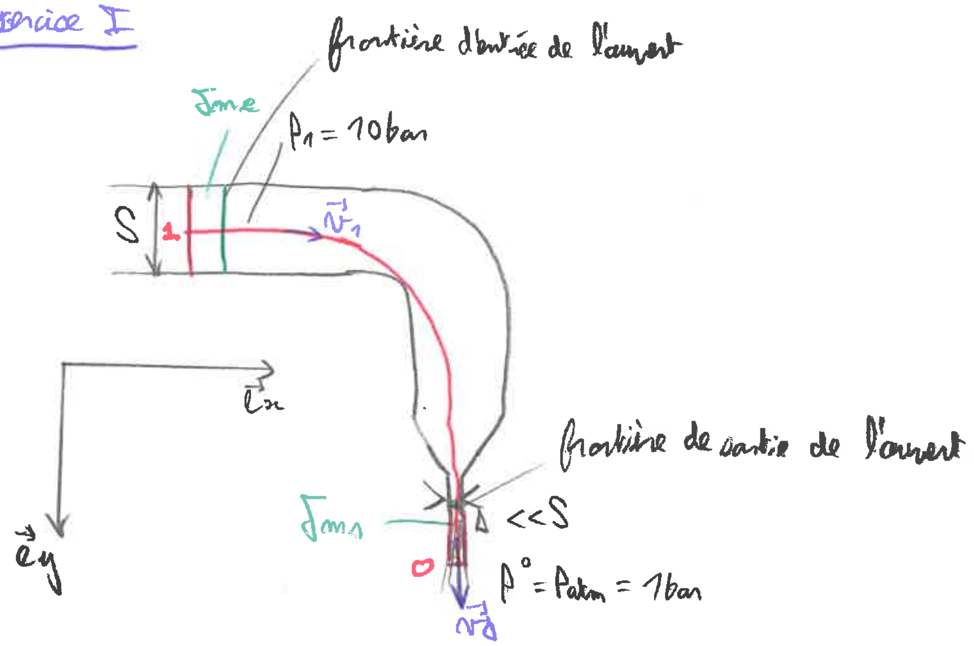
TD 16

groupe 2

Exercice I



L'eau est en écoulement stationnaire, parfait, incompressible et homogène dans le tuyau. On peut donc utiliser la relation de Bernoulli pour trouver $\vec{v}_s$ la vitesse du jet en sortie de la lance. ↳ sur la ligne de champ 1 → 0

$$\underbrace{\cancel{\frac{v_1^2}{2}}}_{\approx 0} + \cancel{g z_1} + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_s^2}{2} + \cancel{g z_0} + \frac{P^0}{\mu}$$

car $S >> s$ donc $v_1 << v_S$

On a donc $$\frac{v_s^2}{2} + \frac{P^0}{\mu} = \frac{P_1}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow v_s = \sqrt{\frac{2}{\mu}(P_1 - P^0)} = \sqrt{\frac{2}{10^3}(10^6 - 10^5)} = \underline{42 \ m.s^{-1}}$$

et $D_m = \mu D_v = \mu . s . v_s = 10^3 \times 1.10^{-4} . 42 = \underline{4,2 \ kg.s^{-1}}$

On fait ensuite un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé entre t et t+dt.

$$\vec{p}_{fermé}(t+dt) - \vec{p}_{fermé}(t) = \overset{m(t)}{m(t+dt)}\vec{v}(t+dt) + \delta m_s(\cancel{\vec{v}(t+dt)} + \underset{\vec{v}_0}{\vec{v}_0(t+dt)})$$
$$- (\cancel{m(t)\vec{v}(t)} + \delta m_e(\cancel{\vec{v}(t)} + \cancel{\vec{v}_1}(t)))$$

⚠ = bidouille

RIGUEUR

$$= (\vec{p}_{ouvert}(t+dt) + \delta m_s \vec{v}_S) - (\vec{p}_{ouvert}(t) + \delta m_e \vec{v}_1)$$

