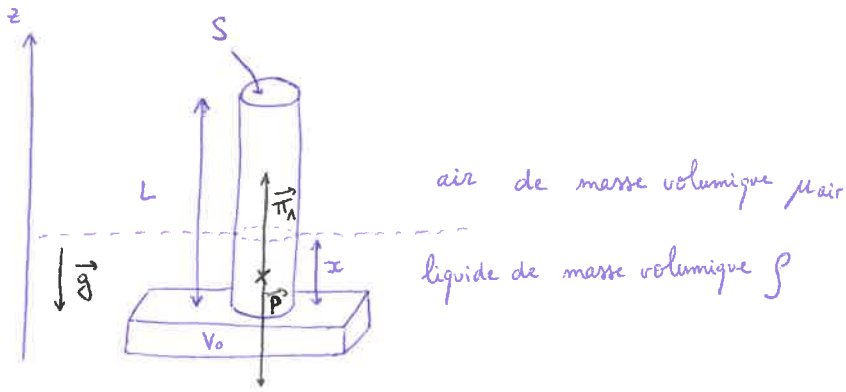




Système : densimètre de masse  $M$  ✓

Le système est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et à la poussée d'Archimède  $\vec{\pi}_A$  ✓

À l'équilibre on peut appliquer la première loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\vec{\pi}_A + \vec{P} = \vec{0} \quad \checkmark$$

avec  $\vec{\pi}_A = \vec{\pi}_{\text{air}} + \vec{\pi}_{\text{liquide}} = -\mu_{\text{air}} V_{\text{air}} \vec{g} - \rho V_{\text{liq}} \vec{g}$  ,  $\left. \begin{array}{l} V_{\text{air}} = \text{volume de solide dans l'air} \\ V_{\text{liq}} = \text{volume de solide dans l'eau} \end{array} \right\} \text{ voir}$

et  $m\vec{g} = \mu_d (V_{\text{air}} + V_{\text{liq}}) \vec{g}$  , avec  $\mu_d$  la masse volumique du densimètre.

$$\mu_d = \frac{M}{SL + V_0} \quad , \quad V_{\text{air}} = (L-x)S \quad , \quad V_{\text{liq}} = V_0 + xS \quad \left. \right\} \text{ voir}$$

↳ pas intéressant. On connaît  $M$  = masse du densimètre

D'où

$$-\mu_{\text{air}} (L-x)S - \rho (V_0 + xS) + \frac{M}{SL + V_0} ((L-x)S + V_0 + xS) = 0$$

$$\rho = \left[ \frac{M}{SL + V_0} ((L-x)S + V_0 + xS) - \mu_{\text{air}} (L-x)S \right] \cdot \frac{1}{V_0 + xS} \quad \left. \right\} \text{ voir}$$

$$= \left[ M - S\mu_{\text{air}} (L-x) \right] \cdot \frac{1}{V_0 + xS}$$

$$\rho = \frac{M - SL\mu_{\text{air}} + \cancel{SL\mu_{\text{air}}x}}{V_0 + xS}$$

1) expression non homogène  
on peut supposer  $M \gg SL\mu_{\text{air}}(L-x)$

$$\rho \approx \frac{M}{V_0 + xS}$$

$\rho$  n'est pas de la forme  $Ax + B$  avec  $A$  et  $B$  des constantes,

donc la graduation en intensité n'est pas linéaire. ✓ B

1. On applique le principe fondamental de la statique à l'atmosphère en équilibre isotherme :

En supposant un axe  $Oz$  ascendant :

$$\vec{\text{grad}}(P) = \rho \vec{g} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

En projetant sur cet axe  $Oz$  :  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$

On l'air est un fluide compressible donc  $\rho = \rho(P)$

On trouve que  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m \cdot M_{\text{air}}}{V} = \frac{P(z) \cdot M_{\text{air}}}{RT}$  d'après la loi des gaz parfaits.

Ainsi  $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_{\text{air}} \cdot g}{RT} P(z)$ , donc  $\frac{dP}{dz} + \frac{M_{\text{air}} g}{RT} P(z) = 0$

On pose  $H = \frac{RT}{M_{\text{air}} g}$  la hauteur d'échelle. C'est la hauteur caractéristique telle qu'à  $z = 3H$ , 95% de la pression initiale aura diminué.

