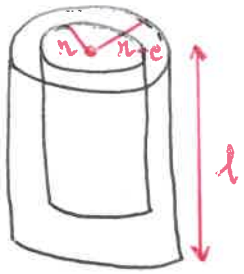
TD 9 : Exercice 1 :

On assimile le dauphin à une couronne cylindrique de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + e$



On pose :
$r = 40$ cm
$T_{ext} = T_{océan} = 13°C$

On suppose que le dauphin est un système en régime stationnaire :
Ainsi, on peut exprimer sa résistance thermique R_{th} :

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{r+e}{r}\right) = \frac{T_{int} - T_{ext}}{P_{th}}$$

ceci n'est pas une capacité exigible, il faut le montrer.

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda 2\pi h (T_{int} - T_{ext})}{P_{th}} = \ln\left(\frac{r+e}{r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\frac{\lambda 2\pi h (T_{int} - T_{ext})}{P_{th}}\right) = \frac{r+e}{r}$$

$$\Leftrightarrow r \exp\left(\frac{\lambda 2\pi h (T_{int} - T_{ext})}{P_{th}}\right) - r = e$$

Or, $P_{th} = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{20000000}{86400}$) 5000 kcal apportés par les 5 kg de poisson mangés.
/s en 1 jour

D'où $e = 40 \times 10^{-2} \exp\left(\frac{0,2 \times 2\pi \times 3 (36 - 13)}{231,5}\right) - 40 \times 10^{-2} \simeq 18,2$ cm

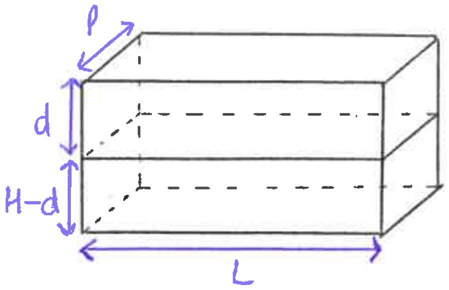
↳ Validation ? valeur possible

B

TD9 Exo II :

Bon travail.

BLONDEL Agathe
BRECHBIEHL Emma
LARGEAU Garance



où $H = 1{,}5\,m$
$L = 4{,}0\,m$
$l = 1{,}75\,m$
$d = 0{,}50\,m$

1) Loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda\,\vec{grad}(T)$ où $\vec{grad}\,T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u_x}$ et $\vec{j_Q}$: vecteur densité de flux thermique

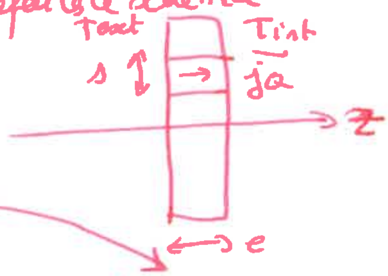
⚠ nom vect.

donc $\lambda = \frac{[W.m^{-2}]}{[K.m^{-1}]} = [W.K^{-1}.m^{-1}]$

B

2) En régime stationnaire : $P_{th} = \text{constante} = j_Q S$

Refaites le schéma



donc $j_Q = \text{cste} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ respectez les notations de l'énoncé

donc $P_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} S$ $= \text{const} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT}{dz} = \text{cste}$

De plus, $P_{th} = \frac{T_{ext} - T_{int}}{R_{th}}$ donc $\frac{\Delta T}{R_{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} S = P_{th}$ $\Big\}$ $\frac{dT}{dz} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{e}$

un peu rapide non !

donc $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ où e : épaisseur

3) * Association en série lorsque les résistances sont traversées par la même puissance : cas de la superposition de matériaux
$\Rightarrow R_{eq} = \Sigma R_i$

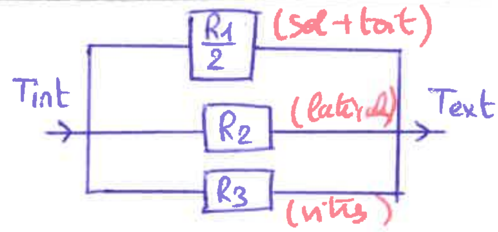
* Association en parallèle lorsque les résistances sont soumises à la même différence de température : cas des murs et vitres d'une maison
$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \Sigma \frac{1}{R_i}$

4) a) $R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1}$ avec $S_1 = l \times L$ et $R_{sol+toit} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1}{2}$
↳ toit ; sol

b) $R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 S_2}$ avec $S_2 = (H-d)(2L+2l)$
↳ parties latérales

c) $R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 S_3}$ avec $S_3 = d(2L+2l)$
↳ toutes les vitres

B

5) 

Les résistances sont en parallèles :

$$\boxed{R_V = \frac{1}{\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$$

6) • $R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1} = \frac{10 \times 10^{-2}}{0{,}10 \times (4{,}0 \times 1{,}75)} = 0{,}14\ K.W^{-1}$

• $R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 S_2} = \frac{10 \times 10^{-2}}{0{,}10 \times ((1{,}5 - 0{,}50)(2 \times 4 + 2 \times 1{,}75))} = 8{,}7 \times 10^{-2}\ K.W^{-1}$