STATIONNAIRE

$\delta m_e = \delta m_s = D_m \, dt$

$$\boxed{d\vec{p}_{fermé} = D_m \, dt \, (\vec{v}_S - \vec{v}_1)} = \vec{F}_{ext} \, dt \rightarrow \text{Pfd}$$

$$\Leftrightarrow \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = m(t)\left(\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)\right) + \delta m_s \cdot \vec{v}_s$$

$$= m(t)\frac{d\vec{v}}{dt}dt + D_m\, dt\, \vec{v}_s$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{P}_{fermé}}{dt} = m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{v}_s = m(t)\vec{g}$$

$$\Leftrightarrow m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = m(t)\vec{g} - D_m \vec{v}_s$$

$$= m(t)\vec{g} + F_y \vec{e}_y$$

$$F_y = F_{poussée} = -D_m v_s = 4,2 \times 42 = \underline{176,4\ N}$$

aucun sens

on cherche F_y : projeter la relation sur Oy

$$D_m(\vec{v}_S - \vec{v}_1)\cdot\vec{e}_y = \vec{F}_{ext}\cdot\vec{e}_y$$

$$+ D_m v_s = F_{main \to tuyau} - P_0 s$$

$\vec{F}_{ext}$ s'appliquant sur le système
(poids négligé)
résultante des forces de pression $\vec{F}_p = P_1 S \vec{e}_x - P_0 s \vec{e}_y$
$\vec{F}$ exercée par la main sur le tuyau.

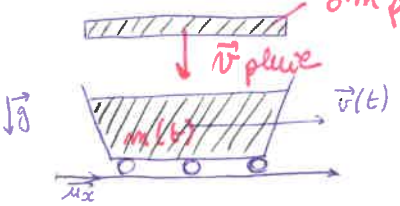
$$F_{main \to tuyau} = P_0 s + D_m v_s$$

$$= 10^5 \times 10^{-4} + 4,24 \times 42,4$$

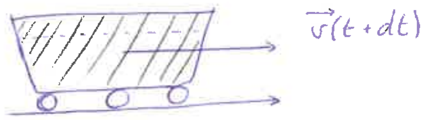
$$\boxed{F_{main \to tuyau} = 190\ N}$$

TD n°16, exercice II Groupe 6

$\delta m_{pluie} = D_m dt$



système fermé à t



système fermé à t+dt

Soit D_m le débit massique

Soit $\vec{p}(t)$ la quantité de mouvement à l'instant t du système fermé

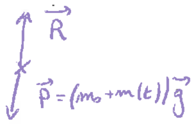
$$\begin{cases} \vec{p}(t) = (m_0 + m(t))\,\vec{v}(t) + D_m dt\ \vec{v}_{pluie} \\ \vec{p}(t+dt) = (m_0 + m(t+dt))\,\vec{v}(t+dt) \end{cases}$$

On a donc $\dfrac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \dfrac{(m_0 + m(t+dt))\,\vec{v}(t+dt) - (m_0+m(t))\vec{v}(t)}{dt} - D_m \vec{v}_{pluie}$

D'où $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left((m_0 + m(t))\,\vec{v}(t)\right) - D_m \vec{v}_{pluie}$

En appliquant le PFD au système fermé, on a :

$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = (m_0 + m(t))\,\vec{g} + \vec{R}$, $\vec{R}$ la réaction du support



+ m pluie ⟸ fait parti du système fermé.

Toutes les forces étant verticales, on a sur l'horizontale :

$$\frac{d}{dt}\left((m_0 + m(t))\,v(t)\right) = 0$$

en intégrant : $\left(\int \dfrac{d}{dt}\left((m_0 + m(t))v(t)\right) dt = 0\right)$

