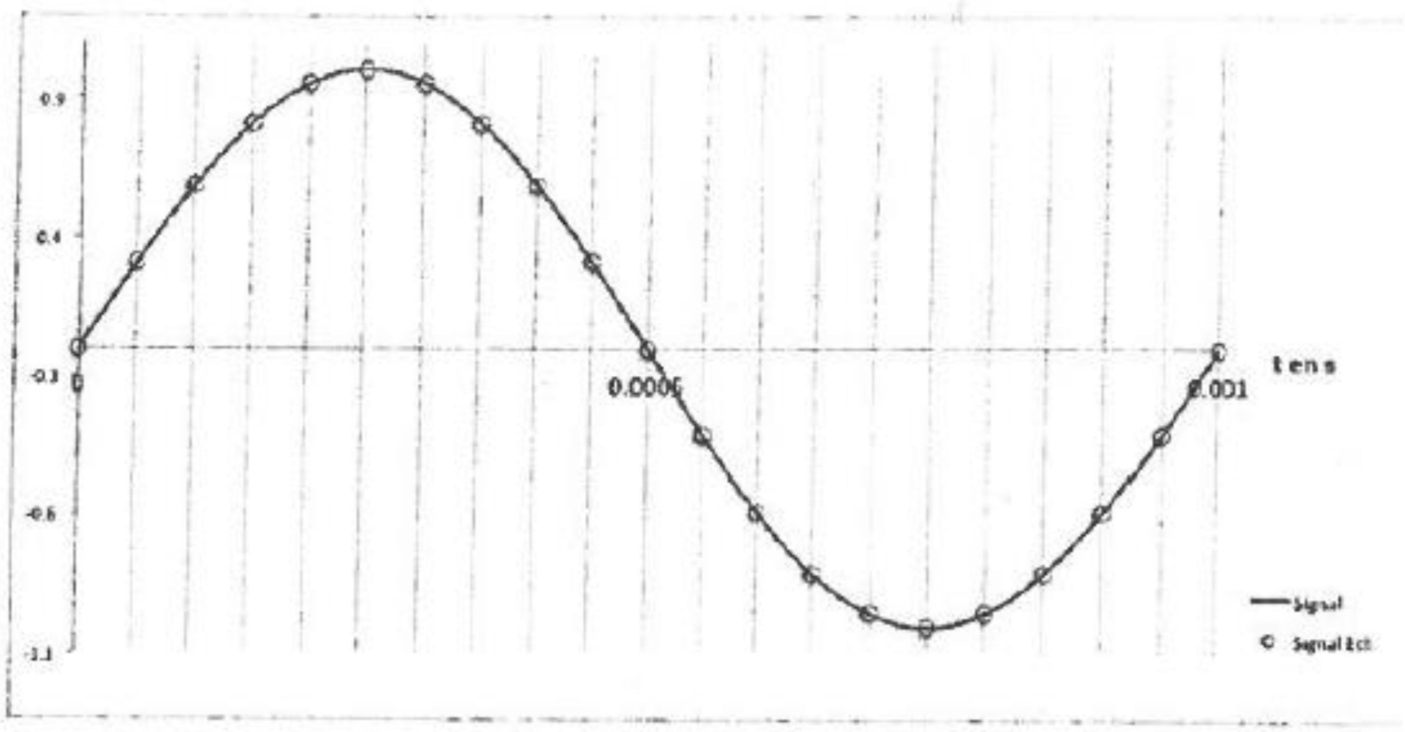
	Tacq	N	Te	fe	To	fo	fs	Δf
Cas 1								
Cas 2								
Cas 3								

b. Enoncer le critère de Shannon relatif à la fréquence d'échantillonnage minimale pour effectuer un calcul correct de FFT (Fast Fourier Transform) et conclure la question a.