• $R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 S_3} = \frac{2{,}0 \times 10^{-3}}{1{,}2 \times (0{,}50(2(4+1{,}75)))} = \boxed{2{,}90 \times 10^{-4}\ K.W^{-1}}$

Donc $R_V = \frac{1}{\frac{2}{0{,}14} + \frac{1}{8{,}7 \times 10^{-2}} + \frac{1}{2{,}90 \times 10^{-4}}} = \boxed{2{,}88 \times 10^{-4}\ K.W^{-1}}$

en régime stationnaire, $R_{th} = \frac{\Delta T}{P_{th}}$ et $R_3 \simeq R_V$ B

donc la puissance thermique totale perdue par la voiture est principalement dûe aux vitres. B

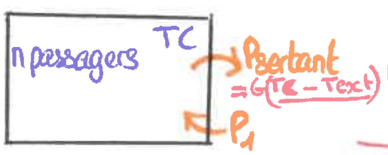
7) Il fallait tenir compte du phénomène conducto-convectif. au niveau de toutes les surfaces. → intérieures et extérieures.

Loi de Newton : $P_{\cancel{fuite}\ cc} = h S \Delta T$ et $P_{fuite} = \frac{\Delta T}{R_{fuite}}$

donc $\boxed{R_{\cancel{fuite}\ cc} = \frac{1}{hS}}$ est à ajouter en série où h : coef conducto-convectif

Schéma électrique équivalent : Tint → $R_{fuite\ cc}$ — R_V — $R_{fuite\ cc}$ → Text B

plutôt phénomène conducto convectif cc que fuites.

8) 

On maintient la température TC = Tint = ~~293~~ 293 K en ajustant P_1 tel que on conserve l'énergie thermique.

→ en appliquant le 1er principe à la voiture

$\frac{dU}{dt} = 0 = np + P_1 - P_{sortant}$

donc $np + P_1 = -G\Delta T$ B $\Rightarrow \boxed{P_1 = -G\Delta T - np}$

9) Pour n=4 en été : $P_1 = -150 \times (303 - 293) - 4 \times 75 = -1800\ W$ Ok car climatisation

Pour n=4 en hiver : $P_1 = -150 \times (263 - 293) - 4 \times 75 = 4200\ W$ Ok car chauffage

ΔT

Pas de conditionnement lorsque $P_1 = 0$: $-G(T_{ext} - T_{int}) - np = 0 \Leftrightarrow T_{ext} = -\frac{np}{G} + T_{int} = 291\ K = 18°C$

C'est à dire une température extérieure $\boxed{T_{ext} = 18°C}$ B $\boxed{\Delta T = 2°C}$

groupe 4

exercice 3 TD 3

① Bilan énergétique : | conduction thermique
| pertes thermiques par rayonnement et convection.

1er principe) → pas de sens sans une définition EXPLICITE du système ⟹ SCHÉMA INDISPENSABLE

$du = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) - \delta Q\,\text{pertes}$

$= \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) - dP\,dt$

$= dt\,S\,\left(j_Q(x,t) - j_Q(x+dx,t)\right) - k\,\theta(x,t)\,ds\,dt$

↑ grandeur à identifier

Or $j_Q(x+dx,t) = j_Q(x,t) + \dfrac{\partial j_Q(x,t)}{\partial x}\,dx$

d'où $du = -dt\,S\,\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}\,dx - k\,\theta(x,t)\,ds\,dt$

Or $du = dm\,c\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)dt$

$= d\tau\,\rho\,c\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)dt$ où $d\tau$ = volume cylindre élémentaire

$= \pi\,dx\,R^2\rho\,c\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)dt$

donc

$-dt\,S\,\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}\,dx - k\,\theta(x,t)\,ds\,dt = \pi\,dx\,R^2\rho\,c\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)dt$

OR, | S = surface du cylindre = πR^2
| ds = surface latérale = $2\pi R\,dx$

d'où :

$-dt\,\pi R^2\,\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}\,dx - k\,\theta(x,t)\,2\pi R\,dx\,dt = \pi\,dx\,R^2\rho\,c\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)dt$

on a donc : avec la loi de fourier,

$$R\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = R\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2k\,\theta(x,t)$$

or $\left|\begin{array}{l} \dot{\theta}(x,t) = \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \ddot{\theta}(x,t) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{array}\right.$

Vous ne pouvez pas écrire cela
$\dot{\theta}$ est réservé à 1 dérivée temporelle, pas spatiale.

conserver les mêmes variables dans l'équa. diff.

d'où : $$\boxed{R\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = R\lambda \ddot{\theta}(x,t) - 2k\,\theta(x,t)}$$

$\theta \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$

② en régime stationnaire du = 0
car rien ne dépend du temps

d'où $$0 = R\lambda \ddot{\theta}(x) - 2k\,\theta(x)$$

et $$\boxed{\ddot{\theta}(x) - \frac{2k}{R\lambda}\theta(x) = 0}$$

③ $\theta(x) = \theta_0 e^{-x/\delta}$

$\dot{\theta}(x) = \dfrac{-\theta_0}{\delta} e^{-x/\delta}$

$\ddot{\theta}(x) = \dfrac{\theta_0}{\delta^2} e^{-x/\delta}$

on remplace : oui, c'est une méthode

$$\frac{\theta_0}{\delta^2} e^{-x/\delta} - \frac{2k}{R\lambda}\theta_0 e^{-x/\delta} = 0 \quad (*)$$

donc $(*) = 0 \iff \begin{cases} \theta_0 e^{-x/\delta} = 0 \\ \dfrac{1}{\delta^2} - \dfrac{2k}{R\lambda} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \theta_0 e^{-x/\delta} = 0 \\ \boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{R\lambda}{2k}}} \end{cases}$

autre méthode :

on a $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \dfrac{2k}{\lambda R}\theta = 0$ $\quad$ (EC) : $X^2 - \dfrac{2k}{\lambda R} = 0$

direct !

