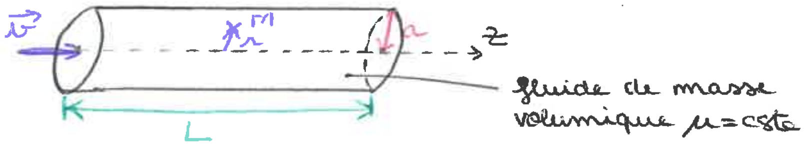
Ex 1. TD 11

LARGEAU Garance
BRECHBIEHL Emma
BLONDEL Agathe



écoulement stationnaire

1) Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont le plus appropriés
Le champ des vitesses suit la direction $\vec{u_z}$
Il dépend uniquement des paramètres sur r et z car invariance de l'écoulement par rapport à l'angle θ.

$$\vec{v} = v(r,z)\,\vec{u_z}$$

Or le fluide a une masse volumique constante et nous avons un écoulement stationnaire donc $\operatorname{div}(\mu\vec{v}) = 0$ donc $\mu \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

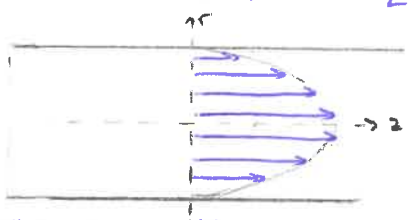
$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$

en coordonnées cylindriques : $\boxed{\operatorname{div}(\mu\vec{v}) = \frac{\mu}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \mu\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$

or $v_r = 0$ et $v_\theta = 0$ donc $\operatorname{div}(\mu\vec{v}) = \mu\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
$\Rightarrow \vec{v}$ est indépendant de z $\vec{v} = v(r)\,\vec{u_z}$

2) On a : $v(r) = k(a^2 - r^2)$
Donc v ne dépend pas de r ~~n'a pas de composante sur z~~ donc $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
Donc $\boxed{\operatorname{div}(\mu\vec{v}) = \cancel{\frac{\mu}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r}} = 0}$
Oui c'est cohérent car nous avons un écoulement stationnaire
$\vec{v}(M) = v_r(r,\theta,z)\,\vec{u_r} + v_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u_\theta} + v_z(r,\theta,z)\,\vec{u_z}$
ici $v_r(r,\theta,z) = 0$ et $v_\theta(r,\theta,z) = 0$ car $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u_z}$

3) $v = k(a^2 - r^2)$ $\quad [m.s^{-1}] = k\,[m^2]$ $\quad$ donc $\boxed{[k] = m^{-1}.s^{-1}}$



profil des vitesses

B

$\vec{v} = v\,\vec{u_z}$ donc $\vec{dS} = dS\,\vec{u_z} = r\,dr\,d\theta\,\vec{u_z}$

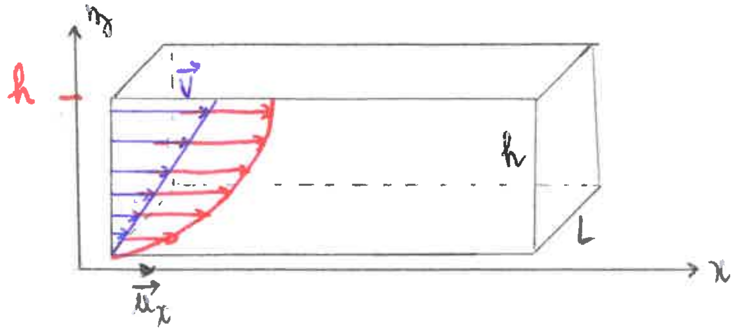
4) $D_m = \iint \mu\vec{v}\cdot\vec{dS} = \iint \mu k(a^2 - r^2)\,r\,dr\,d\theta$

$$= \mu k \int_0^a (a^2 r - r^3)\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \mu k \left[a^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a \times 2\pi$$

$\boxed{D_m = \frac{\mu k a^4 \pi}{2}}$ $= \frac{[kg.m^{-3}.m^{-1}.s^{-1}.m^4]}{2} = [kg.s^{-1}]$ → la relation est bien homogène