$$(m_0 + m(t))\,v(t) = \text{constante}$$ oui

à $t = 0$, $v(t) = v_0$: $m_0 v_0 = \text{constante}$

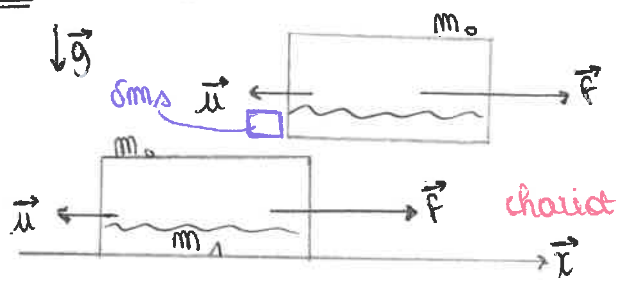
D'où $(m_0 + m(t))\,v(t) = m_0 v_0$

Or $D_m = \dfrac{m}{t}$

donc $\boxed{v(t) = \dfrac{m_0 v_0}{m_0 + D_m t}}$

B

ID16 : Exercice 3 — Groupe 8



chariot à $t+dt$ de masse $m(t+dt) = m(t) - \delta m_s = m(t) - Dm\, t$

chariot à t de masse $m(t)$

On effectue un bilan de quantité de mouvement

$\vec{V}_{minerai/chariot} + \vec{V}_{chariot/terre}$

$$\vec{p}_f(t+dt) - \vec{p}_f(t) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + \delta m_s \vec{V}_{minerai/terre} - m(t)\vec{v}(t)$$

$$\Leftrightarrow d\vec{p}_f = \underbrace{(m(t) - \delta m_s)}_{m(t+dt)}\vec{v}(t+dt) + \delta m_s(\vec{u} + \vec{v}(t+dt)) - m(t)\vec{v}(t)$$

$$= m(t)\vec{v}(t+dt) - m(t)\vec{v}(t) + \delta m_s \vec{u}$$

$$= m(t)\frac{d\vec{v}}{dt}dt + D_m \vec{u}\, dt$$

On applique le théorème de la résultante cinétique au chariot et au minerai qu'il contient :

$$\frac{d\vec{p}_f}{dt} = \vec{F}_{ext} \Leftrightarrow m(t)\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{a}(t)} + D_m\vec{u} = \vec{F} + (m(t) + m_0)\vec{g}$$

$\hookrightarrow$ ~~sur~~ ~~axe~~

On projette sur (Ox) :

$$m(t)\, a_x(t) + D_m u = F \Leftrightarrow \boxed{a_x(t) = \frac{F + D_m u}{m(t)} = \frac{F + Dm\, u}{m_0 + m_1 - Dm\, t}}$$

· vrai tant qu'il reste du minerais
· lorsqu'il n'y a plus de minerais pour $t > t_1 = \frac{m_1}{Dm}$: $a = \frac{F}{m_0}$

On trouve $v_x(t)$ en intégrant $a_x(t)$:

$$V_x(t) = \int_{t_i}^{t_f} \frac{F + D_m u}{m(t)} dt = (F - D_m u)\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{m(t)} dt$$

$$= F - D_m u \ln\left(\frac{m(t_f)}{\underbrace{m(t_i)}_{= m_1 + m_0}}\right)$$

NON — avant d'intégrer il faut écrire la fonction $m(t)$

$t < t_1$ tant qu'il reste du minerais

$$= (F + Dm\, u)\int_0^{t} \frac{dt}{m_0 + m_1 - Dm\, t}$$

$$= (F + Dm\, u)\left(-\frac{1}{Dm}\right)\Big[\ln(m_0 + m_1 - Dm\, t)\Big]_0^t$$

pour $t < t_1$

$$\boxed{v(t) = \frac{(F + Dm\, u)}{Dm}\ln\left(\frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 - Dm\, t}\right)}$$

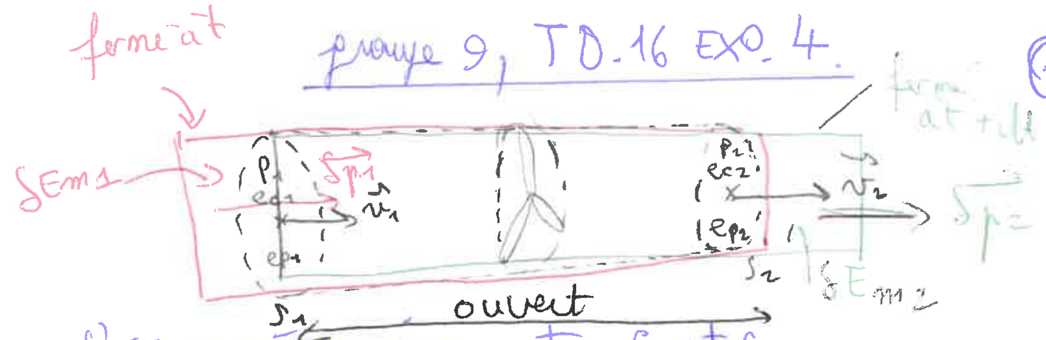
$t > t_1$ $\quad v(t) = (F/m_0) \times t + \text{Const}$ — à déterminer en t_1