$\Delta = \dfrac{8k}{\lambda R} > 0$ donc $\begin{cases} r_1 = -\sqrt{\dfrac{2k}{R\lambda}} \\ r_2 = \sqrt{\dfrac{2k}{R\lambda}} \end{cases}$

inutile.

donc $\theta(x) = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$ $\quad (A,B) \in \mathbb{R}$

or $\lim_{x \to \infty} \theta(x) = T_a - T_a = 0$

donc $B = 0$

d'où $\boxed{\theta(x) = A e^{-\sqrt{\frac{2k}{R\lambda}}\, x}}$

de plus $\theta(0) = \theta_0 = A$

donc $\boxed{\theta(x) = \theta_0 e^{-x/\delta}}$ avec $\boxed{\delta = \sqrt{\dfrac{R\lambda}{2k}}}$

④ la paraffine fond à la même température

donc $\theta(x_1) = \theta(x_2)$

$$\Leftrightarrow \cancel{\theta_0} e^{-x_1/\sqrt{\frac{R\lambda_1}{2k}}} = \theta_0 e^{-x_2/\sqrt{\frac{R\lambda_2}{2k}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{\sqrt{\frac{R\lambda_1}{\cancel{2k}}}} = \frac{x_2}{\sqrt{\frac{R\lambda_2}{\cancel{2k}}}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{R\lambda_2} = \sqrt{R\lambda_1}\,\frac{x_2}{x_1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{\lambda_1 x_2^2}{x_1^2}} = 66\ W.m^{-1}.k^{-1}$$

B

$$= 390 \times \left(\frac{6,4}{15,6}\right)^2$$

expression numérique ?

* Merci de rédiger sur des feuilles simples.
* exemple type de rédaction TRES INSUFFISANTE pour 2 → question chimique.

exercice 4

Groupe 5

⚠ écriture ! homogénéité vectorielle

1) loi de Fourier : $\vec{j_Q} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}(T)$

$\vec{j_Q}$: vecteur de densité de flux thermique en $W.m^{-2}$
λ : coefficient de conduction thermique en $W.K^{-1}.m^{-1}$
$\overrightarrow{Grad}(T)$: gradient de température en $K.m^{-1}$

signification physique de cette loi ? "la chaleur s'écoule spontanément de la source chaude vers la source froide"

2) D'après le 1er principe :
$dU = \delta Q$ ↳ appliqué à quel système ?

SCHEMA INDISPENSABLE

$\Leftrightarrow C dT = \delta Q$

$\Leftrightarrow mc \, dT = \delta Q_{\text{conduction thermique}} + \delta Q_{\text{joule}}$

Définissez les VARIABLES

$\Leftrightarrow \mu c \, \tau \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) + P_{joule} \, dt$

$\Leftrightarrow \mu c S dx \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt = -\frac{\partial j_Q(x)}{\partial x} S dx dt + R I^2 dt$

$= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dx dt + R I^2 dt$ d'après la loi de Fourier.

Or $R = \frac{dx}{\sigma S}$ } par analogie avec R_{th} ...

On a alors

$\mu c \cancel{S dx} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) \cancel{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \cancel{dx dt} + \frac{\cancel{dx}}{\sigma S} I^2 \cancel{dt}$

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\sigma S^2} + \frac{\lambda \partial^2 T}{\partial x^2}}$$

3) En régime stationnaire, $T = T(x)$

Donc l'équation précédente devient : $\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{I^2}{\sigma S^2} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{-I^2}{\lambda \sigma S^2} \Leftrightarrow \dfrac{d^2T}{dx^2} = \dfrac{-I^2}{\lambda \sigma S^2}$

Donc $\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{-I^2}{\lambda \sigma S^2} + A$

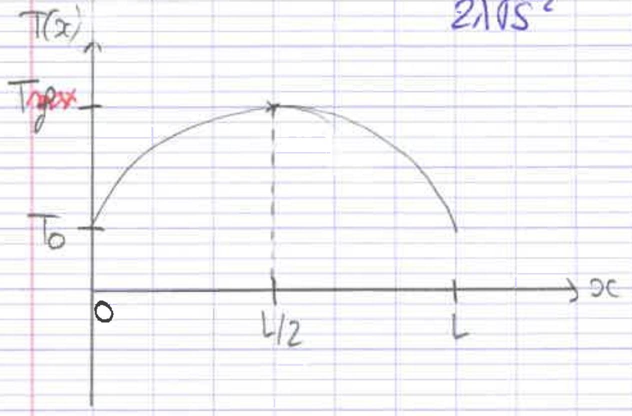
D'où $T(x) = \dfrac{-I^2}{2\lambda\sigma S^2} x^2 + Ax + B$