5) $\boxed{v_{moy}} = \frac{D_m}{\mu S} = \frac{\cancel{\mu} k a^{\cancel{4}\,2} \cancel{\pi}}{\cancel{\mu}\,2\cancel{\pi}\cancel{a^2}} = \underline{\frac{k a^2}{2}}$ B

TD M : Exercice 2 BARRY Yani ; BOILLOT Raphaël ; CAPON Romain



eau de masse volumique μ

1) Le champ des vitesses est donné par $\vec{v}(z) = az(z-2h)\,\vec{u}_x$

* L'écoulement est stationnaire car la vitesse ne dépend pas du temps.
* L'écoulement n'est pas uniforme car $v(z)$ n'est pas une fonction ~~affine~~ constante
* On donne le vecteur densité de courant de masse :

$$\vec{j}_m = \mu \vec{v}(z)$$

$\frac{dv}{dz} = 2az - 2ah$
$= 0$ pour $z = h$

2) (voir schéma) } ⚠ $v(z)$ est une fonction paraboliques !
$v(0) = 0$ $v(h) = ah(-h) = -ah^2$ → max de $v(z)$

$\vec{v}$ doit être strictement positive donc a l'est aussi car $az^2 > -a2h$

→ un vecteur ne peut pas être positif ou négatif → il est colinéaire à $+\vec{u}_x$ ou $-\vec{u}_x$

$\boxed{a < 0 \text{ car } v(h) = -ah^2 > 0}$

On effectue une analyse dimensionnelle :

$$[\|\vec{v}(z)\|] = [az(z-2h)]$$

$$\Leftrightarrow [a] = \frac{[\vec{v}(z)]}{[z(z-2h)]} = \frac{m \cdot s^{-1}}{m^2} = \underline{m^{-1} \cdot s^{-1}}$$

Vous ne pouvez PAS comparer 2 grandeurs qui n'ont pas la même dimension

3) On calcule le débit massique D_m avec la relation :

$$D_m = \iint_S \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} = \mu \iint (az^2 - 2azh)\,dy\,dz = \mu \int_0^L dy \int_0^h (az^2 - 2azh)\,dz$$

$$= \mu L\left(a\frac{h^3}{3} - 2a\frac{h^3}{2}\right) = -2\mu L a \frac{h^3}{3}$$

$D_m > 0 \Rightarrow a < 0$

$\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$
donc $\vec{dS} = dS\,\vec{u}_x$
$= dy\,dz\,\vec{u}_x$

On en déduit la vitesse débitante V_{moy} :

$$V_{moy} = \frac{D_m}{\mu S} = \frac{-2\cancel{\mu}\cancel{L}a\frac{h^{\cancel{3}2}}{3}}{\cancel{\mu}\cancel{L}\cancel{h}} = -\frac{2}{3}\underset{m^2}{h^2}\,a \,/\, m^{-1} \cdot s^{-1}$$

⇒ $m \cdot s^{-1}$ donc la relation est homogène

et $\underline{a < 0}$

Groupe 5 : Ex III, TD n°11

1) $\underbrace{v_x(x,z,t)}_{m.s^{-1}} = a\underbrace{\left(h(x,t).z - \frac{z^2}{2}\right)}_{m^2}$

$$\boxed{\text{Donc } [a] = \frac{m.s^{-1}}{m^2} = m^{-1}.s^{-1}}$$

Certaines grandeurs comme le champ des vitesses et l'épaisseur $h(x,t)$ dépendent du temps donc l'écoulement n'est pas stationnaire.

$\vec{j}_m(M,t) = \mu(M,t)\vec{v}(M,t)$ le vecteur densité de courant de masse.