Ayoub
Belfkih
Yasmine
Aït Ouaarab
Inès
Roy

PSI

groupe 9, TD 16 EXO 4

①



1. * Bilan d'énergie mécanique entre S_1 et S_2 :

⚠ définir EXPLICITEMENT FERMÉ à t et à t+dt

E_m fermé $(t+dt)$ − E_m fermé (t)

$= \cancel{E_m \text{ ouvert}(t+dt) - E_{m\,\text{ouvert}}(t)} + \delta E_{m2} - \delta E_{m1}$

car écoulement stationnaire

$\Leftrightarrow E_{\text{fermé}}(t+dt) - E_{\text{fermé}}(t) = \delta m_2 e_{m2} - \delta m_1 e_{m1}$

Comme l'écoulement stationnaire, on a conservation du débit massique

donc $\dfrac{dE_{m\,\text{fermé}}}{dt} = D_m(e_{m2} - e_{m1})$

et par application du théorème de l'énergie mécanique :

$$\dfrac{dE_{m\,\text{fermé}}}{dt} = P_{\text{forces non conservatives}} = P_{\text{press}} + \underset{P_m}{P_{\text{hélice}}}$$

$$= D_m(e_{m2} - e_{m1})$$

$= D_m\left((e_{c2} - e_{c1}) + (e_{p2} - e_{p1})\right)$

2. * Bilan de quantité de mouvement :

$$\vec{P}_{\text{fermé}}(t+dt) - \vec{P}_{\text{fermé}}(t) = \left(\vec{P}_{\text{ouvert}}(t+dt) + \delta\vec{P}_2\right) - \left(\vec{P}_{\text{ouvert}}(t) + \delta\vec{P}_1\right)$$

égaux : l'écoulement est supposé stationnaire.

$= \delta m_2 \vec{v}_2 - \delta m_1 \vec{v}_1 = d\vec{P}_{\text{fermé}} = D_m dt(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

On a alors,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

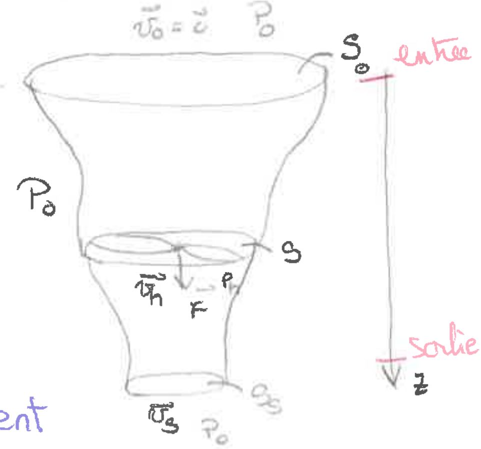
et $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ appliqué sur un système fermé $= \vec{F}_{\text{hélice/air}} + \underbrace{\vec{F}_{\text{pression/air}}}$

Ainsi, $\vec{F}_{ext} = D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$

P_{ext} est uniforme
$\Rightarrow \vec{F}_{\text{pression/air}} = \vec{0}$

3. (En régime stationnaire), le débit volumique se conserve

$$D_V = cste = S v_h = S_S v_S = S_0 v_0$$



or, $S_S \ll S_0 \Rightarrow v_0 \ll v_S$

On peut considérer que la vitesse à l'entrée du tube de champ peut être considérée comme étant négligeable devant la vitesse à la sortie du tube :

$$v_0 \simeq 0$$

4. On veut négliger la puissance des forces de viscosité, on fait donc l'hypothèse que l'écoulement est parfait.

5. on va supposer cette question pour la suite
si $v_S \simeq 10 m.s^{-1}$ donc <u>variation d'énergie potentielle négligée.</u>
$ec_S - ec_e \simeq \frac{100}{2} = 50 J.kg^{-1}$
si $z_S - z_e \simeq 1 m$ $ep_S - ep_e = gz \simeq 10 J.kg^{-1}$

6. grâce au bilan d'énergie mécanique en Q 1 :

$$D_m \left(\underbrace{\cancel{(ep_S - ep_e)}}_{\text{négligée}} + (ec_S - ec_e) \right) = P_{press} + P_m$$

et $P_{press} = \vec{F}_{P_S} \cdot \vec{v_S} + \underbrace{\vec{F}_{P_0} \cdot \vec{v_0}}_{= 0 \text{ car } \vec{v_0} = 0}$

et $S_S \ll S_e$ donc les forces de pression peuvent être négligées.

