

**APPLICATIONS DIRECTES****1. Effet de l'aileron sur une voiture**

Pour améliorer la tenue de route, certaines voitures sportives sont équipées d'un aileron pour renforcer l'appui arrière. On se propose ici de quantifier son influence.

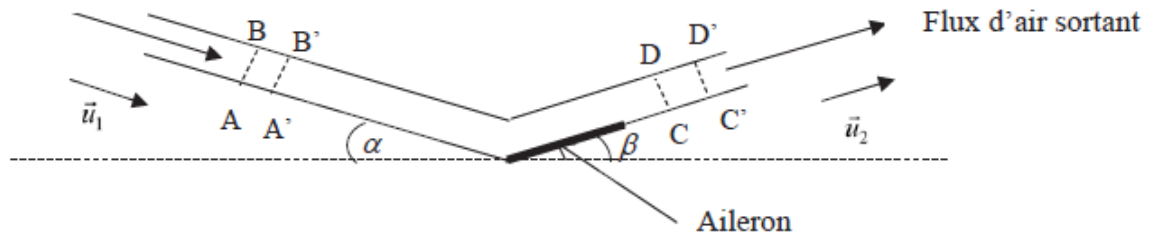
L'air est assimilé à un fluide parfait. Son écoulement, dans le référentiel de la voiture, est supposé stationnaire et incompressible. L'effet de la pesanteur sur l'air est négligé.

L'aileron, incliné vers le haut d'un angle non orienté  $\beta \in [0, \pi/2]$  par rapport à la route, dévie l'air qui s'écoule tangentielllement à la partie arrière du véhicule qui est inclinée vers le bas d'un angle, non orienté  $\alpha \in [0, \pi/2]$  par rapport à la route.

On note  $S_e$  la section transverse de l'écoulement de l'air dévié par l'aileron. Cette section est supposée constante le long du tube de courant décrit ci-dessous :



Flux d'air entrant



On note respectivement  $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_1$  et  $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_2$ , les vitesses des écoulements d'air entrant et sortant du tube de courant.  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont des vecteurs unitaires.

On considère le système fermé, constitué par l'air compris entre les sections AB et CD à la date  $t$  et de l'air compris entre les sections A'B' et C'D' à la date  $t + dt$ .

- On note  $\delta m_1$  la masse qui traverse la section AB entre  $t$  et  $t + dt$  et  $\delta m_2$  la masse qui traverse la section CD entre  $t$  et  $t + dt$ . Comparer  $\delta m_1$  et  $\delta m_2$  ainsi que  $v_1$  et  $v_2$ .
- En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé défini précédemment, déterminer la force exercée sur le tube de courant en fonction de  $\mu$ , masse volumique de l'air,  $v_1$ ,  $S_e$ ,  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .
- On admet que la force  $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{véhicule}}$  exercée par l'air sur le véhicule en mouvement est l'opposée de celle exercée sur le tube de courant. En déduire la composante perpendiculaire à la route de la force exercée par l'air sur le véhicule en fonction de  $\mu$ ,  $v_1$ ,  $S_e$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

Discuter du sens de cette composante.

**2. Poussée d'une fusée**

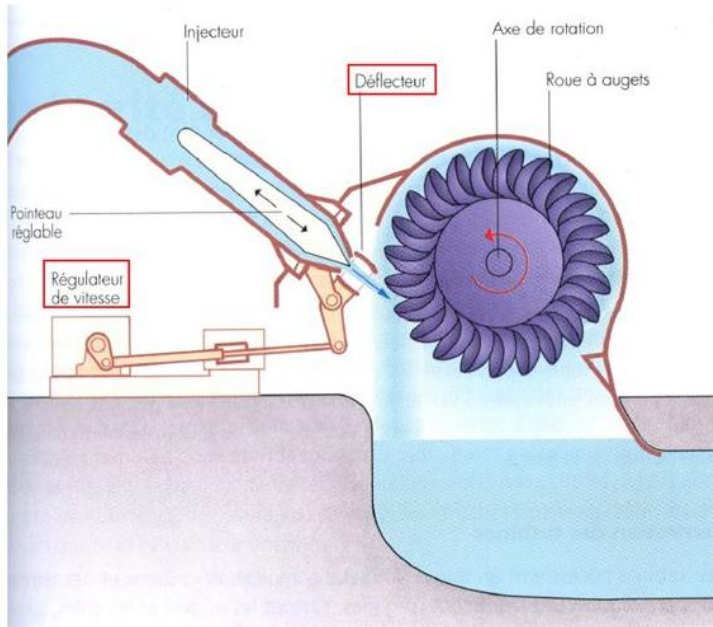
Une fusée en mouvement sur la verticale ascendante dans le référentiel terrestre supposé galiléen est soumise au champ de pesanteur supposé uniforme. Elle éjecte des gaz avec un débit massique  $Dm$  constant et une vitesse relative  $\vec{u}$  constante et dirigée vers le bas.

