Thème : Equation de D'Alembert

**APPLICATIONS DIRECTES**

## 1. Corde de guitare

1. Sachant que la célérité d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la célérité de l'onde en fonction de ces deux grandeurs.
2. En déduire la relation entre la fréquence fondamentale du son émis par la corde et la tension de celle-ci. Comment varie la tonalité lorsqu'on tend la corde ?

3. Quelle tension doit-on appliquer à une corde de guitare pour qu'elle sonne un $La_3$ à 440 Hz, sachant que la longueur du manche est de 617 mm, le diamètre de la corde est 0,86 mm. La corde est en Nickel : $\rho = 7.10^3$ kg.m$^{-3}$.

## 2. Equation de propagation d'une onde sur une corde

Etablir l'équation de propagation y(x,t) d'une onde sur une corde. Quelle est la nature de cette onde (transverse ou longitudinale) ? Quelle est sa direction de propagation ? Sa célérité c ?
Donner la forme d'une solution progressive harmonique. Définir $\vec{k}$, le vecteur d'onde. Rechercher la relation de dispersion.
On suppose que cette corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités et on cherche les solutions sous forme d'OPH. Montrer que les solutions sont forcément stationnaires. Définir un nœud de vibration, un ventre de vibration. Tracer l'allure de la corde à 3 instants différents lorsqu'on observe 5 nœuds de vibration. Quelle est alors la fréquence de l'onde émise ?

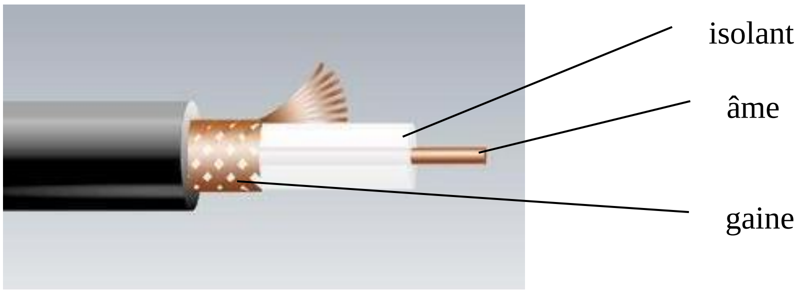
## 3. Etude des modes propres d'une corde

Lors d'une manipulation avec la corde de Melde on trouve les résultats suivants :
1. Pour une même longueur L de la corde et une même masse M accrochée à celle-ci on trouve une fréquence de résonance à 19 Hz pour deux fuseaux, à 28 Hz pour trois fuseaux.
   a. Représenter l'allure de la corde pour les deux situations envisagées.
   b. Quelle relation a-t-on entre deux nœuds consécutifs ?
   c. Les valeurs numériques des fréquences mesurées sont-elles compatibles entre-elles ?
   d. Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?

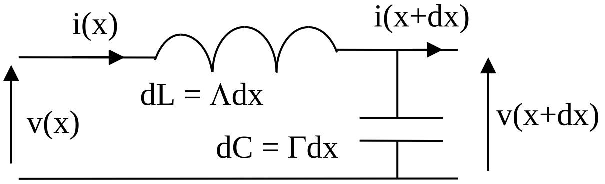
2. La longueur de la corde est L = 117 cm. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?
3. Sachant que la célérité d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la célérité de l'onde en fonction de ces deux grandeurs.
4. M = 25 g. Quelle est la tension de la corde ? En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

## 4. Propagation dans une ligne coaxiale

Le câble est composé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux séparés par un isolant.
Le conducteur central, cylindre de rayon a, constitue « l'âme » du câble, le conducteur extérieur, de rayon b, constitue la « gaine ».



Une tranche infinitésimale d'épaisseur dx d'une ligne électrique bifilaire peut-être modélisée par le schéma ci-contre, comportant une inductance élémentaire dL = $\Lambda$dx et une capacité élémentaire dC = $\Gamma$ dx. On traite ce circuit de faible dimension dans le cadre de l'ARQS.




1. Appliquer la loi des nœuds pour déterminer une relation entre $\frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ (relation 1).

2. Appliquer la loi des mailles pour déterminer une relation entre $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$ (relation 2).

Les relations (1) et (2) sont des relations différentielle couplées entre i(x,t) et v(x,t). On va les découpler, pour obtenir deux équations de d'Alembert avec i(x,t) solution de l'une et v(x,t) solution de l'autre.

3. Donner l'expression des deux équations de d'Alembert recherchées. Quelle est l'ordre des dérivées dans l'équation de D'Alembert ? Comment peut-on obtenir un tel ordre à partir des relations (1) et (2) ?

On admet le critère de Schwartz, qui permet d'intervertir l'ordre des dérivations lorsque les variables sont indépendantes : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$

4. Etablir les deux équations de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante. Que peut-on en conclure ?

5. Donner l'expression d'une OPH de courant se propageant selon $\vec{u}_x$. Même question pour une OPH de tension. Montrer à partir de la relation (1) que le rapport v(x,t) / i(x,t) est une constante liée aux caractéristiques de la ligne.

6. Mêmes questions pour des OPH se propageant selon $-\vec{u}_x$.

On ferme en x = 0 une ligne semi-infinie s'étendant de x = - ∞ à x = 0 sur une résistance R.

7. Quelle relation cette résistance impose-t-elle en x = 0 ? En déduire une condition sur R telle qu'une OPH puisse se propager dans le sens $+\vec{u}_x$ sur cette ligne semi-infinie. Cette valeur particulière de R est appelée **impédance caractéristique de ligne.** Retrouver sa valeur numérique à partir des données du TP câble coaxial.
8. Application numérique : A partir de la célérité de l'onde dans la câble que vous avez déterminée en TP et de la valeur de l'impédance caractéristique, déterminer les valeurs de $\Lambda$ et $\Gamma$ qui modélisent ce câble.