L'écoulement est incompressible donc $\mu = cste$ et $div(\mu\vec{v}) = \mu\, div(\vec{v})$

Or, ici, $div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x(x,z,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(h(x,t).z - \frac{z^2}{2}\right)\right] = az\frac{\partial}{\partial x}h(x,t)$

$$\boxed{\text{Ainsi, } div(\vec{j}_m) = \mu\, div(\vec{v}) = \mu a z\frac{\partial}{\partial x}h(x,t)}$$

2) $div(\vec{v}(M,t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x(x,z,t)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(h(x,t)z - \frac{z^2}{2}\right)\right] = 0$

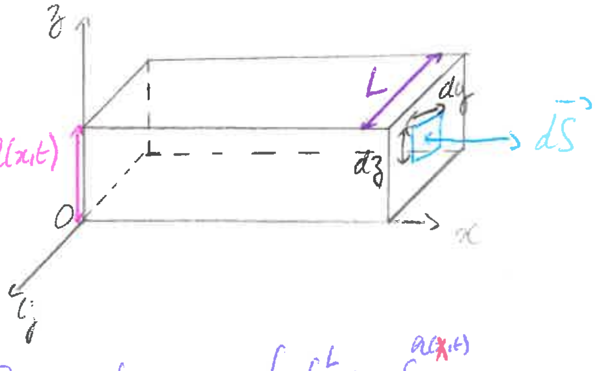
$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}(a\,h(x,t)z) - \cancelto{0}{\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{z^2}{2}\right)} = 0$

$\Leftrightarrow az\frac{\partial}{\partial x}h(x,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = 0$

$\boxed{\text{Ainsi, } h(\cancel{x},t) = \cancel{cste} \quad \text{La goutte est donc un pavé.}}$ → ne dépend pas de x $\underline{h(t)}$

dont l'épaisseur $h(t)$ diminue au cours du temps lorsque la goutte s'étale

3)



$D_m = \underset{\substack{\text{à travers } S\\ \text{ouverte}}}{\Phi}(\mu\vec{v}) = \iint_S \mu\vec{v}(x,z,t)\,\vec{dS}$

$= \mu\iint_S v(x,z,t)\vec{u_x}\,dS\,\vec{u_x}$

$= \mu a\iint_S\left(h(\cancel{x},t)z - \frac{z^2}{2}\right)dy\,dz$

Donc $D_m = \mu a\left[\int_0^L dy\int_0^{h(\cancel{x},t)}\left(h(\cancel{x},t)z - \frac{z^2}{2}\right)dz\right]$

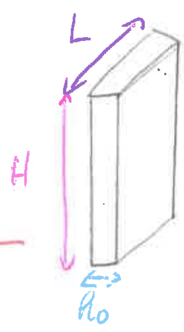
$= \mu a L\left[h(\cancel{x},t)\int_0^{h(x,t)} z\,dz - \int_0^{h(\cancel{x},t)}\frac{z^2}{2}dz\right]$

$= \mu a L\left[h \times \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right]$

$$\boxed{\text{Ainsi, } D_m = \mu a L\frac{2h^3(\cancel{x},t)}{6}} = \frac{\mu a L h^3(t)}{3}$$

1/2

4)



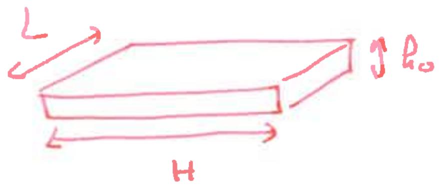
$$D_m = \frac{m}{T} = \frac{\mu H_0 h_0 L}{T} \iff T = \frac{\mu H_0 h_0 L}{D_m}$$

Or, $D_m = \mu a L \dfrac{2h_0^3}{6}$

$$\boxed{\text{Donc } T = \frac{6\mu H_0 h_0 L}{\mu a L 2 h_0^3} = \frac{6 H_0}{a 2 h_0^2}}$$

$$\boxed{\text{AN: } T = \frac{6 \times 10.10^{-2}}{10^7 \times 2 \times (0{,}5.10^{-3})^2} = 0{,}12 \text{ s}}$$

durée de vie du film d'eau = durée mise pour passer de la position verticale à la position horizontale



2/2