On a donc  $\frac{dP}{dz} + \frac{P(z)}{H} = 0$ , ainsi  $P(z) = A e^{-z/H}$

Il apparaît, d'après l'énoncé, que  $P(z=0) = A = P^0$

Subséquent,  $P(z) = P^0 e^{-z/H}$

Applications numériques : à  $T = 290 \text{ K}$  on a :

$$H = \frac{RT}{M_{\text{air}} g} = \frac{8,314 \cdot 290}{29 \times 10^{-3} \times 9,81} = 8475 \text{ m} = 8,48 \text{ km}$$

De plus d'après ce qui a été dit précédemment, on peut exprimer  $\rho(P)$  :

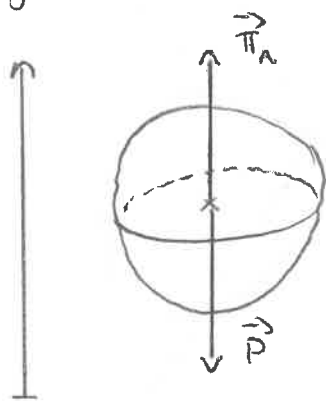
$\rho(P) = \frac{M_{\text{air}}}{RT} P(z)$ . Donc  $\rho_0 = \frac{M_{\text{air}} P^0}{RT} = \frac{29 \times 10^{-3} \cdot 10^5}{8,314 \cdot 290} = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

2. Supposons que la mangelfière fasse 20 m de haut, évaluons la différence de la pression de l'air exercée en haut, et en bas de cette dernière : si la mangelfière est au sol :

$$\Delta P = P(z=0) - P(z=20) = P^0 (1 - e^{-\frac{20}{H}}) \approx 235 \text{ Pa} \ll P^0$$

on peut donc négliger cette variation et supposer que la pression de l'air est uniforme autour de la mangelfière.

3. On assimile la mangefière à un ballon unique, une sphère de rayon  $r = 5 \text{ m}$  :



système : { mangefière assimilée à un ballon, de masse totale  $M$  } ✓

bilan des forces :  $\vec{\pi}_A$  : la poussée d'Archimède

$\vec{P}$  : le poids ✓

Pour que la mangefière s'envole, il faut  $\|\vec{\pi}_A\| > \|\vec{P}\|$  ✓

Il faut donc que  $\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot g > M \cdot g$  ✓

Donc, il faut que  $\frac{\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot P(z)}{RT} > M$ .

Au sol,  $P(z) = P^0 = 10^5$ , il faut donc que  $\frac{25 \times 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot (\frac{4}{3} \pi \cdot 5^3)}{8,314 \cdot 290} > M$

630 kg →

$$\approx 629,8 > 600$$

⇒ la mangefière pourra s'envoler

B

4. À l'altitude plafond,  $\pi_A = P$  ✓

Donc  $\frac{\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot P(z_p)}{RT} = M \Leftrightarrow e^{-\frac{z_p}{H}} = \frac{M \cdot R \cdot T}{\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot P^0}$

$$\Leftrightarrow z_p = \ln\left(\frac{\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot P^0}{M \cdot R \cdot T}\right) \cdot H$$

$$\text{A.N.} = \ln\left(\frac{25 \times 10^{-3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \cdot 10^5}{600 \cdot 8,314 \cdot 290}\right) \cdot 8475 = 410,5 \text{ m} \approx 410 \text{ m}$$

5. On a cette fois-ci  $M' = M - \frac{M}{20} = 570 \text{ kg}$  ✓

$$\text{Ainsi } z'_p = \ln\left(\frac{\rho_{\text{air}} \cdot V \cdot P^0}{M' \cdot R \cdot T}\right) \cdot H = \ln\left(\frac{25 \times 10^{-3} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 \cdot 10^5}{570 \cdot 8,314 \cdot 290}\right) \cdot 8475 = 845,2 \text{ m} \approx 845 \text{ m}$$

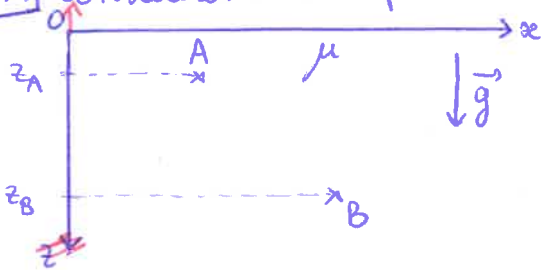
On observe qu'en diminuant la masse totale de seulement  $\frac{1}{20}$ , l'altitude plafond se voit plus que double.