- Choisir un système fermé composé de la fusée et de son carburant à l'instant  $t$ , et décrire ce système à l'instant  $t + dt$ .
- Effectuer un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé entre  $t$  et  $t + dt$ .
- Effectuer le bilan des actions extérieures qui s'exercent sur le système fermé. Appliquer le théorème de la résultante cinétique, et définir la « poussée ».
- Effectuer un bilan d'énergie cinétique sur le système fermé entre  $t$  et  $t + dt$ .
- Appliquer le théorème de la puissance cinétique pour déterminer la puissance fournie par le moteur de la fusée.

### 3. Etude d'une turbine

Une turbine, de rayon  $a$ , entraînée par un jet d'eau, supposé parfait, tourne autour de son axe fixe  $\Delta$ . Le jet d'eau, d'épaisseur négligeable, arrive avec une vitesse  $v_1$  et un débit de masse  $D_m$ ; il ressort avec une vitesse  $v_2$  qui dépend de la vitesse angulaire  $\omega$ .

On appelle  $J$  le moment d'inertie de la turbine et de l'eau qu'elle contient. L'action de la turbine sur son axe est modélisée par un couple constant  $\Gamma$ . On considère le système ouvert constitué de la turbine et de l'eau qu'elle contient à l'instant  $t$ . On néglige l'effet de la pesanteur sur l'écoulement.



**Turbine Pelton.** Les roues Pelton tournent dans l'air à la pression atmosphérique sous l'impulsion des jets à très grande vitesse dirigés sur les augets par les injecteurs.

1. Effectuer un bilan de moment cinétique sur le système fermé coïncident et retrouver l'équation suivante :

$$J \frac{d\omega}{dt} + D_m a (v_2 - v_1) = -\Gamma$$

2. Effectuer un bilan d'énergie cinétique. Comment serait modifiée cette équation si on tenait compte de la viscosité de l'eau ?

3. A partir des deux équations précédentes, exprimer  $v_2$  en fonction de  $\omega$ ,  $a$  et  $v_1$ , et déterminer l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\omega(t)$ , qui fait intervenir les grandeurs  $D_m$ ,  $a$ ,  $v_1$  et  $\Gamma$ .

4.a) Déterminer la vitesse angulaire  $\omega_p$  en régime permanent, discuter selon la valeur de  $v_1$ .

b) Exprimer  $\Gamma$  en fonction de  $\omega_p$ .

c) En déduire la puissance fournie par la turbine en fonction de  $\omega_p$ . Pour quelle valeur de  $\omega_p$  cette puissance est-elle maximale ? Déterminer la puissance

maximale. Tracer le graphe de la puissance maximale en fonction de  $\omega_p$ .

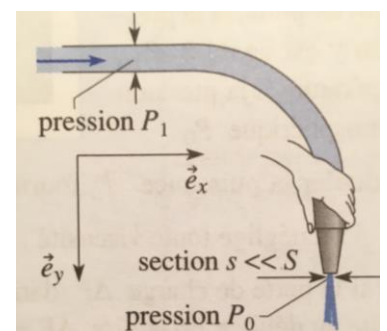
5. Déterminer  $\omega(t)$  en régime transitoire.

### EXERCICES

#### I. Force sur une lance d'incendie

Un tuyau souple de section  $S$  se termine par un embout dont la section terminale  $s$  est très petite devant  $S$ . La pression dans le tuyau est  $P_1$  et le jet sort à la pression atmosphérique  $P_0$ . L'embout fait un angle droit avec la partie antérieure du tuyau. La vitesse du jet sera supposée très grande devant la vitesse du fluide dans le tuyau. L'eau étant assimilée à un fluide parfait, calculer le débit massique  $D_m$  et  $F_y$ , composante parallèle au jet de la force  $\vec{F}$  qui maintient la lance.

