PSI FEUILLE D'EXERCICES DE SCIENCES PHYSIQUES N° 10 13/11/2023
2023/2024
Thème : Diffusion particulaire

APPLICATIONS DIRECTES

1. Rappels des notions fondamentales sur la diffusion particulaire :

1. Quelles sont les conditions nécessaires pour observer le phénomène de diffusion particulaire ?
2. Définir le vecteur densité de courant particulaire.
3. Enoncer la loi de Fick, identifier tous les termes et donner les unités.
4. Démontrer l'équation locale de la diffusion, reliant la dérivée de la densité moléculaire par rapport au temps, à sa dérivée seconde par rapport à la position.

2. Diffusion de la vapeur d'eau :

1. On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait. Calculer un ordre de grandeur de la concentration molaire C_o de l'eau sous forme de vapeur pour une pression de 1 bar et la température de 100°C. R = 8,31 SI.

Un long tube vertical ouvert, de section S = 12cm^2, est maintenu sur une cuve à eau où l'eau est portée à ébullition, la pression étant égale à 1 bar. L'extrémité supérieure du tube est à la hauteur h=90 cm au-dessus de la surface libre de l'eau. Lorsque la vapeur d'eau, assimilée à un gaz parfait, s'évapore à travers le tube à la température supposée constante de 100°C, on suppose qu'il s'établit un régime stationnaire de diffusion.
Soit $\overrightarrow{j_N}$ le vecteur densité de flux molaire et D le coefficient de diffusion.

2. Faire un schéma. A quel endroit du tube la concentration en vapeur d'eau est-elle maximale ? Dans quelle direction et quel sens se déplacent les molécules de vapeur d'eau ? En déduire la direction et le sens de $\overrightarrow{j_N}$. Quelles sont les unités de j_N, vecteur densité de flux molaire ?
3. Sachant que la masse d'eau évaporée est de 90 mg par heure, déterminer un ordre de grandeur de la valeur de j_N dans le tube. $M(H_2O)$ = 18 g.mol^{-1}.
4. On rappelle que le régime stationnaire est atteint dans le tube. Montrer que le flux particulaire est constant et uniforme dans le tube.
5. En déduire la concentration molaire C(z) de la vapeur d'eau dans le tube en fonction de z, D, j_N et de C_o.
6. En déduire l'expression de C(h), au sommet du tube en fonction de ces mêmes variables.
7. Un courant d'air approprié permet d'éliminer complètement l'eau évaporée au sommet du tube en maintenant un état stationnaire de diffusion. Que vaut alors C(h) ?
8. En déduire un ordre de grandeur du coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans les conditions de l'expérience.
9. En déduire la durée caractéristique de la diffusion

3. Diffusion de dihydrogène à travers une membrane

Soit un ballon de baudruche rempli de dihydrogène ; ce gaz diffuse à travers le caoutchouc de l'enveloppe, modélisé par un problème à une dimension en régime stationnaire. En x = 0 la concentration massique de H_2 est c_o = 80 g.cm^{-3} et en x = L (épaisseur du ballon) = 0,1 mm la concentration massique c_L est négligeable.
Le coefficient de diffusion D de H_2 à travers la membrane est D = 10^{-9} m^2.s^{-1}. Quelle masse de H_2 perd un ballon de surface S = 0,1 m^2 par unité de temps ?

EXERCICES :

I. Décantation statique dans le traitement des eaux (CCINP PSI 2022)

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée.

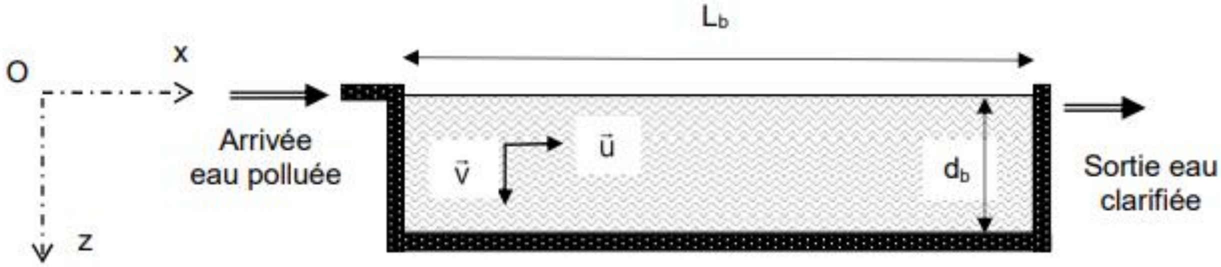


Figure 4 - Bassin de décantation

Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b, sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρe la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée.
On note ρ_o la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a : $\rho_0 > \rho e$
L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote z = 0.
On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon r, et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse des particules.
Ces particules sont également soumises à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_e \frac{4}{3}\pi r^3 \vec{g}$.
On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N0.
Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\vec{u} = \vec{0}$, et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement. Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z. Dans le bassin, on note n(z) la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude z = 0, soit $n_0 = n(z = 0)$.