T.B

Ex III

Cylindre en équilibre :

1. Considérons deux points A et B d'un liquide incompressible :

La pression dans ce liquide ne dépend que de  $z$ .  
la relation fondamentale de la statique fournit :

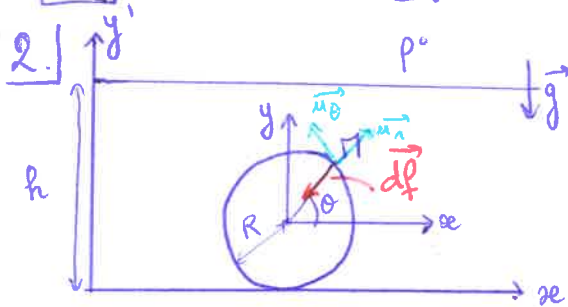
$$\text{grad } P = \mu \vec{g} \Leftrightarrow \frac{dP}{dz} \vec{u}_z = -\mu g \vec{u}_z$$

$$\text{sur } \vec{u}_z : \frac{dP}{dz} = -\mu g \Rightarrow P(z) = \mu g z + C \text{ constante}$$

$$\text{or } P(0) = C \text{ donc } \boxed{P(z) = -\mu g z + P(0)}$$

La différence de pression entre A et B est alors :

$$\boxed{\Delta P = P(B) - P(A) = \mu g (z_B - z_A)}$$

 $P(z)$  est de croissanceDe la relation fondamentale de la statique,  
on tire  $\frac{dP}{dy'} = -\mu g$  en projetant sur  $y'$ .

$$\Rightarrow P(y') = -\mu g y' + C' \text{ or } P(R) = -\mu g h + C' = P^0$$

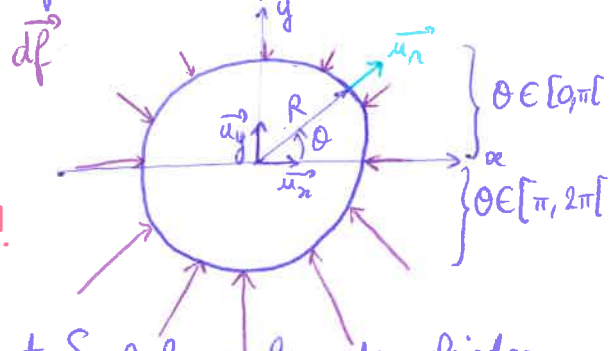
$$\text{d'où } \boxed{P(y') = \mu g (h - y') + P^0}$$

Or,  $y = y' - R$  donc  $P(y) = \mu g (h - (y + R)) + P^0$  et l'altitude de  $\Pi$  sur  $y$  est  
donnée par  $R \sin \theta$  donc :

$$\boxed{P(\Pi) = \mu g (h - R(\sin \theta + 1)) + P^0} \text{ oui}$$

3. Orientons la surface latérale du cylindre immergé :  $d\vec{S} = dS \vec{u}_n$  ✓Alors  $dS = R d\theta dz$ .La force élémentaire  $d\vec{f}$  s'écrit  $\boxed{d\vec{f}} = -P(\Pi) d\vec{S} = \boxed{[\mu g (h - R(\sin \theta + 1)) + P^0] dS \vec{u}_n}$ .

de pression

4. Les forces de pression élémentaires exercées sur le cylindre sont dirigées  
sur  $\vec{u}_n$ .Or, d'après les variations de  $\sin \theta$ , pour  $\theta \in [\pi; 2\pi[$ ,  $\|d\vec{f}\|$  est plus grande  
que pour  $\theta \in [0; \pi[$ .Mais, quand un cylindre est immergé dans un fluide de pression uniforme,  
toutes les forces de pression se compensent.Ici, il y a surcompensation des forces de pression  
exercées par le liquide pour  $\theta \in [0; \pi[$  donc  
la résultante de toutes les forces de pression  
est orientée suivant  $+\vec{u}_y$ . Alors  $\boxed{\vec{u} = \vec{u}_y}$  oui!5. D'après l'indication de l'énoncé, en notant  $S_{\text{cyl}}$  la surface du cylindre

$$F_p = \int_{S_{\text{cyl}}} d\vec{f} \cdot \vec{u} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h d\vec{f} \cdot \vec{u}_y \quad \text{et } \boxed{\vec{u}_n \cdot \vec{u}_y = \sin \theta} \quad \checkmark$$

