

Bon travail.

1. a) $z(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

On cherche à exprimer $c(M,T)$.

$$[T] = N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$[\mu] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$$

On remarque que :

$$[c^2] = \frac{[T]}{[\mu]} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

D'al,

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

→ corde fixée à 2 extrémités ⇒ 2 nœuds
⇒ onde stationnaire $z(x,t) = F(x)G(t)$

b) Soit $z(x,t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0)$

Établissons la relation de dispersion.

$$z(x,t) = z_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} e^{j(kx + \psi_0)}$$

$$= z_0 e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{ou} \quad z_0 = z_0 e^{j(\varphi_0 + \psi_0)}$$

On substitue $z(x,t)$ dans l'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = z_0 (j\omega)^2 e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_0 (jk)^2 e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\omega^2 z_0 e^{j(\omega t + kx)} = c^2 k^2 z_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \quad \boxed{\frac{\omega}{c} = k}$$

NON pas de complexes pour une onde stationnaire

forme réelle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k^2 z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0)$$

$$-\omega^2 = c^2 (-k^2)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

2. a. ω_n = pulsation des modes propres

Il y a 2 conditions aux limites car z est une onde stationnaire

$$z(x,t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kx + \psi_0)$$

en $x=0$: $z(x=0,t) = 0$

$$\Leftrightarrow z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(\psi_0) = 0$$

en $x=L$: $z(x=L,t) = 0$

$$\Leftrightarrow z_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \cos(kL + \psi_0) = 0$$

Conditions réalisables $\forall t$:

$$\boxed{-\pi < \psi_0 \leq \pi}$$

donc $\Rightarrow z_0 \cos(\psi_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(\psi_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}$$

ici il n'y a pas de périodicité

on prend $p=0$ donc $\boxed{\frac{\pi}{2} = \psi_0}$

de même $z_0 \cos(kL + \psi_0) = 0 \Rightarrow \cos(kL + \psi_0) = 0$

$$\Rightarrow kL + \psi_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$\psi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \left[kL = n\pi \right] \text{ et } \left[k_n = \frac{w_n}{c} \right]$$

donc

donc pour: $k_n L + \psi_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$

pour le mode n:

$$k_n L = n\pi \Leftrightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\Rightarrow \left[w_n = \frac{cn\pi}{L} \right] \text{ avec } \psi_0 = \pi/2$$

2.b. ainsi $z_n(x,t) = z_0 \cos(w_n t + \psi_0) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{w_n x}{c} + \psi_0\right)}_{\sin\left(\frac{w_n x}{c}\right)}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{donc } k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \Leftrightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\pi c}{w_n}$$

or $w_n = \frac{cn\pi}{L}$ donc $\lambda_n = \frac{2\pi c}{\frac{cn\pi}{L}} = \boxed{\frac{2L}{n} = \lambda_n}$

2c. $z(x_N, t) = z_0 \cos(wt + \psi_0) \cos(kx_N + \psi_0) = 0$

valable pour tout t $\Rightarrow \cos(kx_N + \psi_0) = 0$

$$\Rightarrow kx_N + \psi_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$\psi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow kx_N = n\pi$$

$$\Rightarrow \left[x_N = \frac{n\pi}{k} \right] \text{ noeuds} \quad \text{donne la position des noeuds.}$$