En $x = 0$, $T(0) = T_0 = B$

En $x = L$, $T(L) = \cancel{T_0} = \dfrac{-I^2}{2\lambda\sigma S^2} L^2 + AL \cancel{+B}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-I^2}{2\lambda\sigma S^2} L^2 + AL = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} L$

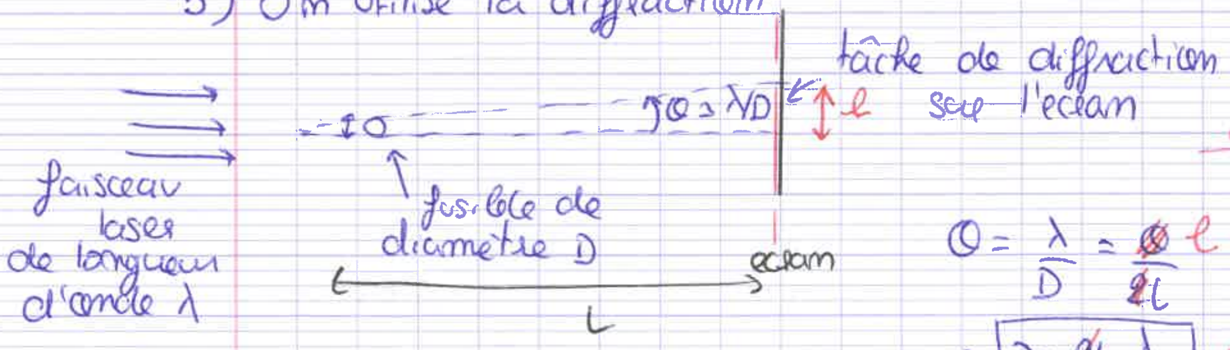
On a alors $T(x) = \dfrac{-I^2}{2\lambda\sigma S^2} x^2 + \dfrac{I^2}{2\lambda\sigma S^2} Lx + T_0$



4) L'endroit qui atteint T_f en 1er est en $x_{fusion} = \dfrac{L}{2}$

= Tmax.

5) On utilise la diffraction



a

Δ homogénéité

$\theta = \dfrac{\lambda}{D} = \dfrac{\cancel{\varnothing}\, l}{\cancel{2}L}$

$\Rightarrow \boxed{D = \dfrac{\cancel{2}L\lambda}{l\cancel{\varnothing}}}$ AH

2/3

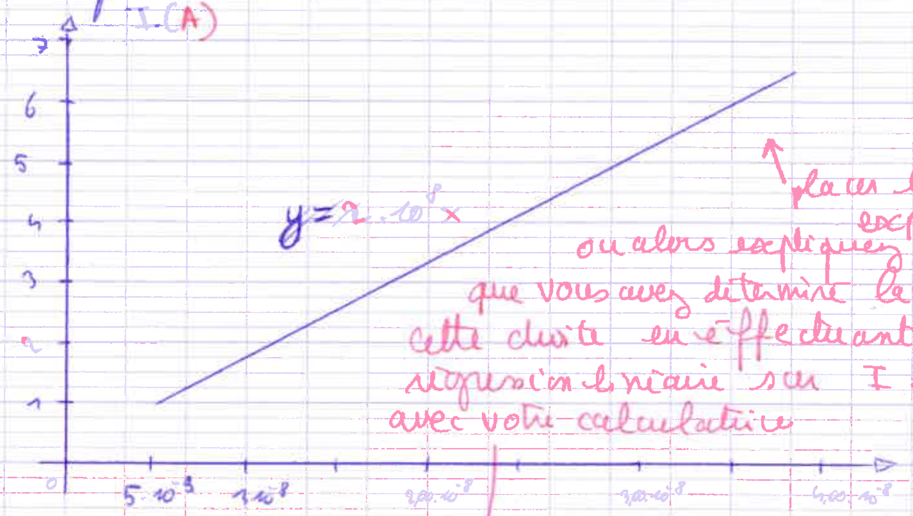
6) Pour $x = \frac{L}{2}$, $T(\frac{L}{2}) = T_f$ } → rupture du fusible.

donc $T(\frac{L}{2}) = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}\frac{L^2}{4} + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}\frac{L^2}{2} + T_0 = T_f$

$\Rightarrow I^2 = \frac{8\lambda\sigma}{L^2}(T_f - T_0)\, S^2$ et $S = \frac{\pi}{4} D^2$

donc $I = \sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2}(T_f - T_0)}\; \frac{\pi}{4} D^2$

I en fonction de D^2 :



↑ placer les points expérimentaux.

ou alors expliquez que vous avez déterminé la pente de cette droite en effectuant une régression linéaire sur I et D^2 avec votre calculatrice

→ ou tableur ou python → SCRIPT ?