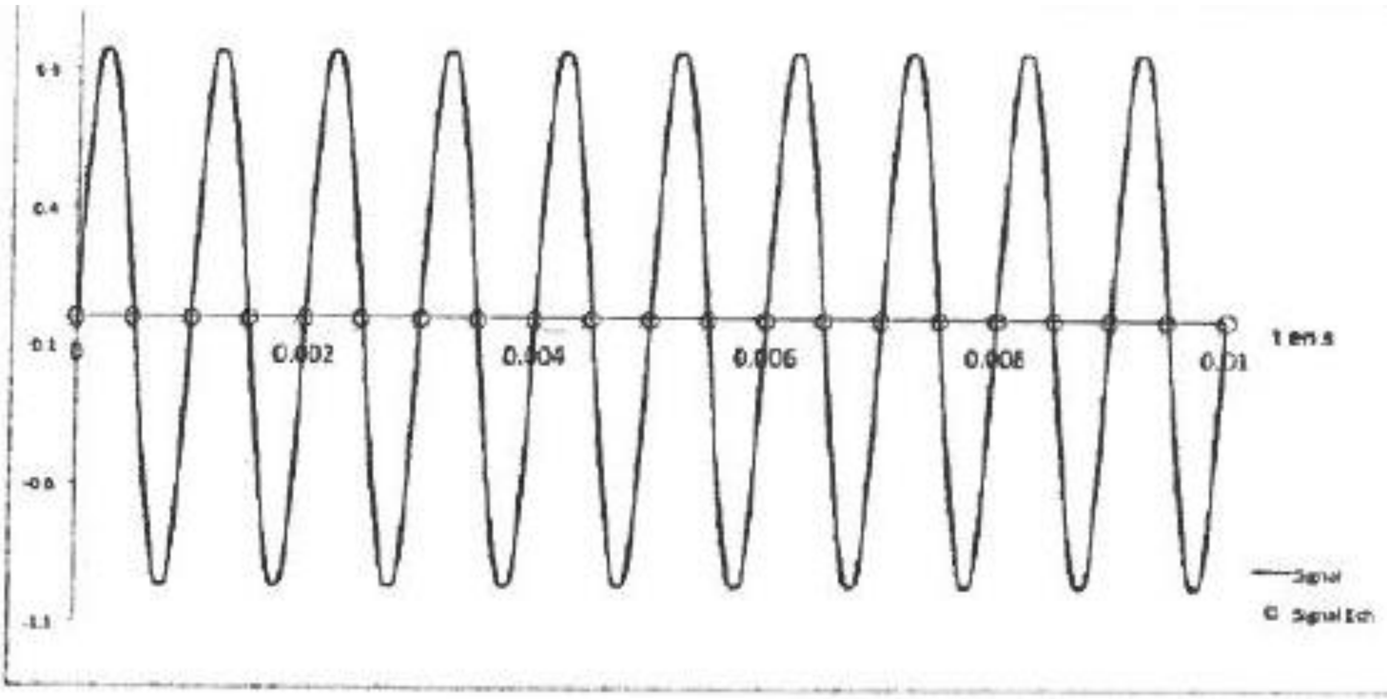
c. Le calcul de la FFT est muni d'un filtre anti-repliement qui sélectionne les signaux dont les fréquences sont comprises entre 0 et fe/2. Tracer les spectres des 3 signaux.

d. En déduire la fréquence d'échantillonnage minimale pour calculer par FFT le spectre du signal 3.