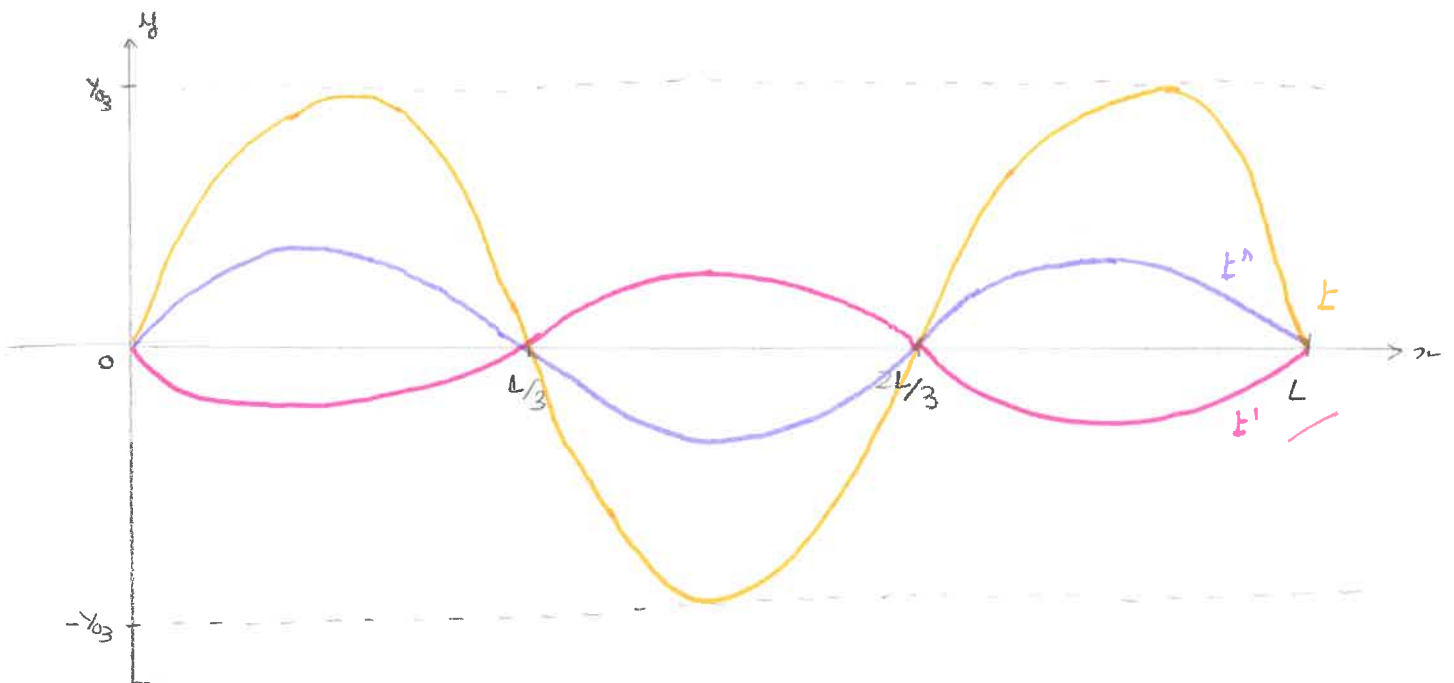
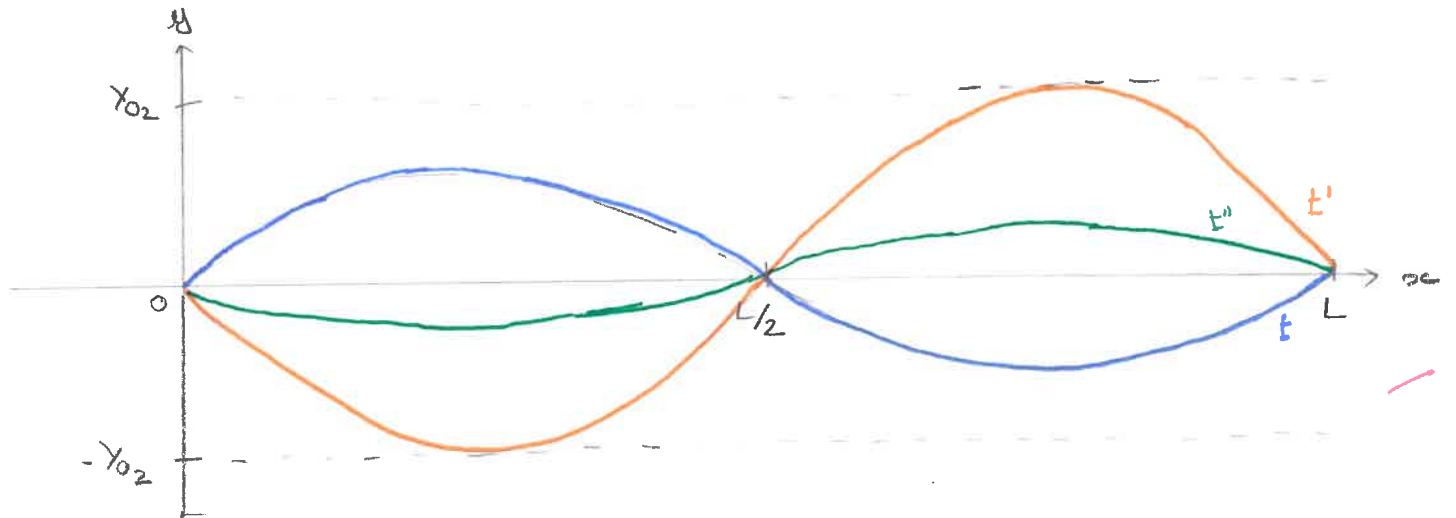