Ainsi $\sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2}(T_f - T_0)}\; \pi/4 = 2.10^8 \; A.m^{-2}$

On cherche $\sqrt{\frac{8\lambda\sigma}{L^2}(T_f - T_0)}\; \pi/4$ pour chaque métaux

donc, plomb : $1,7.10^7 \; A.m^{-2}$
argent : $3,7.10^8 \; A.m^{-2}$
aluminium : $1,8.10^8 \; A.m^{-2}$

L'aluminium est le plus probable constituant parmis les trois car il se rapproche le plus de la valeur $2.10^8 \; A.m^{-2}$

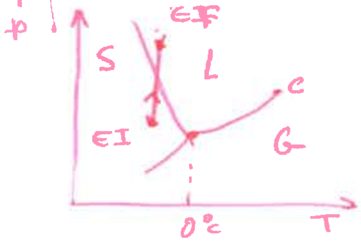
3/3

Groupe 9. → Numérotez les pages → Rédigez recto verso.

BELFKIH AYOUB
AITOUAARAB Yasmine
ROY Inès

TD n°9 : Ex V.

1. La lame du patin étant ~~plus chaude~~ que la glace, celle-ci va fondre. Il y a $\boxed{\text{diffusion thermique}}$. Non ! il s'agit de l'effet de la pression à température constante

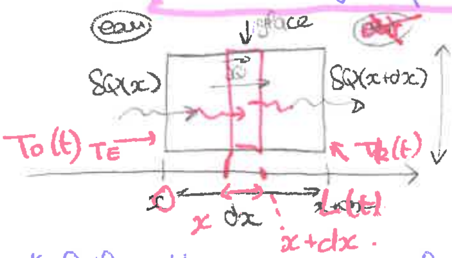


2. Les trois modes de transfert thermique sont :
   - la conduction thermique
   - la convection
   - le rayonnement.

3. D'après la loi de Fourier, on a : identifiez les variables.

$$\boxed{\vec{J}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\,(T(x,t)) = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\,(T_x(t))} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x \text{ (régime stationnaire)}$$

4.



$T_{air} = T_A \leq T_{glace} = T_x(t) \leq T_{eau} = T_E$) B

* Bilan thermique sur la glace (section S, épaisseur dx) (OK pour le schéma)

- 1er principe élémentaire : $dU = \delta Q$

$$\Leftrightarrow dU = C\, dT_x$$
$$= C.m \left(\frac{\partial T_x}{\partial t}\right) dt$$

et $\delta Q = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx)$ $\quad = \mu c S.dx \left(\frac{\partial T_x}{\partial t}\right) dt.$

$$= j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt$$

*Alors, $dU = \delta Q$

$$\Leftrightarrow \mu S dx\, c \left(\frac{\partial T_x}{\partial t}\right) dt = j_Q(x) S dt - j_Q(x+dx) S dt$$

$$\Leftrightarrow \mu\, dx\, c \left(\frac{\partial T_x}{\partial t}\right) = j_Q(x) - \left(j_Q(x) + \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(\frac{\partial j_Q}{\partial x}\right) + \mu c \left(\frac{\partial T(x)}{\partial t}\right) = 0}$$

5. En utilisant la loi de Fourier :

$$j_Q = -\lambda \left(\frac{\partial T_x}{\partial x}\right)$$

Ainsi l'équation de la diffusion thermique est :

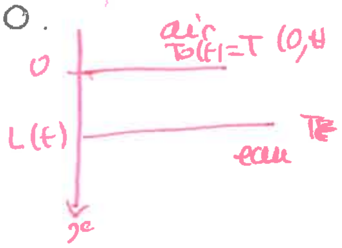
$$\boxed{\left(\frac{\partial T_x}{\partial t}\right) = \underbrace{\frac{\lambda}{\mu c}}_{= D} \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2}}$$

Roy Inès
Belfkih Ayoub
Ait Ouaarab Yasmine

$\boxed{\text{TD n°9 ex V}}$

6. En se plaçant dans le cadre de l'approximation quasi stationnaire cela implique que T est indépendant de t et j_Q aussi.
pour $0 \leq x \leq L(t$

$du = 0$, $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = 0$ donc $\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = 0 \iff \frac{d^2 T_x}{dx^2} = 0$.



on intègre $\frac{dT_x}{dx} = A$

on intègre de nouveau : $T_x(t) = T(x,t) = Ax + B$

a en $x = 0$, $T(0,t) = T_0(t) = B$, → c'est l'air d'après le schéma
Refaites le schéma !

et en $x = L(t)$: $T(L(t)) = A\,L(t) + T_0(t) = T_E \iff A = \frac{(T_E - T_0(t))}{L(t)}$

Donc $T_x(t) = \frac{T_E - T_0(t)}{L(t)}\,x + T_0(t)$

7. en $x = 0$: $j_Q(x = 0^-) = j_Q(x = 0^+) \iff j_{Q\,air} = j_{Q\,glace}$

$\iff -\lambda \times \left(\frac{\partial T_x}{\partial x}\right)_{(x=0^+)} = h\,(T_0(t) - T_A)$ → dans la glace $\Rightarrow \left(\frac{dT}{dx}\right)_{(glace)} = A$

variation élémentaire du temps " $\frac{dT_x}{dx}$ → unidirectionel $= \frac{T_E - T_0(t)}{L(t)}$.