Ainsi, le bilan s'écrit : $D_m \left(\frac{v_S^2}{2} - \underbrace{\frac{v_0^2}{2}}_{= 0} \right) = P_m$

$$\boxed{P_m = \frac{D_m v_S^2}{2}}$$

7. dans l'énoncé on nous donne : $F = \frac{P_m}{v_h}$ $(P_m = F \cdot v_h)$

$$\Leftrightarrow \boxed{F = \frac{D_m v_S^2}{2 v_h}}$$

or grâce au bilan ~~d'eau~~ de quantité de mouvement :

$D_m v_s = F_{ext}$ et on suppose que la seule force extérieure qui s'applique au système, est F.

donc $\boxed{D_m v_s = F}$. oui

ainsi on peut égaliser les 2 expressions de F :

$$\cancel{D_m} \cdot \cancel{v_s} = \frac{\cancel{D_m} v_s^{\cancel{2}}}{2 v_h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_s}{2 v_h} = 1 \Leftrightarrow \boxed{v_h = \frac{v_s}{2}}$$ B

8. $F = D_m \cdot v_s$
$= 2 D_m v_h$ et $D_m = \rho S v_h$

donc $F = 2 \rho S v_h^2$ on isole v_h : $v_h = \sqrt{\frac{F}{2\rho S}}$

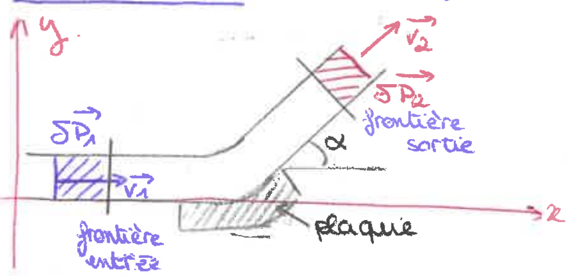
et $P_m = F \times v_h = F \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{2\rho S}} = \boxed{\frac{F^{3/2}}{\sqrt{2\rho S}} = P_m}$ oui

* Expression de $\vec{\Pi}$: $\vec{\Pi}$ s'oppose à la force F (selon l'axe $-\vec{u_z}$).

donc $\vec{\Pi} = -F\vec{u_z} = -\left(P_m \sqrt{2\rho S}\right)^{2/3} \vec{u_z}$ $\boxed{= -P_m^{2/3} \sqrt{2\rho S}\, \vec{u_z} = \vec{\Pi}}$ oui

Exercice V. TD 16

LARGEAU Garance
BRECHBIEHL Emma
BLONDEL Agathe



* on néglige la pesanteur et la résultante des forces de pression
* système étudié : le jet

$\vec{P_g}(t+dt) = \vec{P_0}(t+dt) + \vec{\delta P_2}$ et $\vec{P_g}(t) = \vec{P_0}(t) + \vec{\delta P_1}$

⚠ la quantité de mouvement est un VECTEUR.

1) Cherchons la valeur de la force exercée par le jet sur la plaque : $\vec{F_{jet}}$

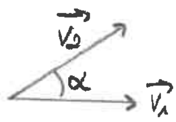
D'après le théorème de la résultante cinétique : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F_{ext}}$

→ Bilan de quantité de mouvement :

$\vec{P_g}(t+dt) - \vec{P_g}(t) = \vec{P_0}(t+dt) + \vec{\delta P_2} - \vec{P_0}(t) - \vec{\delta P_1}$

Or régime stationnaire : $\vec{P_0}(t+dt) = \vec{P_0}(t)$

$\Rightarrow d\vec{P_g} = D_m dt\,(\vec{v_2} - \vec{v_1})$ Ainsi $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1})}$

et  donc ~~$v_2 = \frac{v_1}{\cos\alpha}$~~

le jet est homocinétique donc $P_1 = P_2 = P^0$ $v_1 = v_2 = v_0$.