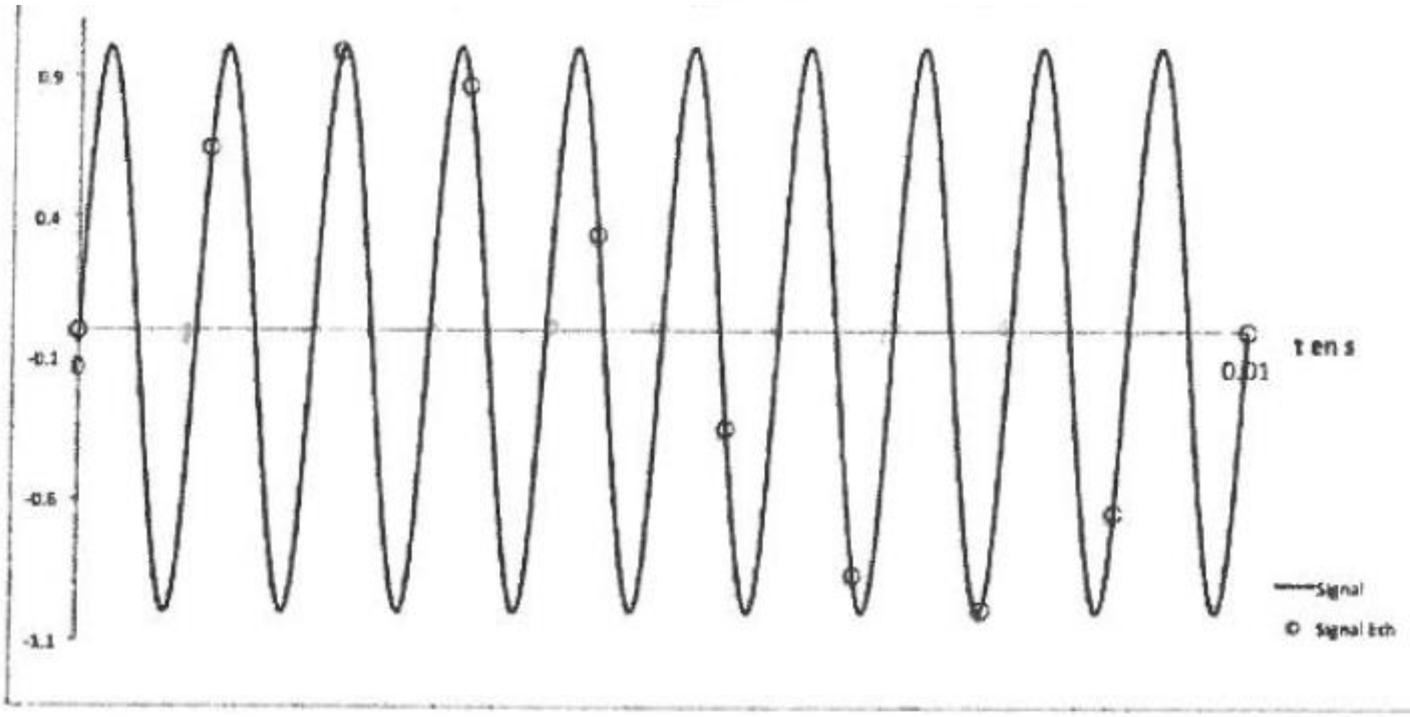
e. Effectuer le produit T_{acq}. Δf et conclure.



cas 1



cas 2

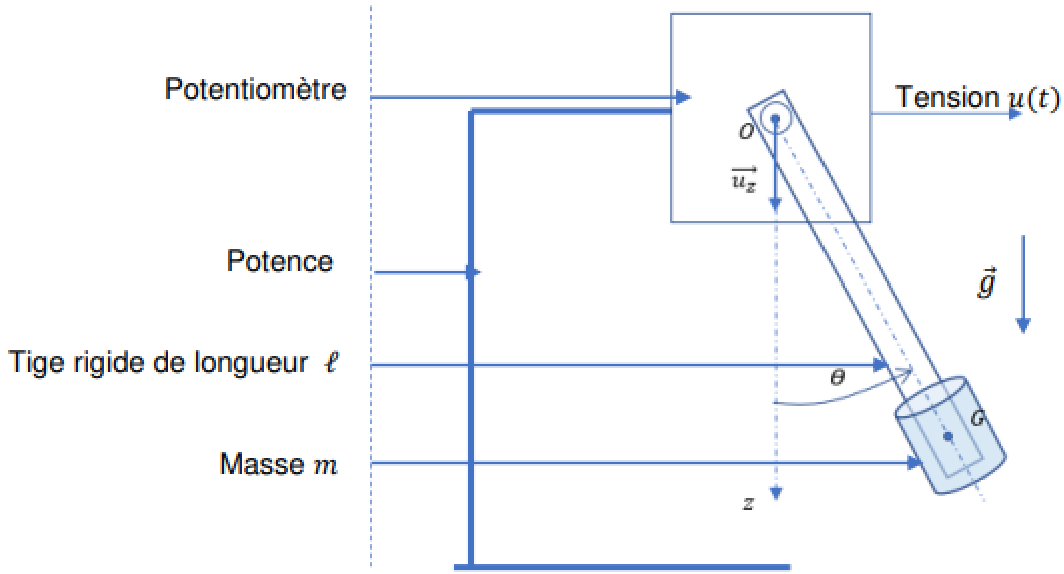


cas 3

EXERCICES :