$\iff -\lambda\, dT_x = h\,(T_0(t) - T_A)\, dx$ (dx " $L(t)$)

$\iff -\lambda(T_0(t) - T_E) = h\,(T_0(t) - T_A) \times L(t)$

$\iff L(t) = \frac{\lambda(T_E - T_0(t))}{h\,(T_0(t) - T_A)}$

brouillon

8. Dans notre cas, $T_A = -10°C$. Sur la figure 8, on a au bout de 20 h, une epaisseur de glace de ≈ 0,065 m soit 6,5 cm de glace. Or il faut une épaisseur de 20 cm minimum pour que les joueurs de hockey puissent y jouer. (voir ci dessous)
↳ possible si $T_A = -40°C$ au bout de 28 h !
oui

9. La vitesse de formation de la glace semble plus rapide au début, aux premières heures (tangente plus redressée) et se stabilise peu à peu. De plus, plus la température T_A est basse, plus la vitesse de formation de la glace est élevée. (voir ci dessous)
oui

10. La grandeur pas encore citée jusqu'à présent dont on a besoin pour resoudre numeriquement le problème est λ qui est le coefficient de conductivité thermique. $[\lambda] = W.K^{-1}.m^{-1}$. On trouve cette unité grâce à la loi de Fourier : $\underbrace{\vec{j_Q}}_{W.m^{-2}} = -\lambda \underbrace{\overrightarrow{grad}(T)}_{K.m^{-1}}$

(flux vect !)

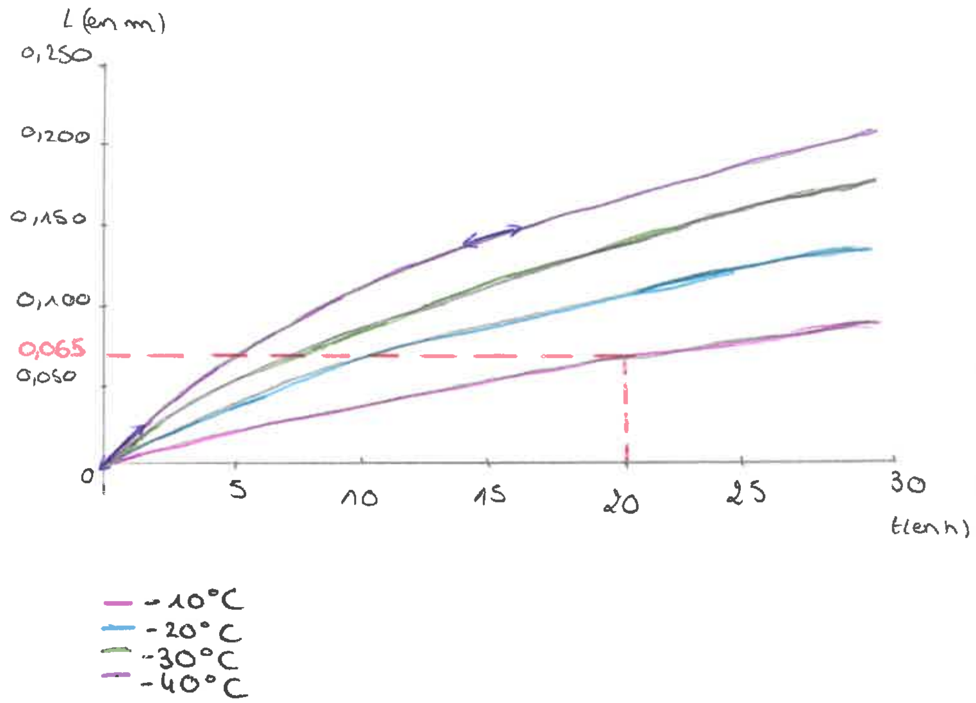
λ est déjà citée !

↳ pour se former la glace doit changer d'état eau → air
ce que permet le flux thermique

$\delta Q = -dm\, l_{solidification}$

$= -\mu_{gl} S\, dx\, l_{solidif.}$

→ on a besoin de $l_{fusion\, glace}$.



B

$$↳ \quad P_{th} = j_Q . S = -\lambda \left(\frac{T_E - T_0(t)}{L(t)} \right) S = \mu_{ge} S \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{} l_{fusion}$$

↓ vitesse de croissance de la glace

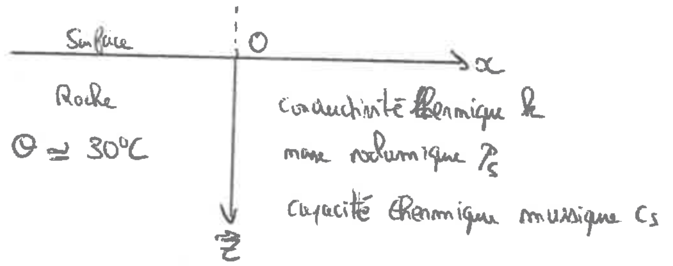
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

↳ équa. diff.