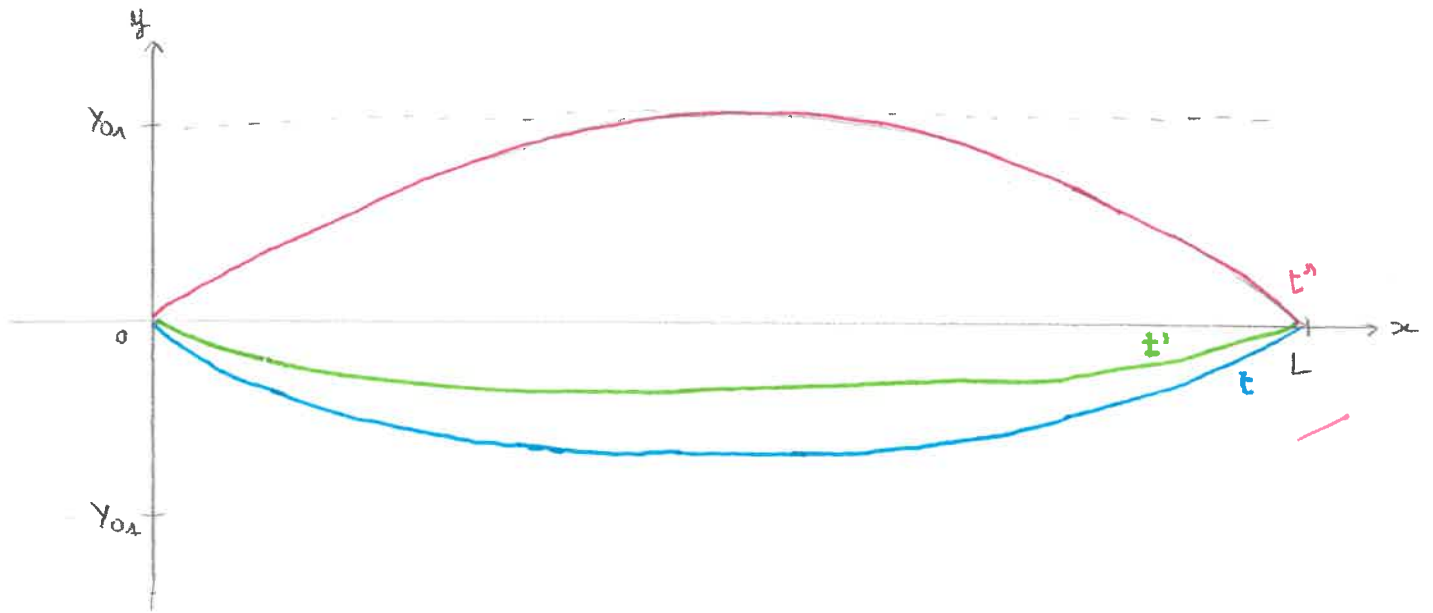
Ainsi, il y a $n+1$ noeuds.