I. Enregistrement du mouvement d'un pendule simple

On considère le dispositif dessiné ci-dessous permettant d'observer le mouvement d'un pendule pesant constitué d'une tige rigide de longueur ℓ et d'une masse fixée à son extrémité. A l'image du balancier d'une horloge ou d'une balançoire, la masse va osciller autour du point O. La position angulaire $\theta(t)$ de la tige est repérée par rapport à l'axe vertical descendant Oz. Un potentiomètre alimenté, fixé sur une potence et solidaire de la tige en rotation, permet d'apprécier la position angulaire θ(t) de la tige en délivrant une tension u(t) = k θ(t) avec k constante.

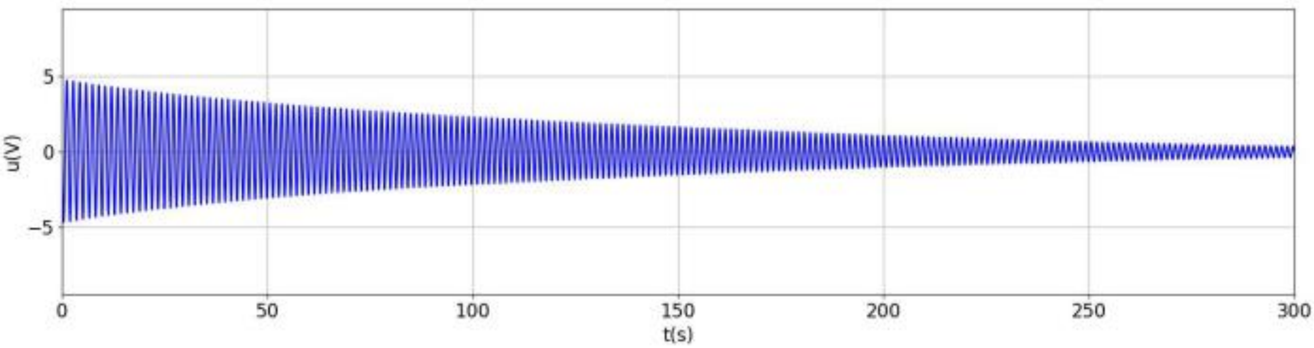


Une fois lancé, le pendule oscille avec une amplitude ne respectant pas toujours l'approximation harmonique. L'équation différentielle vérifiée par l'angle θ(t) est alors non linéaire et le pendule n'oscille plus de manière isochrone : sa fréquence d'oscillation dépend de son amplitude maximale d'oscillation θ_0 !