Données :  $P_1 = 10$  bars ;  $P_0 = 1$  bar ;  $s = 1$  cm<sup>2</sup>



#### II. Vitesse d'un wagon sous la pluie

A  $t < 0$ , un wagon ouvert de masse  $m_0$ , se déplace sans frottements sur une voie horizontale à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ . A l'instant  $t = 0$ , il se met à pleuvoir : à partir de cet instant, le wagon se déplace sous une pluie verticale en recevant un débit massique d'eau  $D$ , constant. Déterminer sa vitesse  $v(t)$ .

### III. Vitesse et accélération d'un wagon minéralier

Un wagon minéralier de masse  $m_0$ , mobile sans frottement sur une voie horizontale, est au repos à l'instant  $t = 0$ . Il contient une masse  $m_1$  de minerai. A partir de cet instant, il est tracté par une force horizontale constante de module  $F$  tandis qu'il perd un débit massique  $D_m$  de minerai avec une vitesse horizontale constante par rapport au chariot, de module  $u$  et de sens opposé à la force tractrice. Déterminer l'accélération  $\vec{a}(t)$  et la vitesse  $\vec{v}(t)$  du wagon à l'instant  $t$ .

### IV. Force exercée par l'air sur une hélice

On considère un fluide de masse volumique  $\rho$  en écoulement stationnaire avec un débit massique  $D_m$ . On note  $\vec{v}_1$ ,  $p_1$ ,  $e_{c1}$  et  $e_{p1}$ , la vitesse, la pression, l'énergie cinétique massique et l'énergie potentielle massique au niveau de la section amont  $S_1$  d'un tube de courant et  $\vec{v}_2$ ,  $p_2$ ,  $e_{c2}$  et  $e_{p2}$  ces mêmes quantités sur la section aval.

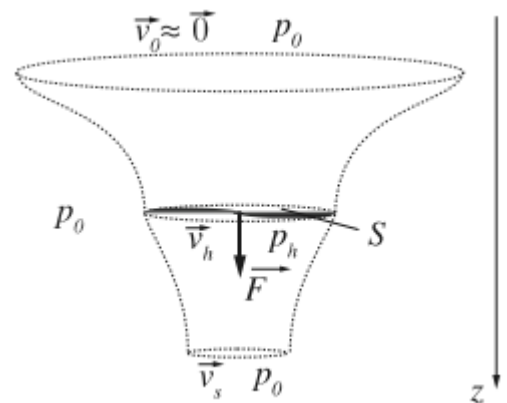
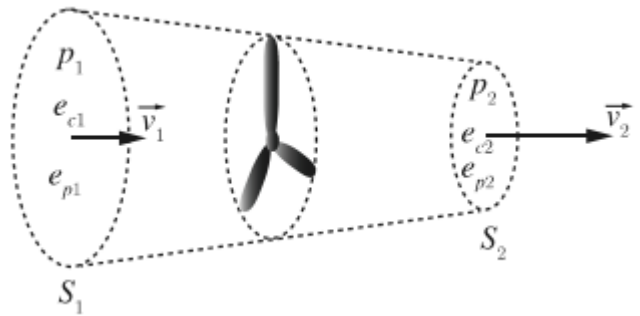
1. Effectuer un bilan d'énergie mécanique sur ce tube de courant et appliquer le théorème de l'énergie mécanique.
2. Effectuer un bilan de quantité de mouvement afin d'exprimer la résultante des forces extérieures en fonction du débit massique et des vitesses.

Soit un flux stationnaire d'air, de masse volumique  $\rho$  supposée constante, mis en mouvement par une hélice d'un drone, dont le tube de courant est représenté ci-contre. A l'entrée du tube de courant, l'air est immobile et la pression égale à  $p_0$ .

On note  $v_h$  la vitesse immédiatement en sortie de l'hélice et  $v_s$  la vitesse de l'air suffisamment en aval de l'hélice pour qu'il soit considéré en équilibre mécanique avec l'atmosphère ambiante.  $p_s = p_0$ .