* pour les vibrations il faut que $|\cos(kx_N + \psi_0)| = 1$

$$\Rightarrow kx_N + \psi_0 = 0 + n\pi$$

$$\Rightarrow x_N = (n\pi - \pi/2) \times \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \left[x_N = \frac{\pi}{k} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] \text{ ventres}$$



$$3. f = \frac{1}{2} \times \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow f^2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{L}\right)^2 \frac{T}{\mu} \Rightarrow T = 4L^2 f^2 \mu \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow \boxed{T = L^2 f^2 \mu \pi d^2}$$

$$[\mu] = \frac{m}{L} = \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho \pi (d^2/4) L}{L} = \rho \pi \frac{d^2}{4}$$

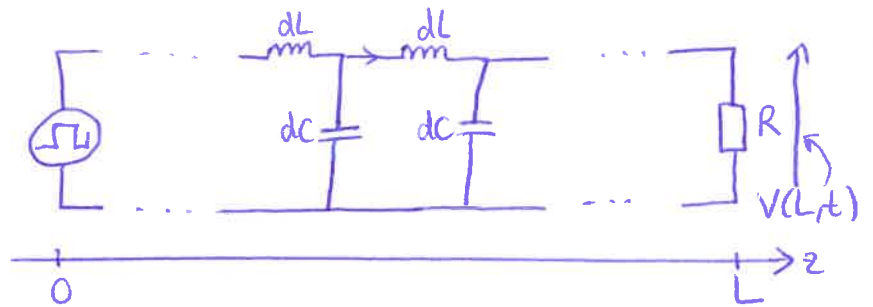
corde n°	1	2	3	4
T en Newton	$T = 0,63^2 \times 82,5^2$ $\times 7800 \times \pi \times (1,12 \times 10^{-3})^2$ $= 83$	$T = 0,63^2 \times 110^2$ $\times 7800 \times \pi \times (0,89 \times 10^{-3})^2$ $= 93$	$T = 0,63^2 \times 147^2$ $\times 7800 \times \pi \times (0,70 \times 10^{-3})^2$ $= 103$	$T = 0,63^2 \times 196^2 \times 7800 \pi$ $\times (0,55 \times 10^{-3})^2$ $= 113$

corde n°	5	6
T en Newton	$T = 0,63^2 \times 247^2$ $\times 7800 \pi \times (0,35 \times 10^{-3})^2$ $= 73$	$T = 0,63^2 \times 330^2 \times 7800$ $\times \pi \times (0,25 \times 10^{-3})^2$ $= 66$

Exercice II :

Câble coaxial

Présence des coordonnées x et z dans l'énoncé : on a choisi z ($z=0, z=L$) $\Leftrightarrow$ ($x=0, x=L$).



1. En supposant $R=0$, la loi d'Ohm donne $V(L,t)=0$.

On, $V(L,t) = V_i(L,t) + V_r(L,t)$ en notant $V_i(L,t)$ l'onde de tension incidente
 $V_r(L,t)$ l'onde de tension réfléchie

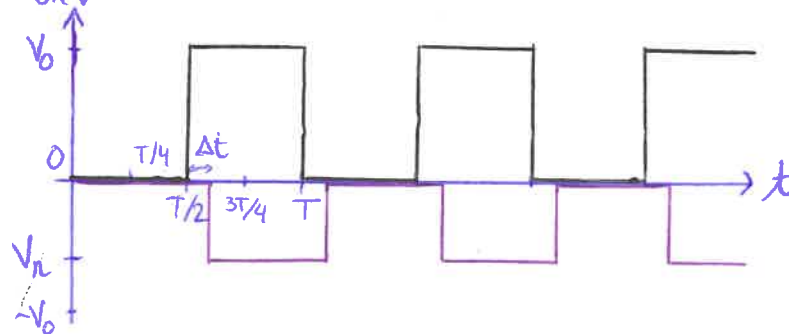
D'où $V_i(L,t) + V_r(L,t) = 0$ donc $\frac{V_r(L,t)}{V_i(L,t)} = -1 = \text{coefficient de réflexion}$

2. On note $V_r = KV_0$ où $|K| < 1$.

On peut tracer :

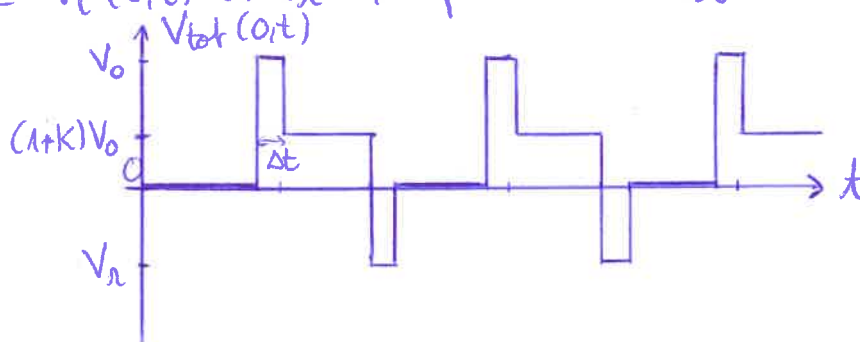
- $V_i(0,t)$

- $V_r(0,t)$



L'onde réfléchie est d'amplitude $KV_0 = V_r$ où $K < 0$.
Le retard Δt est inférieur à $T/4$ et $V_r(0,t)$ est nul jusqu'à $\frac{T}{2} + \Delta t$.