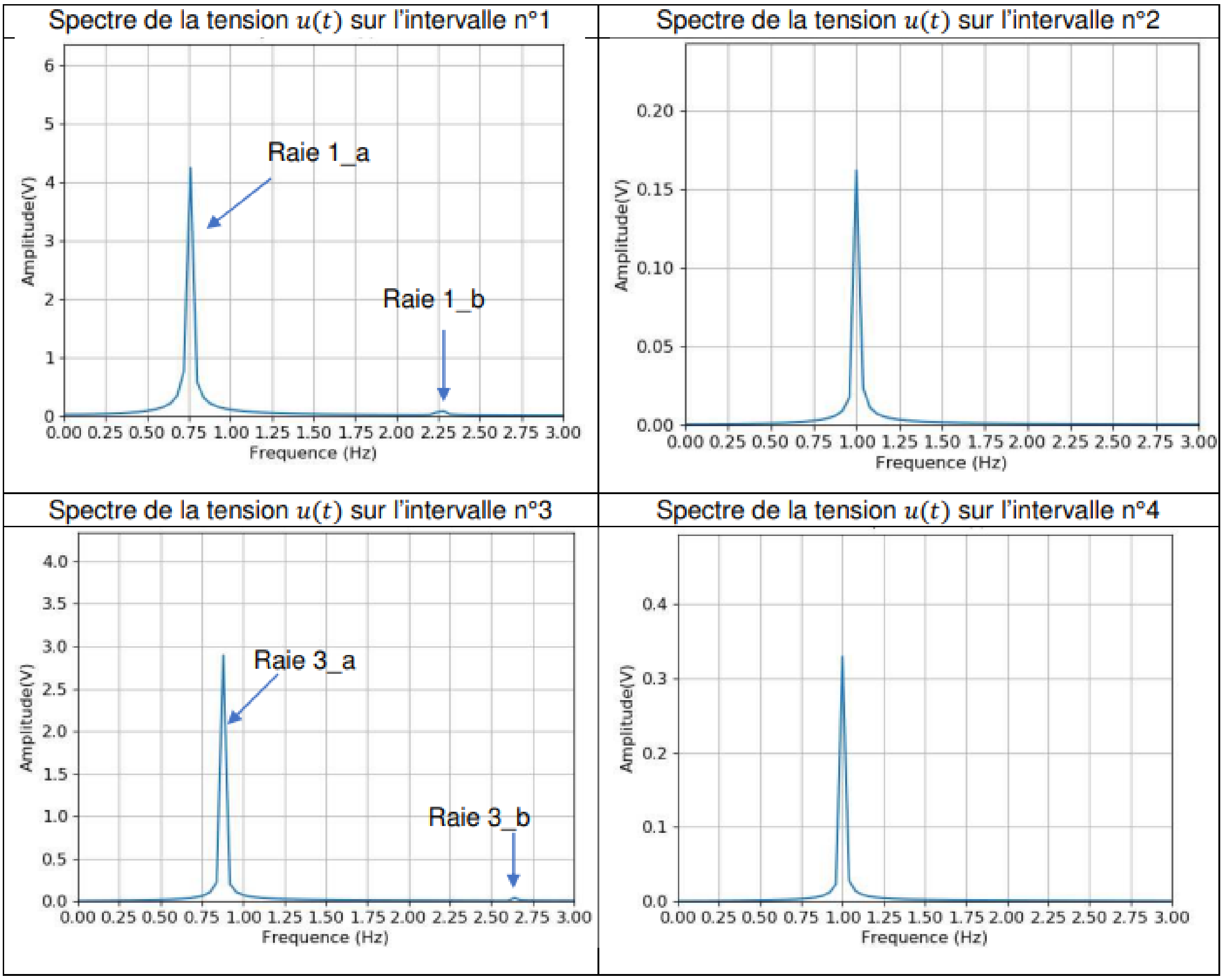
En dehors de l'approximation harmonique, on démontre que :

$$\theta(t) \approx \theta_0 \left(\sin(\omega_0' t) + \frac{\theta_0^2}{192} \sin(3\omega_0' t)\right) \text{ avec } T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0'} \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

On donne ci-dessous le relevé expérimental de la tension u(t).



L'étude des oscillations pendant 300 s met logiquement en évidence l'influence des frottements. Cependant, en étudiant les oscillations sur des intervalles de temps plus courts de 25 s, on peut, en première approximation, encore négliger l'effet des frottements. On donne ci-dessous les spectres obtenus pour quatre intervalles distincts de 25 s chacun, appelés intervalles n°1, n°2, n°3 et n°4 :



1. Rappeler l'expression de l'équation différentielle dont est solution θ(t), si on suppose que ce pendule est un oscillateur harmonique. Donner alors l'expression de θ(t) et tracer son spectre.
2. Quelle doit être la fréquence fe d'échantillonnage permettant une acquisition de 600 000 échantillons de la tension u(t) pendant 300 s ?
3. Reporter approximativement les intervalles 1 à 4 sur le relevé expérimental de u(t).
4. Quel instrument de mesure peut-on utiliser afin d'obtenir le spectre de la tension u(t) ?
5. Sur quel(s) intervalle(s) l'isochronisme des oscillations harmoniques du pendule est-il observable ? Justifier.
6. Sur quel(s) intervalle(s) les effets non linéaires des oscillations du pendule sont-ils observables ? Justifier en repérant ces effets non linéaires.
7. Donner la valeur de la fréquence propre f_o du pendule.
8. Justifier la valeur de la fréquence associée à la raie 1_b.