Groupe 6

Exercice n° VI. TD 9

a)

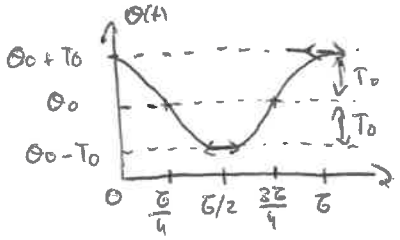


La surface est soumise à la variation de température extérieure

$T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0°C$

$T(z=0,t)$ est périodique grâce au cosinus compris entre $[-1;1]$

d'où $T(z=0,t)_{max} = \theta_0 + T_0$ et $T(z=0,t)_{min} = \theta_0 - T_0$



donc θ_0 est la température moyenne $= 0°C$

On peut proposer une valeur de $T_0 = 10°C$

à 3000 m d'altitude (Pointe de Fréjus) $T_{max} = 10°C$ $T_{min} \simeq -10°C$ OK

b) $\vec{j_Q}$ est le vecteur densité de flux thermique

on définit également la puissance thermique $P_{th} = \iint_S \vec{j_Q} \cdot \vec{dS}$

or en condition unidirectionnelle axiale, $P_{th} = j_Q \cdot S$

$\Leftrightarrow j_Q = \dfrac{P_{th}}{S}$ d'où $[j_Q] = W \cdot m^{-2}$

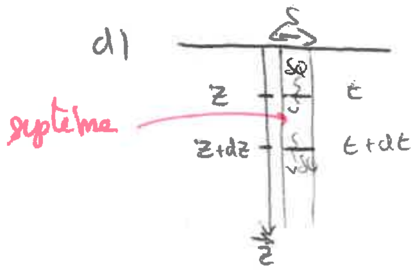
c) Loi de Fourier :

$\vec{j_Q} = -k \,\vec{grad}\, T$) loi linéaire $\Rightarrow$ grad T pas trop fort.

Cette loi est applicable lorsqu'il existe une différence de température conduisant à un gradient de température.

$[k] = \dfrac{[j_Q]}{[\text{grad}T]} = \dfrac{W \cdot m^{-2}}{K \cdot m^{-1}} = W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$

d)



$\delta Q = \delta Q(z) - \delta Q(z+dz)$

or $\delta Q = P_{th} \cdot dt$

$\Rightarrow \delta Q = j_Q(z) S\, dt - j_Q(z+dz) \cdot S\, dt$

$= \left[j_Q(z) - \left(j_Q(z) + \dfrac{\partial j_Q}{\partial z} dz \right) \right] S\, dt$

$\Rightarrow \delta Q = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z} dz\, S\, dt$

e) Le volume et la pression sont constantes donc

$dU \simeq dH = \delta Q$) en appliquant le 1er principe au système élémentaire.

donc $dU = -\dfrac{\partial j_Q}{\partial z} S\,dz\,dt$

or $dU = C\,dT = C \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

De plus, $C = c_S \rho_S S\,dz$ donc $dU = c_S \rho_S S\,dz \dfrac{\partial T}{\partial t} dt$

f) D'après la question précédente :

$$dU = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} S\,dz\,dt = c_S \rho_S S\,dz \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \quad c_S \rho_S \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}$$

On applique la loi de Fourier :

$$c_S \rho_S \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c_S \rho_S} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où l'on définit $D = \dfrac{k}{c_S \rho_S}$ comme le coefficient de diffusivité thermique

$$[D] = \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right]}{\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]} = \frac{K.s^{-1}}{K.m^{-2}} = m^2.s^{-1}$$

g) On cherche des solutions sous la forme $T(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z)}$

que l'on peut noter $\underline{T}$.

On injecte cette solution dans l'équation de la chaleur : (possible car éq. diff linéaire)

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2} \Leftrightarrow i\omega = D(-i\underline{k})^2 = -D\underline{k}^2$$

$$\underline{k}^2 = -\frac{i\omega}{D} \Rightarrow \underline{k} \overset{+}{=} \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1-i) = k' + ik''$$

$(1-i)^2 = -2i$

propagation (k') ; absorption (k'')

$k' > 0$ car propagation dans le sens $z \rightarrow$

$$\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - k' z)} e^{k'' z}$$

$$T(z,t) = \theta_0 + T_0 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}} z\right) e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}} z}$$

Groupe 6

h) $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\, z_e} = 0{,}01$

on cherche z_e tel que $\Theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\, z_e} < 0{,}01\Theta$

$\Rightarrow -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}\, z_e = \ln(0{,}01) \Rightarrow z_e = -\sqrt{\frac{2D}{\omega}} \ln(0{,}01)$

En remplaçant avec les valeurs numériques :

$\omega = \frac{2\pi}{86400 \times 365} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ rad \cdot s^{-1}$

$D = \frac{k}{C_s \rho_s} = \frac{3{,}00}{8{,}50 \cdot 10^3 \cdot 2{,}65 \cdot 10^3} = 1{,}33 \cdot 10^{-7}\ m^2 \cdot s^{-1}$

D'où $z_e = -\sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}33 \cdot 10^{-7}}{1{,}99 \cdot 10^{-7}}} \ln(0{,}01) = 5{,}32\ m \ll 2934\ m$

$z_e = 2934 - 2929$ ↑ pointe de Fréjus ↑ altitude où les variations de T sont inférieures à 1% du tunnel

Donc la température dans le tunnel est constante.) ok

↳ car situé à $z_F = 2934 - 1263 \simeq 1670m$ ↑ altitude sous la pointe de Fréjus

i) Pour des variations quotidiennes de température :

$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ rad \cdot s^{-1}$

D'où $e^{-\sqrt{\frac{2\omega}{D}}\, z_e} = e^{-\sqrt{\frac{2 \cdot 7{,}27 \cdot 10^{-5}}{1{,}33 \cdot 10^{-7}}} \cdot 5{,}32} = 4 \cdot 10^{-77}$

↳ carrément nul !

les variations quotidiennes de T ne sont pas ressenties à 5 m sous la pointe de Fréjus.