On ferme maintenant la ligne semi-infinie en x = 0 par un court-circuit.

9. Que peut-on en déduire pour v(x=0, t) ?
10. Rappeler l'expression du coefficient de réflexion donné dans le TP, quelle est sa valeur ici en x = 0 ? Rappeler la forme des signaux que vous avez alors observés en début et en bout de ligne.
11. Une onde progressive harmonique incidente $v_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ est émise en x = - ∞. Quelle est alors la forme des solutions pour v(x,t) ? En déduire l'expression de la tension v(x,t). Représentation graphique.
12. A partir de la relation (1) en déduire l'expression du courant i(x,t) en tout point de la ligne. Représentation graphique. Conclusion.

On laisse maintenant la ligne semi-infinie en x = 0 en circuit ouvert.

13. A l'aide du TP, rappeler la valeur du coefficient de réflexion, et la forme des signaux que vous avez alors observés en début et en bout de ligne.
14. Quelle est la valeur du courant i(x=0,t) ? Donner, par analogie avec les résultats précédents la forme de i(x,t) puis celle de v(x,t) si une OPH est émise par le générateur. Représentations graphiques.

## EXERCICES :

### I. Ondes stationnaires sur une corde de guitare

Une corde de guitare de masse linéique $\mu$, de longueur L est fixée à ses deux extrémités. Les frottements ainsi que le poids sont négligés et la tension est supposée constante.

1. Initialement la corde est horizontale et au repos, on l'écarte localement de sa position d'équilibre en lui appliquant une petite déformation verticale, qui à l'abscisse x et à l'instant t, s'écrit z(x,t).

a. Donner l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait $z(x,t)$. Exprimer la célérité $c(\mu, T)$ de l'onde de déformation sur la corde par une analyse dimensionnelle, où T est la tension de la corde.

b. Justifier que l'on recherche une solution de cette équation sous la forme d'une fonction à variables séparées $z(x,t) = z_o \cos(\omega t + \varphi_o). \cos(kx + \psi_o)$. Déterminer la relation liant k et $\omega$.

2. a. Montrer que $\omega$ ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes $\omega_n$. Quel nom donne-t-on à $\omega_n$ ? Exprimer $\omega_n$ en fonction de L, n et c.

b. Exprimer $z_n(x,t)$ l'élongation de l'harmonique de rang n. Déterminer l'expression de la longueur d'onde $\lambda_n$ en fonction de L.

c. Déterminer la position, ainsi que le nombre, des nœuds et des ventres dans le mode n.

d. Représenter graphiquement l'allure de la corde dans ses trois premiers modes.

3. Une guitare électrique comporte 6 cordes en acier de même longueur L = 0,63 m et de masse volumique $\rho$ = 7 800 kg.m$^{-3}$.

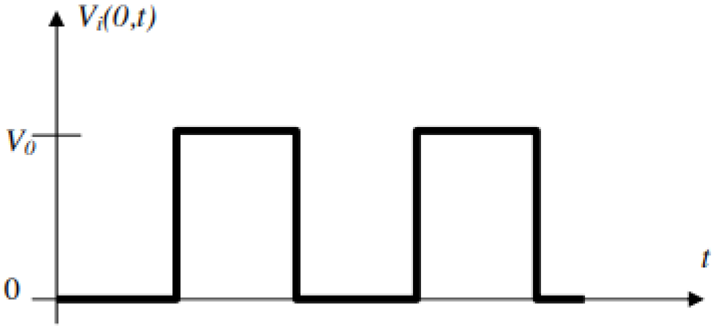
| N° de la corde | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence du fondamental (Hz) | 82,5 | 110 | 147 | 196 | 247 | 330 |
| Diamètre (mm) (d) | 1,12 | 0,89 | 0,70 | 0,55 | 0,35 | 0,25 |

Déterminer la tension de la corde en fonction de $\rho$, d, L et de la fréquence du fondamental. AN pour que la guitare soit accordée.

Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension d'une corde pour que sa fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 1% ?

## II. Etude expérimentale d'un câble coaxial

Un générateur, branché à l'entrée (z = 0) d'un câble coaxial de longueur L = 100 m, délivre des signaux périodiques de période T, de valeur Vo positive sur une durée $\tau < T$ et de valeur nulle le reste de la période.




L'autre extrémité (z = L) du câble est refermé par une résistance R.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en x = 0 la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie.

1. On suppose que R=0. A partir de la valeur de la tension en x = L, justifier que le coefficient de réflexion est négatif.
2. En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement (l'amplitude de l'onde réfléchie est inférieure à l'amplitude de l'onde incidente, on pose $V_r = KV_o$) et de propagation, et sachant que le retard $\Delta t$ dû à la propagation est inférieur à T/4, dessiner sur le même schéma la forme de l'onde incidente Vi(0,t) et réfléchie Vr(0,t), puis sur un autre schéma, en concordance de temps la forme de l'onde totale Vtot(0,t) au point z = 0. Indiquer $\Delta t$ sur le schéma.

3. Par identification avec les résultats de la question précédente, sur l'oscillogramme ci-contre, indiquer la valeur V = 0, la valeur V = Vo, la valeur $V = V_r$ ainsi que $\Delta t$. Déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble.
4. Evaluer le coefficient d'amortissement K.

On suppose que le coefficient K, ne dépend pas de la valeur de R.

5. A partir des oscillogrammes ci-dessous, définir et déterminer la valeur du coefficient de réflexion de l'onde en x = L pour différentes valeurs de R. En déduire la valeur caractéristique de R, pour laquelle le coefficient de réflexion est nul.