1. À partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0 , ρe , r, η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_l = v_l\vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_l ? Exprimer en fonction de ρ_o, r et de η , le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (i.e. le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse $\vec{v}_l$.

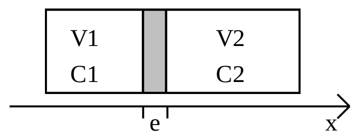
2. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules.
   On note : $\vec{j} = j(z)\,\vec{e}_z$, le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de $\vec{j}$. Puis exprimer le vecteur $\vec{j}$ en fonction de n(z) et de $\vec{v}_l$.

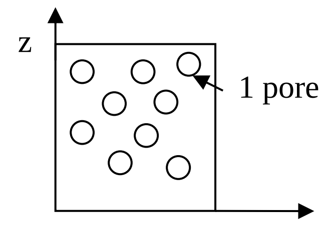
En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et : $\vec{j}_D = j_D(z)\,\vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

3. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant.
4. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0, D et de vl l'expression de la densité de particules n(z). Représenter graphiquement la fonction n(z) en fonction de z.
5. Par conservation du nombre de particules sur une tranche verticale du bassin, exprimer n_0 en fonction de N0, D, d_b et de v_l.

6. Définir en fonction de d_b, D et de v_l, un temps caractéristique τ_S de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.
7. Exprimer n_0 en fonction de N0, τ_S et de τ_D . À quelle condition portant sur τ_S et τ_D , la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

II. Diffusion moléculaire à travers une membrane :





membrane poreuse, d'épaisseur e vue de face

La diffusion de molécules à travers une membrane est utilisée dans des domaines très divers, en médecine par exemple.
On considère le dispositif représenté ci-contre
Les deux compartiments séparés par une membrane verticale poreuse contiennent une même solution moléculaire, mais à des concentrations molaires volumiques différentes C_1 et C_2. Leurs volumes constants seront notés respectivement V_1 et V_2. La membrane de surface S et d'épaisseur e, comporte par unité de surface n pores cylindriques d'axe horizontal normal à la paroi. Les pores sont supposés identiques.

1. Dans un premier temps, on ne considère qu'un seul pore, de longueur e. Justifier qu'un pore est siège d'un phénomène de diffusion particulaire. Etablir l'équation locale de la diffusion dans ce pore. On appelle D le coefficient de diffusion des molécules dans la membrane et C(x,t) la concentration molaire à l'abscisse x et à l'instant t dans le pore. Quelles sont les unités de D ?

2. A une date t les concentrations maintenues homogènes sur les volumes V_1 et V_2 sont $C_1(t)$ et $C_2(t)$. Exprimer C(x,t) lorsque le régime de diffusion stationnaire est atteint dans le pore en fonction de e, $C_1(t)$ et $C_2(t)$.

3. En déduire le flux molaire à travers un pore, puis le flux molaire à travers toute la membrane, que l'on exprimera en fonction de $\Delta C(t) = C_1(t) - C_2(t)$.

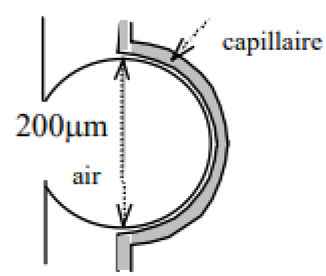
4. Déduire que le vecteur densité de flux molaire à travers toute la membrane est de la forme: $\vec{j}_m = K\Delta C\vec{i}$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire de Ox.
Exprimer K, appelé perméabilité de la membrane, en fonction de n, D, e et r rayon d'un pore. Quelles sont les unités de K ?

5. AN: Calculer le rayon d'un pore.$K = 10^{-6}$ SI ; $n = 10^6$ pores par cm^2 ; e = 10 µm ; $D = 10^{-9}$ SI

6. On suppose que $C_1 t) > C_2(t)$. Exprimer dn_1 /dt la variation de la quantité n_1 du compartiment 1 en fonction du temps, en fonction de $C_1(t)$ et V_1 puis en fonction de S, K et $\Delta C(t)$.
Idem pour dn_2 /dt dans le compartiment 2.
En déduire l'équation différentielle dont $\Delta C(t)$ est solution.

7. Intégrer cette équation et tracer $\Delta C(t)$. Quelle est la constante de temps de ce phénomène ?
Au bout de quelle durée la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ?
Données : $V_1 = 2$ L ; $V_2 = 1$ L ; $S = 200\ cm^2$.