On remplace  $d\vec{f}$  puis on calcule.

$$F_p = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L [\mu g (R - R(\sin\theta + 1)) + P_0] dS \sin\theta \quad \text{où } dS = R d\theta dz \quad 2/2$$

$$\Leftrightarrow F_p = - \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \mu g h R d\theta dz \sin\theta}_{(1)} + \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \mu g R (\sin\theta + 1) R d\theta dz \sin\theta}_{(2)} - \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L P_0 R d\theta dz \sin\theta}_{(3)}$$

$$\text{où } (1) = \mu g h R \left[ z \right]_0^L \left[ -\cos\theta \right]_0^{2\pi} = \mu g h R L [-1 - (-1)] = 0$$

$$(2) = \mu g R^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L (\sin^2\theta + \sin\theta) d\theta dz \quad \text{or } \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2) = \mu g R^2 \left[ z \right]_0^L \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} + \sin\theta \right) d\theta = \mu g R^2 L \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{2} \cdot [0]_0^{2\pi}}_{= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi} - \underbrace{\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi}}_{= 0} + \underbrace{[-\cos\theta]_0^{2\pi}}_{= 0} \right]$$

$$\Leftrightarrow (2) = \mu g R^2 L \pi$$

$$(3) = P_0 R \left[ z \right]_0^L \left[ -\cos\theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

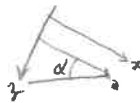
$$\text{D'où } F_p = (1) - (2) + (3) = 0 + (2) + 0 = + \mu g \pi R^2 L$$

6.] Alors, la résultante des forces de pression exercées sur le cylindre s'exprime :  $\vec{F}_p = + \mu g \pi R^2 L \vec{u}_y = \mu V_{\text{cylindre}} \vec{g}$

ce qui est l'expression de la poussée d'Archimède sur ce cylindre pleinement immergé dans le liquide. Le théorème d'Archimède est vérifié.

- 1) Le liquide est sur un plan incliné, il est donc soumis à la pesanteur donc il va s'écouler selon l'axe  $x$ .

↳ = hypothèse de l'écoulement

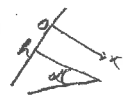


↳ mais vous ne répondez pas à la question posée  
 $v(z=h)=0 \rightarrow$  condition d'adhérence  $v(z=0) \neq 0$  pas d'adhérence avec l'air  $\Rightarrow v(z)$

- 2) Si on suppose le fluide incompressible, on a  $\text{div } \vec{v} = 0$  donc  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  ce qui nous indique que  $v$  ne dépend pas de  $x$ . Le qui correspond à l'hypothèse donnée par l'énoncé.

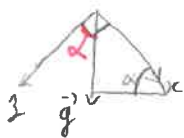
- 3) En  $z=0$  on a un contact entre le fluide et l'air, or la viscosité de l'air est négligée.

Ainsi  $\|\vec{F}_T\| = 0 = \eta S \left( \frac{dv}{dz} \right) (z=0)$

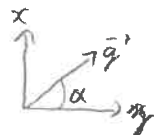


En  $z=h$ , nous avons un contact entre le solide et le fluide, d'après la condition d'adhérence  $v(z=h)=0$  et  $\|\vec{F}_T\| = \eta S \left( \frac{dv}{dz} \right) (z=h)$

- 4) On doit tout d'abord projeter  $\vec{g}$  sur  $x$  et  $z$ :



Avec le schéma on déduit  $(\vec{g}_x, \vec{g}_z)$  qui est :



donc  $\vec{g} = g (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$

Ainsi la relation projetée :

sur  $x$  :  $g \mu \sin \alpha + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$

sur  $z$  :  $g \mu \cos \alpha = \frac{\partial p}{\partial z}$

5) On intègre la relation projetée sur  $z$ :

$$p = \rho g \cos \alpha z + f(x) \text{ or en } z=0 \rightarrow p(0) = p^0$$

$$\Rightarrow cste = p^0 = f(x)$$



d'où  $\boxed{p = \rho g \cos \alpha z + p^0}$  ✓

6) En dérivant la relation trouvée Q5) par rapport à  $x$  on obtient  $\frac{dp}{dx} = 0$  ✓