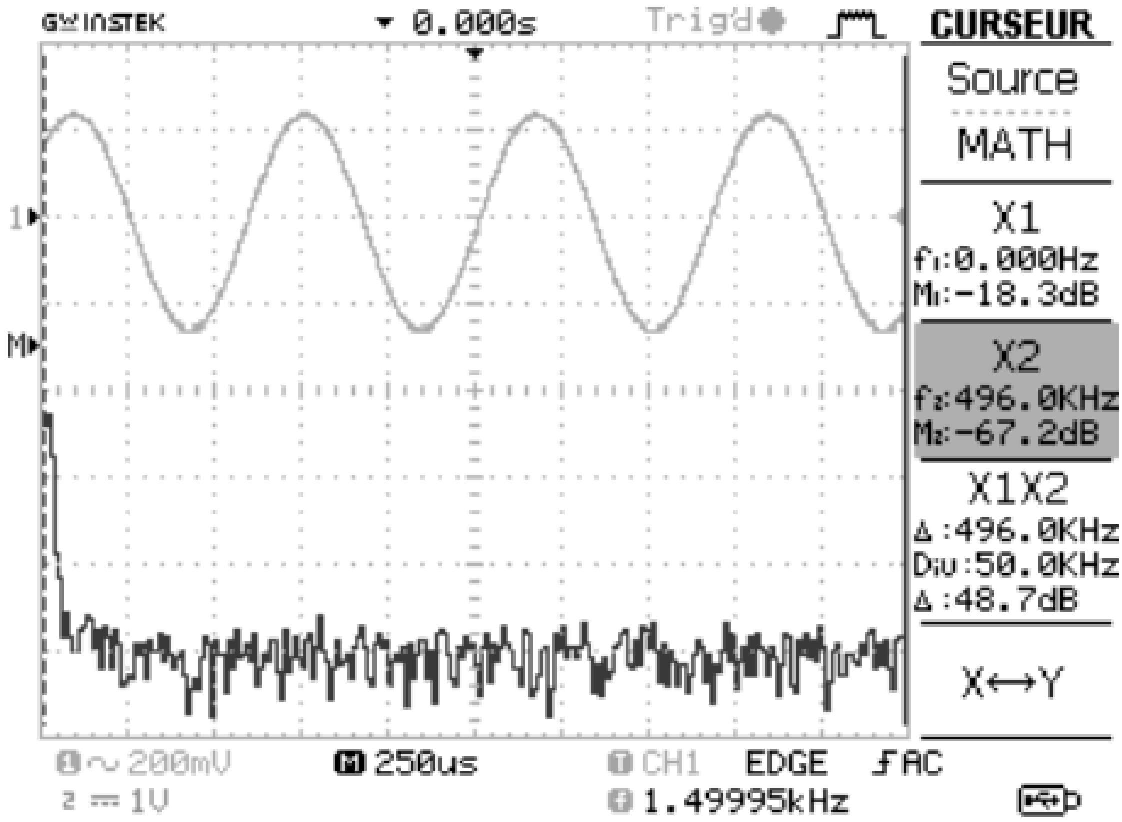
II. <u>Spectre d'un signal numérique</u>

Rappels sur le fonctionnement de l'oscilloscope numérique

- Lors d'un enregistrement, l'oscilloscope numérique discrétise et enregistre un signal sur une durée égale à la durée de balayage, soit 10 carreaux × base de temps.
- Le nombre d'échantillons enregistrés est toujours le même et égal à 2 480. La période d'échantillonnage dépend ainsi de la durée d'enregistrement et donc de la base de temps.