III. Transport d'oxygène dans le sang



Le sang joue un rôle moteur dans le transport de l'oxygène et des nutriments vers les organes du corps et le transport des déchets produits par ces organes vers des organes spécialisés dans le traitement des déchets. Le cœur joue le rôle d'une pompe faisant circuler le sang vers les organes. Le sang arrive en contact avec les organes en passant par des artères, puis des artérioles et finalement des capillaires. Il revient au cœur en partant des capillaires, transitant par les veinules pour aboutir aux veines.

Les organes ont un besoin régulier en oxygène. Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans un milieu aqueux est $D_{eau} \approx 10^{-9}$ m^2.s^{-1} .

1. Montrer, par une estimation numérique qualitative, que le transport de l'oxygène vers un organe ne saurait se faire par le seul phénomène de diffusion à travers la peau. Par quel mécanisme dominant le sang transporte-t-il l'oxygène ?

Le sang se charge en oxygène par diffusion de l'oxygène contenu dans les alvéoles du poumon vers le capillaire périphérique de l'alvéole. Les alvéoles sont supposées sphériques (Fig. ci-contre), de rayon $R_{alv} \approx 10^{-4}$ m. Le sang circule dans le capillaire à la vitesse moyenne $v \approx 10^{-3}$ m.s^{-1}.

2. Calculer le temps de contact, δts, du sang avec l'alvéole. Le rayon du capillaire est $R_{cap} \approx 10^{-5}$ m.

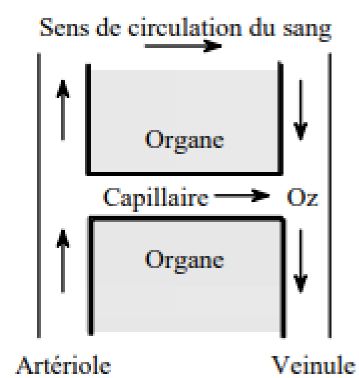
Le coefficient de diffusion de l'oxygène dans l'air est
$D_{air} \approx 1{,}8\times10^{-5}$ m^2.s^{-1} .

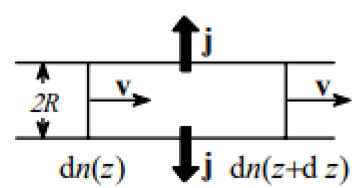
3. Estimer le temps de diffusion d'une molécule d'oxygène par ce mécanisme, en convenant que c'est la somme du temps de diffusion dans l'air (alvéole) et du temps de diffusion en milieu aqueux (capillaire). Montrer que l'échange d'air entre l'alvéole et le sang a maintenant le temps de s'établir.

IV. Alimentation d'un organe en nutriments

Le sang joue un rôle moteur dans le transport de l'oxygène et des nutriments vers les organes du corps et le transport des déchets produits par ces organes vers des organes spécialisés dans le traitement des déchets. Le cœur joue le rôle d'une pompe faisant circuler le sang vers les organes. Le sang arrive en contact avec les organes en passant par des artères, puis des artérioles et finalement des capillaires. Il revient au cœur en partant des capillaires, transitant par les veinules pour aboutir aux veines.

L'alimentation d'un organe en un nutriment transporté par le sang s'effectue par échange entre le sang et l'organe, à travers les parois des capillaires. Ces capillaires sont des tubes cylindriques de rayon R et de longueur L, joignant une artériole à une veinule. On note $C_c(z)$ la concentration molaire (mol.m^{-3}) d'un nutriment dans le capillaire et C_{org} celle du nutriment dans l'organe à proximité de la surface du capillaire. Le capillaire cède à l'organe le nutriment avec une densité de courant molaire (flux surfacique) $j = \gamma\,(C_c(z) - C_{org}(z))$ où γ est un paramètre constant.





1. Le nutriment étant transporté par le sang, quel est la nature du phénomène de transport étudié, diffusion ou convection ?
2. En déduire l'expression du vecteur de densité molaire de nutriment dans le sang en fonction de Cc(z) et v_S, vitesse du sang.
3. Déterminer la dimension de γ .

On considère le régime stationnaire.

4. Effectuer le bilan de matière en nutriment, exprimant l'équilibre dynamique des flux entrant et sortant entre les tranches de cotes z et z + d z et en déduire l'équation différentielle d'ordre 1, vérifiée par Cc (z), en supposant que le sang a une vitesse d'écoulement constante, v_S . Cette équation fait intervenir la fonction $C_{org}(z)$.
5. On admet ici que Corg (z)= K, une constante ; déterminer alors $C_c(z)$ en fonction de K, $C_c(0)$ et de la longueur caractéristique $L_0 = Rv_S / 2\gamma$.

On considère que l'organe est correctement alimenté si $\left|\frac{C_c(L)-K}{C_c(0)-K}\right| \geq 30\%$.

6. Sachant que $v_S = 2{,}8\times10^{-3}$ m.s^{-1} , R = 10^{-5}m et L =1mm, déterminer la valeur maximale du coefficient γ pour que la relation précédente soit satisfaite.