On additionne $V_i(0,t)$ et $V_r(0,t)$ pour avoir $V_{\text{tot}}(0,t)$:



3. 2V/grand carré, 2μs/grand carré



$$V = V_0 = 18 \cdot \frac{2}{5} = 7,2 \text{ V}$$

$$V = 0$$

$$V = V_r = -15 \cdot \frac{2}{5} = -6 \text{ V}$$

$$\Delta t = 3 \cdot \frac{2}{5} = 1,2 \mu\text{s}$$

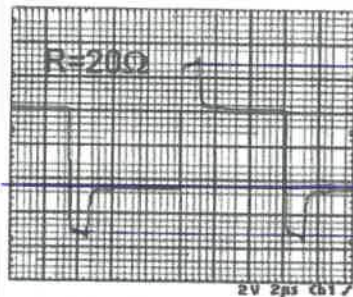
L'onde réfléchie parcourt $2L$ en Δt .

$$\text{D'où } c = \frac{2L}{\Delta t} = \frac{900}{1,2 \cdot 10^{-6}} = 7,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Δt est le retard de l'onde réfléchie / onde incidente
la distance parcourue est $2L$

4. Avec $V_0 = 7,2V$ et $V_r = KV_0 = -6V$, $\boxed{K = \frac{V_r}{V_0} = \frac{-6}{7,2} = -0,8}$ 2/2

5. En échantillant $\pi = \frac{V_r(\pi=L)}{V_i(\pi=L)} = \frac{V_r(\pi=0)}{K^2 V_i(\pi=0)}$, on mesure et on calcule π sur les oscillogrammes suivants :

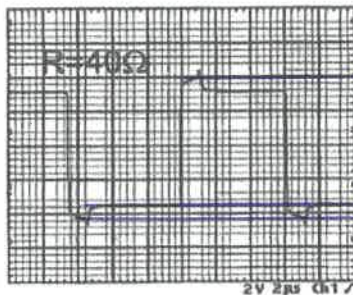


$V = V_0 = 18 \cdot \frac{2}{5} = 7,2V$

$V = 0$

$V = V_r = -7 \cdot \frac{2}{5} = -2,8V$

Donc $\boxed{\pi} = \frac{-2,8}{(-0,8)^2 \cdot 7,2} = \boxed{-0,6}$

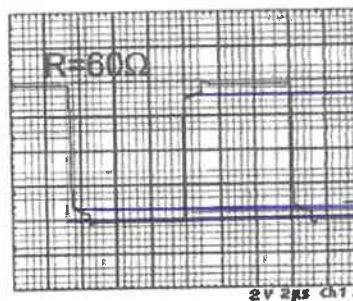


$V = V_0 = 19 \cdot \frac{2}{5} = 7,6V$

$V = 0$

$V = V_r = -2 \cdot \frac{2}{5} = -0,8V$

Donc $\boxed{\pi} = \frac{-0,8}{(-0,8)^2 \cdot 7,6} = \boxed{-0,2}$



$V = V_0 = 17 \cdot \frac{2}{5} = 6,8V$

$V = V_r = 2 \cdot \frac{2}{5} = 0,8V$

$V = 0$

Donc $\boxed{\pi} = \frac{0,8}{(-0,8)^2 \cdot 6,8} = \boxed{0,2}$



$V = V_0 = 14 \cdot \frac{2}{5} = 5,6V$

$V = V_r = 4 \cdot \frac{2}{5} = 1,6V$

$V = 0$

Donc $\boxed{\pi} = \frac{1,6}{(-0,8)^2 \cdot 5,6} = \boxed{0,4}$

Le coefficient de réflexion change de signe entre $R = 40\Omega$ et $R = 60\Omega$.
On peut supposer qu'il sera nul pour $\boxed{R = 50\Omega}$. — TB