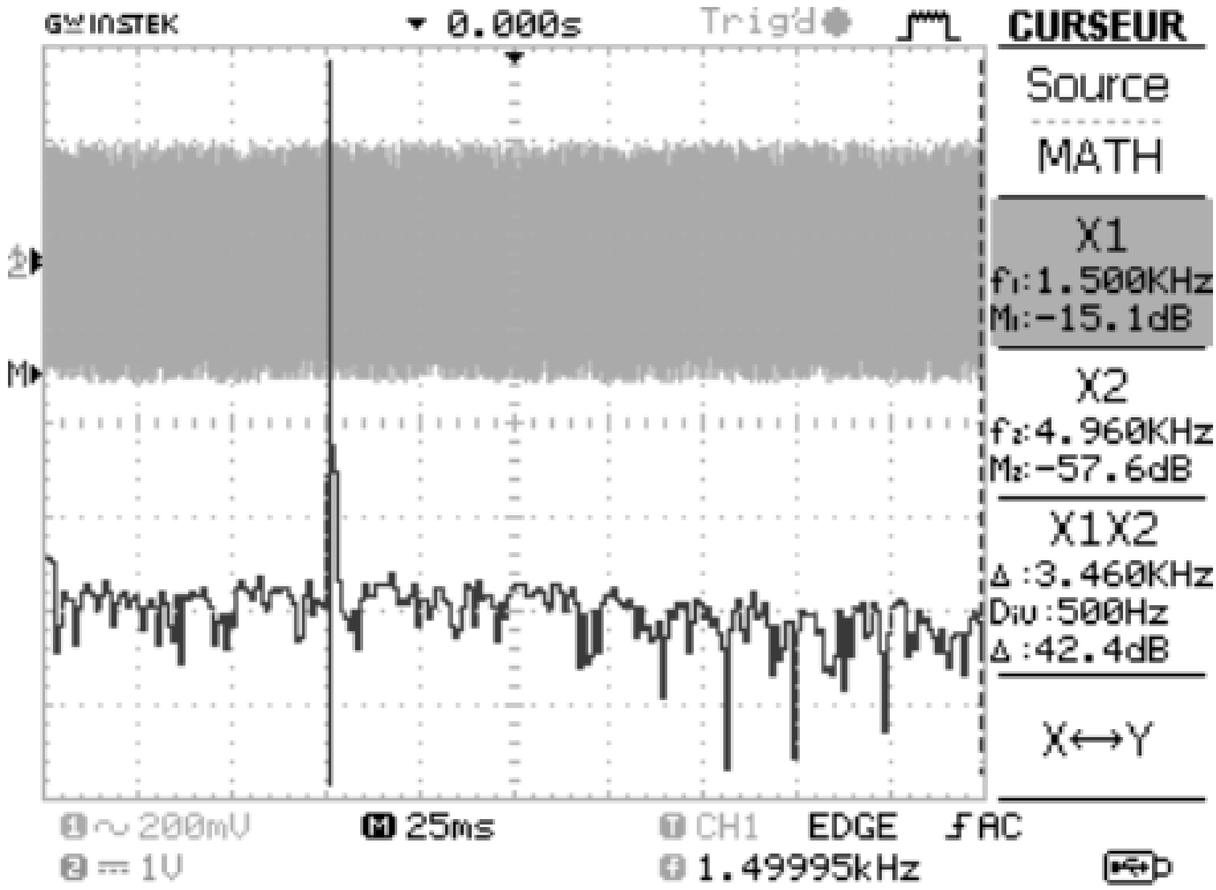
- Un menu permet l'affichage du spectre du signal échantillonné. Pour tous les spectres fournis, les amplitudes relatives des différentes composantes en fréquence sont représentées sur une échelle en dB en ordonnées. L'échelle des abscisses est linéaire, graduée de f = 0 Hz jusqu'à une fréquence fmax qui dépend de la base de temps. Deux curseurs verticaux, dénommés X1 et X2, permettent de pointer deux fréquences pour une lecture aisée de leur valeur sur l'écran.

Un signal sinusoïdal est délivré par le GBF et est envoyé sur l'oscilloscope numérique. Il a été enregistré avec une base de temps de 250 μs par division comme indiqué en bas de l'écran. Il est à la fois représenté dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sur l'oscillogramme 1 ci-dessous.



1. Déterminer la période et la fréquence du signal sinusoïdal.
   Déterminer une valeur approchée de la fréquence d'échantillonnage de cet enregistrement.
   Quel lien existe-t-il entre la plus haute fréquence fmax = 496 kHz, repérée par le curseur 2, et la fréquence d'échantillonnage ?

2. Pour un repérage aisé du pic en fréquence au moyen du curseur X1, il faut dilater l'échelle des fréquences. Quel ajustement proposez-vous de faire sur l'oscilloscope ?
   Est-ce cohérent avec le nouvel oscillogramme 2 ci-dessous ?
   La nouvelle valeur de la plus grande fréquence fmax de ce spectre était-elle prévisible ? Si oui comment ?



3. On renouvelle cette opération et on obtient l'oscillogramme 3 ci-dessous. Expliquez la valeur f = 1 kHz de la fréquence donnée par le curseur X1.