Ainsi la relation projetée sur  $x$  donne:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{\mu}{\eta} g \sin \alpha \\ \frac{dv(z)}{dz} = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} z \text{ avec } v(0) = 0 \text{ car } \frac{dv}{dz}(0) = 0 \text{ d'après Q3) } \underline{B} \\ v(z) = -\frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} z^2 + cste \text{ or en } z=h \quad v(z=h)=0 \text{ ---} \\ \text{donc } cste = \frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} h^2 \text{ ---} \end{cases}$$

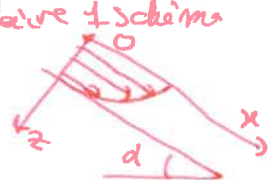
$$\boxed{v(z) = -\frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} (z^2 - h^2)} \rightarrow \text{profil de vitesse parabolique } \underline{TB}$$

• quand  $\alpha = 0$ , le plan n'est pas incliné donc le liquide ne s'écoule plus

donc  $\vec{v} = \vec{0}$ . ✓

De même la pression de part chaque côté du fluide sera la même  $p = p^0$ .

$\boxed{p(z) = \rho g z + p^0}$  et toujours une fonction affine.



7) Les forces tangentielle sont les forces de viscosité:

$$\vec{F}_T = -\eta S \frac{dv}{dz} \vec{e}_x \text{ or d'après Q6) } \frac{dv}{dz} = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} z$$

or le ~~pot~~ se trouve en  $z=h$

$$\vec{F}_T = -\eta S \frac{dv}{dz}(h) \vec{e}_x = S \mu g h \sin \alpha \vec{e}_x$$



$$[F_T] = N = m^2 \cdot kg \cdot m^3 \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m = kg \cdot s^{-2} \cdot m = N \quad \checkmark$$

• Pour l'eau et l'huile, les forces de viscosité seront les mêmes puisque  $\eta$  n'intervient pas et on suppose que  $\mu_{huile} = \mu_{eau}$ .

$\underline{B}$   $\frac{F_T}{S}$  ne dépend pas de la masse volumique du fluide.

AN ?  $\frac{F_T}{S} = \mu g h \sin \alpha$  pour  $\alpha = 45^\circ$   $h = 1 \text{ mm}$   
 $= 10^3 \times 10 \times 10^{-3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \text{ ou Pa.}$

→ définition de la contrainte tangentielle

Suive TD 12 Ex IV

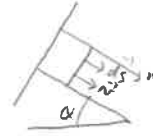
8) d'après la définition du débit volumique :  $\vec{Q} = dS \vec{u}_x = dy dz \vec{u}_x$   
 or  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  donc  $dS = dS \vec{u}_x = dy dz \vec{u}_x$

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^L v(z) dz \int_0^L dx$$

$$= \left( -\frac{\mu g h^3}{6\eta} + \frac{\mu h^3}{2\eta} g \right) \times L \sin \alpha$$

$$= \frac{\mu h^3 L}{3\eta} g \sin \alpha$$

$$\text{et } \bar{v}_{\text{moy}} = \frac{D_v}{S} = \frac{\mu h^3 L}{3\eta \times L \times h} g \sin \alpha = \frac{\mu h^2}{3\eta} g \sin \alpha$$



9) A.N  $\bar{v}_{\text{moy eau}} = \frac{10^3 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-3}} \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,4 \text{ m.s}^{-1}$

$\bar{v}_{\text{moy huile}} = \frac{10^3 \times 10^{-6}}{3 \times 1} \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,4 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$