$T_{an} > T_{jour}$

$f_{an} < f_{jour}$

f_{an} : passent mieux — f_{jour} : coupées

$\Longrightarrow$ le sol est un filtre passe bas.

Exercice VII

Groupe 1

→ explicitez les 2 termes

a. D'après le premier principe, le bilan thermique s'écrit :

↳ à quel système ?

$$dU = \delta Q + P\,d\tau\,dt$$

Or, on est en régime stationnaire, donc : $dU = C\,dT = C\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)dt = 0$

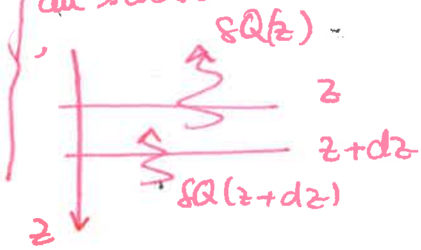
schéma ?

Par ailleurs, $\delta Q = -\delta Q_z + \delta Q_{z+dz}$

$$= j_Q(z)\,S\,dt - j_Q(z+dz)\,S\,dt$$

$$= \left(+\frac{\partial j_Q(z)}{\partial z}\,dz\right) S\,dt$$

à faire correspondre au schéma



Finalement, on a donc :

$$\left(+\frac{\partial j_Q(z)}{\partial z}\,dz\right) S\,dt + P\,d\tau\,dt = 0 \iff +\frac{\partial j_Q(z)}{\partial z}\,S\,dz\,dt + P\,S\,dz\,dt = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial j_Q(z)}{\partial z} = -P}$$

ici $\vec{j_Q} = j_Q\,\vec{u_z} = -\lambda \frac{dT}{dz}\,\vec{u_z}$

b. D'après la question précédente : $-\frac{\partial j_Q(z)}{\partial z} = P$, alors en utilisant la loi de Fourier, on obtient : $-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = P$, soit :

ou ; compensation des erreurs

$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{-P_0}{\lambda} e^{-z/H}$. En intégrant une première, puis une deuxième fois, il en résulte alors : $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{P_0 H}{\lambda} e^{-z/H} + A$, puis :

$$T(z) = \frac{-P_0 H^2}{\lambda} e^{-z/H} + Az + B \quad \text{(où A et B sont des constantes)}$$

En utilisant les conditions qui nous sont données, on en déduit alors ces constantes :

$$T(0) = \frac{-P_0 H^2}{\lambda} + B = \theta_0 \implies B = \theta_0 + \frac{P_0 H^2}{\lambda}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)(L_c) = \frac{P_0 H}{\lambda} e^{-L_c/H} + A = \frac{j_m}{\lambda} \implies A = \frac{j_m - P_0 H e^{-L_c/H}}{\lambda}$$

on applique la loi de Fourier

⚠ j_m est orienté selon $-\vec{u_z}$, pas de signe $-$

Finalement, on a : $\boxed{T(z) = \dfrac{j_m - P_0 H e^{-L_c/H}}{\lambda} z + \dfrac{P_0 H^2}{\lambda}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \Theta_0}$

B

c. D'après ce qu'on a établi à la question précédente :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0) = \frac{P_0 H}{\lambda} + \frac{j_m - P_0 H e^{-L_c/H}}{\lambda}$$

mais aussi, d'après la loi de Fourier :

$$\frac{\partial T}{\partial z}(0) = \frac{+j_s}{\lambda}$$

pour les mêmes raisons d'orientation

ainsi : $\boxed{j_s = -P_0 H\left(e^{-L_c/H} - 1\right) + j_m}$

d. On rappelle l'expression de $T(z)$:

$$T(z) = \frac{j_m - P_0 H e^{-L_c/H}}{\lambda} z + \frac{P_0 H^2}{\lambda}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \Theta_0$$

or, $j_m \gg P_0 H e^{-L_c/H}$ on peut donc simplifier l'expression :

→ pas évident ! faire l'AN !

$j_m = 0{,}035\ W.m^{-2}$
$HP_0 e^{-L_c/H} = 2{,}8.10^{-4}\ W.m^{-2}$

$$T(z) = \frac{j_m}{\lambda} z + \frac{P_0 H^2}{\lambda}\left(1 - e^{-z/H}\right) + \Theta_0$$

Alors, en $z = 1{,}70$ km :

$$T(1{,}70.10^3) = \frac{35.10^{-3}}{3{,}00} \cdot (1{,}70.10^3) + \frac{2{,}50.10^{-6} \cdot (10{,}0.10^3)^2}{3{,}00}\left(1 - e^{-1{,}70.10^3/10.10^3}\right) + 273$$

$$= 306\ K \longrightarrow \boxed{33°C}$$

↳ valeur qui correspond au modèle.

D'autre part :

$$j_s = -2{,}50.10^{-6} \cdot 10.10^3 \left(e^{-45\,000/10\,000} - 1\right) + 35{,}0.10^{-3}$$

$$\boxed{= +5{,}97.10^{-2}\ W.m^{-2}}$$

↳ le sol émet de l'énergie thermique.