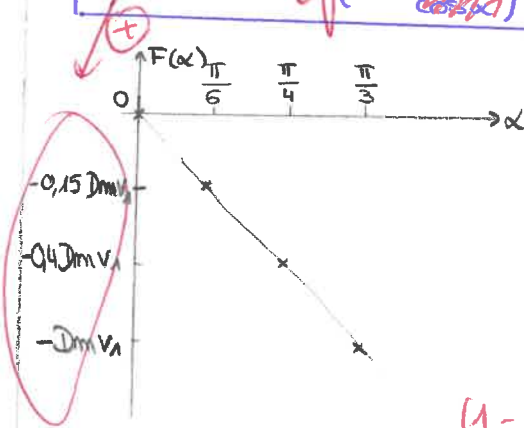
→ $\vec{F_{ext}} = \underbrace{\cancel{\vec{F_P}}}_{=0} + \vec{F_{Pe}}$ où $\vec{F_{Pe}}$: force exercée par la plaque sur le jet

donc $\vec{F_{Pe}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = D_m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$

B

Donc $\vec{F_{jet}} = -\vec{F_{Pe}} = D_m(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = D_m\left(v_1\vec{u_x} - \left(v_2\cos\alpha\,\vec{u_x} + v_2\sin\alpha\,\vec{u_y}\right)\right)$

$\boxed{\|\vec{F_{jet}}\| = D_m\, v_0\sqrt{\left(1 - \cos\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha}} = D_m v_0\left[(1-\cos\alpha)\vec{u_x} - \sin\alpha\,\vec{u_y}\right]$

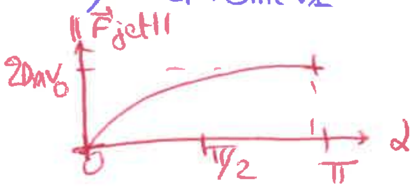


$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = D_m v_1\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -0{,}15\,D_m v_1$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = D_m v_1\left(1 - \sqrt{2}\right) = -0{,}4\,D_m v_1$

$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -D_m v_1$

Pour $\alpha \in [0; \pi[$



$(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$
$= 2(1-\cos\alpha)$

$\|\vec{F}_{jet \to plaque}\| = D_m v_0\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

2a) plaque en translation tq $u < v_1$

Composition des vitesses : $\boxed{\vec{v_1}' = \vec{v_1} - \vec{u}}$

↳ le référentiel de la plaque est en translation uniforme, c'est un référentiel galiléen, on peut lui appliquer le théorème de la quantité de mouvement

Donc bilan de quantité de mouvement

$d\vec{P} = \vec{\delta P_2}' - \vec{\delta P_1}' = D_m' dt\,(\vec{v_2}' - \vec{v_1}')$

donc $\vec{F_{ext}} = D_m'(\vec{v_2}' - \vec{v_1}')$

→ Dans le réf de la plaque

Donc comme dans la question précédente

→ $\vec{v}$ jet / plaque $= \vec{v}$ jet / labo $+ \vec{v}$ labo / plaque

Donc $\overrightarrow{F}_{jet/plaque} = D'm\,(\vec{v}_1{}' - \vec{v}_2{}') = Dm\,\cancel{\left(v_1' - \frac{v_1'}{\cos\alpha}\right)}$

2b) D'après la formule de la puissance : $\mathcal{P} = \overrightarrow{F}\cdot\vec{v}$

Donc $\boxed{\mathcal{P}_{jet} = \overrightarrow{F}_{jet}\cdot\vec{v}_1{}'} = \cancel{Dm\,v_1'\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)v_1'} = \cancel{Dm\,v_1'^2\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)}$

oui

$\vec{v}_1{}' = (v_1 - u)\,\vec{u}_x \qquad \vec{v}_2{}' = (v_2\cos\alpha - u)\,\vec{u}_x + v_2\sin\alpha\,\vec{u}_y$

avec $v_1 = v_2 = v_0$ (vitesse du jet)