**B**

Ayoub  
Belfakh

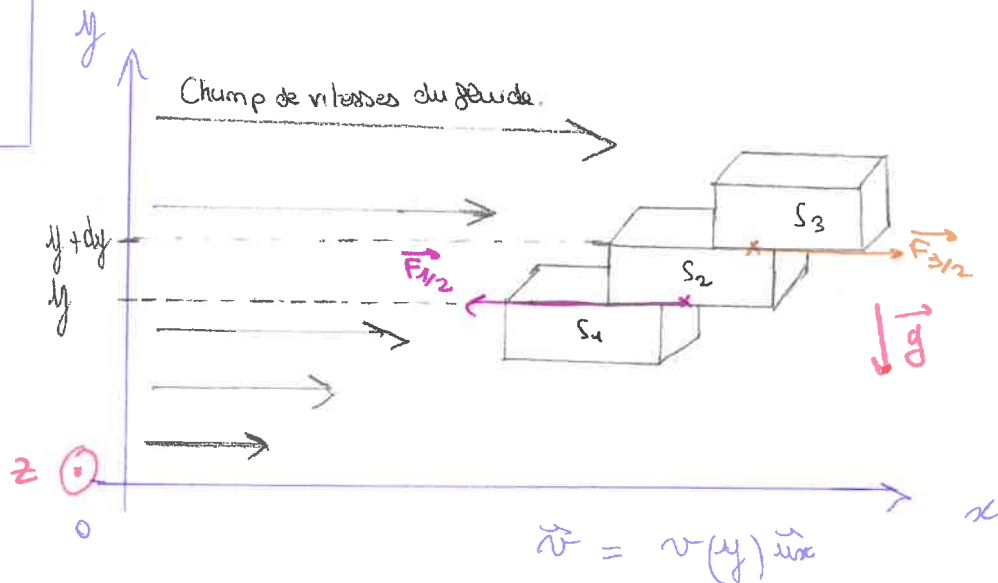
Yasmine

Ait Ouassal

Inès

ROY

# EX. 5 TD.12



1. Expression de la force tangentielle exercée par la particule 1 sur la particule 2 :

$$\vec{F}_{1/2} = -\eta S \underbrace{\frac{dv}{dy}}_{>0} \vec{u}_x \quad (\text{signe } \ominus \text{ car } S_2 \oplus \text{ rapide que } S_1, \text{ donc } \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \text{ est une force de frottement}).$$

et  $[\eta] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2} = \frac{1}{\text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

2. Expression de la force tangentielle exercée par la particule 3 sur la particule 2 :

$$\vec{F}_{3/2} = \eta S \left( \frac{dv}{dy} \right) (y+dy) \vec{u}_x$$

(signe  $\oplus$  car  $S_3 \oplus$  rapide que  $S_2$ , donc  $\vec{F}_{3 \rightarrow 2}$  est motrice)

3.  $d\vec{F} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{3 \rightarrow 2} = -\eta S \left( \frac{dv}{dy} \right) \vec{u}_x + \eta S \frac{dv}{dy} (y+dy) \vec{u}_x$

$$\Rightarrow d\vec{F} = \eta \underbrace{dx dz}_{=dz} \frac{d^2 v_x}{dy^2} dy \vec{u}_x$$

$= dz$

4. Bilan des actions qui s'exercent sur  $S_2$ :

\* poids =  $-dm \vec{g}$  (vertical selon  $\vec{u}_z$ )

\*  $d\vec{F}_p = -\vec{\text{grad}} P d\tau$  : résultante des forces de pression (~~celles selon l'axe~~  
man ~~de sont aussi~~  
négligées)

\*  $d\vec{F}$  : force de viscosité ✓

5. le champ des accélérations est colinéaire à  $\vec{u}_x$ , donc  
on garde la composante  $\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x}$  du gradient de pression.

6. La particule fluide est ~~en équilibre~~, donc la somme des forces  
~~est nulle~~ : est égale à  $dm \vec{a}$  (Pfd)

$$dm a \vec{u}_x = dm \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P) dz + \eta dz \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x$$

$$\text{or } dm = \mu \cdot dz \Rightarrow \mu dz \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P) dz + \eta dz \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x = \mu a \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \mu \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P) + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x = \mu a \vec{u}_x$$

or  $P(x, y, z, t)$

\* Par projection sur l'axe  $z$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$  donc  $P$  est <sup>indépendant</sup> ~~invariant~~  
~~partiellement d'axe~~  
de  $z$ .

\* Par projection sur  $y$ :  $-\mu g = \frac{\partial P}{\partial y}$   $\hookrightarrow P(x, y, t)$

\* en primitive:  $P(x, y, t) = -\mu g y + \text{est } f(x, t)$

or en  $y=h$ ,  $P_c = -\mu g h + \text{est } f(x, t)$

$$\Rightarrow \text{est} = P_c + \mu g h = f(x, t)$$

$$\Rightarrow P(x, y, t) = \mu g (h - y) + P_c$$

B | Ainsi, on voit que finalement, le <sup>champ de</sup> ~~la~~ pression ne dépend que  
de la hauteur  $y \Rightarrow P(y) = \mu g (h - y) + P_c$

sur  $0x$   $\boxed{\eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \mu a}$  (éventuellement du temps...)