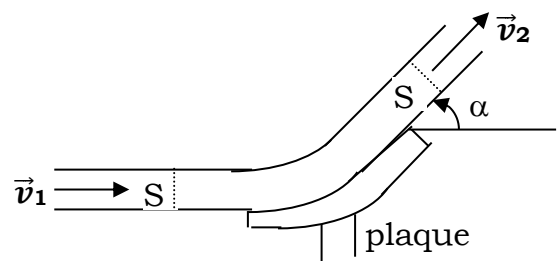
Cette hélice exerce une force  $\vec{F} = F\vec{u}_z$  sur l'air et lui cède une puissance mécanique  $P_m = F.v_h$ .  $\vec{g} = g\vec{u}_z$ .

3. Justifier le choix d'une vitesse nulle à l'entrée du tube de courant.
4. Formuler une hypothèse supplémentaire sur la nature de l'écoulement permettant de négliger la puissance des actions internes.
5. En proposant des ordres de grandeurs cohérents de vitesse et dénivelé, justifier qu'il est possible en première approche de négliger la variation d'énergie potentielle.
6. Dédire de ces hypothèses l'expression de  $P_m$  en fonction de  $D_m$  et  $v_s$ .
7. Dédire de ces hypothèses l'expression de  $F$  en fonction de  $D_m$  et  $v_s$ . En déduire que  $v_h = v_s/2$ .
8. Montrer que  $P_m = \frac{F^3/2}{\sqrt{2\rho S}}$ . En déduire l'expression de la force  $\vec{\Pi}$  exercée par l'air sur l'hélice en fonction de  $P_m$ ,  $\rho$ ,  $S$  et  $\vec{u}_z$ .



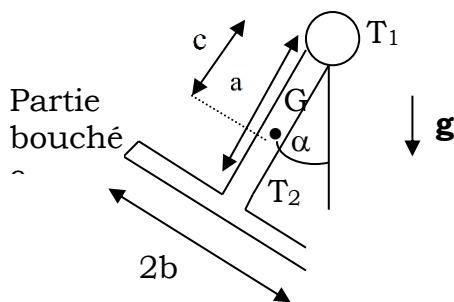
### V. Force exercée par un jet sur une plaque :

Dans l'air, un jet liquide homocinétiq ue de section  $S_1$ , de vitesse  $v_1$ , arrive sur une plaque courbée qui en modifie la direction d'un angle  $\alpha$ . Le liquide est consid er e comme incompressible, de masse volumique  $\mu$ , l'écoulement est suppos e parfait, en régime stationnaire de débit massique  $D_m$ , on néglige la pesanteur. Loin du coude en amont, la pression est uniforme égale à  $P_1$  et l'écoulement est unidimensionnel de vitesse  $v_1\vec{u}_x$ . Loin du coude en aval, la pression est uniforme égale à  $P_2$  et l'écoulement est



unidimensionnel de vitesse  $\vec{v}_2$ . On suppose que la section du jet reste constante. On négligera la résultante des forces de pression devant la force exercée par la plaque sur le jet.

1. Evaluer la valeur de la force exercée par le jet sur la plaque en fonction de  $Dm$ ,  $v_1$  et  $\alpha$ . Représenter graphiquement cette valeur en fonction de  $\alpha$ .
2. On suppose maintenant que la plaque a un mouvement de translation uniforme à la vitesse  $\vec{u}$ , avec  $u < v_1$ .
  - a. Calculer la force exercée par le jet sur la plaque en mouvement.
  - b. Evaluer la puissance de cette force.



## VI. Equilibre d'un tuyau

Un tuyau  $T_1$  peut tourner librement autour de son axe horizontal  $\Delta$ . Il alimente en eau un tuyau  $T_2$ , en "T", soudé à  $T_1$ . L'extrémité de l'une des branches du T est bouchée, l'eau s'écoulant par l'autre branche.

En fonction des dimensions de  $T_2$ , déterminer la valeur de l'angle  $\alpha$  à l'équilibre. On pourra, en les justifiant, faire des hypothèses simplificatrices.

Données: Masse du tuyau  $T_2$  :  $m_1 = 200$  g ; dimensions de  $T_2$  :  $a = 1,0$  m et  $b = 20$  cm ; distance du centre d'inertie  $G$  de  $T_2$  à l'axe de rotation :  $c = 64$  cm ; section uniforme de  $T_2$ :  $S = 1,0$  cm<sup>2</sup> ; masse volumique de l'eau :  $\rho$  ; débit massique :  $Dm = 0,20$  kg.s<sup>-1</sup>.