$\vec{v}_1{}' = (v_0 - u)\,\vec{u}_x \qquad \vec{v}_2{}' = (v_0\cos\alpha - u)\,\vec{u}_x + v_0\sin\alpha\,\vec{u}_y$

$\overrightarrow{F}_{jet/plaque} = D'm\left[v_0(1-\cos\alpha)\,\vec{u}_x - v_0\sin\alpha\,\vec{u}_y\right]$

avec $D'm$ = débit massique dans le référentiel lié à la plaque

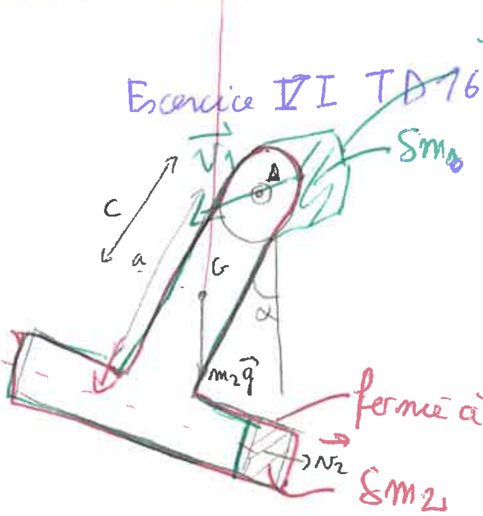
$= \rho S v_1' = \rho S (v_0 - u)$

$\mathcal{P}_{jet} = D'm\,v_0\,(1-\cos\alpha)(v_0 - u)$

$$\boxed{\mathcal{P}_{jet} = \rho S (v_0 - u)\,v_0\,(1 - \cos\alpha)}$$

Youssef Kouni
Mohamed Feguir
Hugo Fritsch

Exercice VI TD 16



On effectue un bilan de moment cinétique dans le système fermé allant du tuyau 1 jusqu'à la sortie du tuyau 2 :

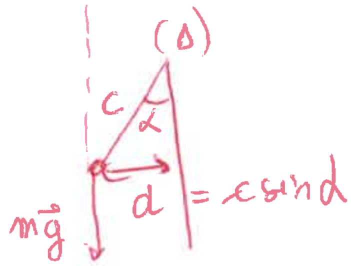
$L_{\Delta fermé}(t+dt) - L_{\Delta fermé}(t) = L_{\Delta ouvert}(t+dt) + \delta L_s - (L_{\Delta ouvert}(t) + \delta L_e)$

Or le moment à l'entrée Le est nul car la vitesse d'entrée est sur l'axe Δ, et

$L_{ouvert}(t+dt) = \cancel{L_{\Delta ouvert}(t)}\ J\omega(t+dt)$

Ainsi $\frac{dL_{\Delta fermé}}{dt}dt = \delta m_2 v_2 a + J\underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{=0 \text{ car système au repos}}dt$

$= D_m dt\, v_2 a$



• Bilan des forces : - poids   - réaction de l'axe $\vec R$ $\mathcal{M}_\Delta(\vec R) = 0$

D'après le théorème du moment cinétique :

$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec F_{ext})$

pas homogène, il manque une distance

d'où $D_m v_2 a = m_2 g \sin\alpha \times c$

$m = m_1 + m_{eau\ du\ système\ fermé}$
$= m_1 + \rho S(a+2b)$

Or $v_2 = \frac{D_m}{\rho S}$

Ainsi $\sin\alpha = \frac{D_m^2 a}{m_2 g \rho S c}$ A.N $\alpha = \arcsin\left(\frac{D_m^2 a}{m_2 g \rho S c}\right)$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{D_m^2 a}{m_2 g \rho S c}\right)$ $= \arcsin\left(\frac{0,2^2 \times 1}{0,2 \times 10 \times 10^3 \times 10^{-4}}\right)$

$\boxed{\alpha \simeq 0,32 \text{ rad} \simeq 18°}$

il faut sin α < 1
sinon pas équilibre
⇒ le tuyau tourne

$\sin\alpha = \frac{D_m^2 a}{(m_1 + \rho S(a+2b))g\rho S c} =$

$= \frac{0,2^2 \times 1}{(0,2 + 10^3 \times 10^{-4}(1 + 2\times 0,2)) \times 10 \times 10^3 \times 0,1 \times 0,6}$

AN α = 11°