Groupe 9

TD n° 20 Exercice I.

à l'équivalent en O → charge négative $\vec{E}$ est dirigé vers la charge ⊖

1.

endroit où on cherche $\vec{E}$

Théorème de superposition :

$$\vec{E}(0) = \underset{\text{créé par } q}{\vec{E}(0)} + \underset{\text{créé par } -q}{\vec{E}(0)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(\underbrace{\vec{BO}}_{\text{selon } -\vec{u}_x})}{a^3} + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-q)(\underbrace{\vec{AO}}_{\text{selon } +\vec{u}_x})}{a^3}\right)$$

$$= -\frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^3} \vec{u}_x$$

⚠ homogénéité

$$\boxed{\vec{E}(0) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^3} \vec{u}_x}$$

- $\vec{E} = -\vec{grad}\, V \Leftrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ← car le champ est colinéaire à $\vec{u}_x$

⚠ scalaire

$$\cancel{\boxed{\Leftrightarrow V(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a} x \, \vec{u}_x}}$$

Vous devez dériver une fonction, pas la VALEUR de la fonction.

↳ Théorème de superposition

$$V(0) = \underset{+q}{V(0)} + \underset{-q}{V(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{a} - \frac{q}{a}\right) = 0$$

2. $\vec{E} = E_r(r,\theta)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta)\vec{u}_\theta$

$$\vec{E} = -\vec{grad}\, V$$

en sphérique $\left(\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\right.$ | B

$$\left(\frac{1}{U^n}\right)' = \frac{-nU'}{U^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\right)' = \frac{-2}{r^3}$$

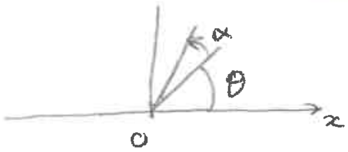
$$= -\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)$$

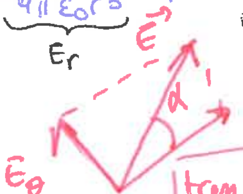
$$= -\left(\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{r^3}\right) + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-\sin\theta)\right) = \underbrace{\frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{E_r}\vec{u}_r + \underbrace{\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{E_\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta}$$ B

3. On a,



$$\cancel{\boxed{\alpha + \theta < \frac{\pi}{2}}}$$



$$\boxed{\tan\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}\tan\theta}$$

4. $\vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta$

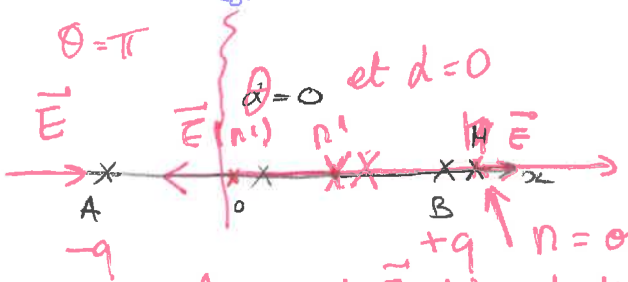
* pour $\theta = 0$;

$$\vec{E} = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r \qquad \sin(0) = 0$$

* pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

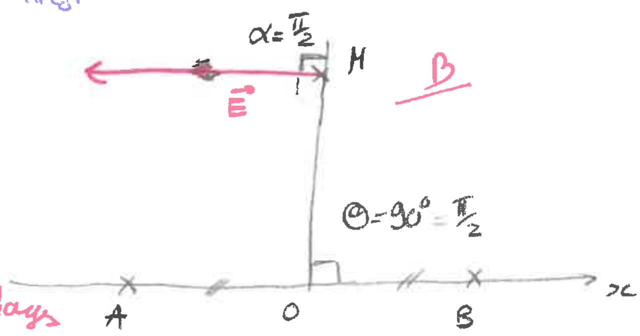
$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$\theta = \pi$ et $\alpha = 0$

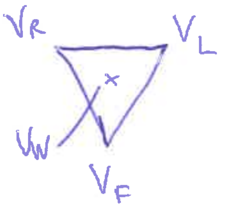


M = origine de $\vec{E}$

le sens de $\vec{E}$ dépend de la position / charge



B

5. 

~~ ~~ V_W : arbitrairement choisi

dérivation bipolaire = différence entre le potentiel de 2 électrodes exploratrices

$$\left.\begin{array}{l|l} V_L - V_R & V_R - V_L \\ V_F - V_R & V_R - V_F \\ V_L - V_F & V_F - V_L \end{array}\right\} \rightarrow \underline{\underline{6 \text{ dérivations bipolaires}}}$$

(opposés 2 à 2 !)

dérivation unipolaire = diff. de potentiel entre 1 électrode exploratrice et celle de référence. $V_i - \underbrace{V_W}_{\text{référence}}$

$$\left.\begin{array}{l} -(V_W - V_R) \\ -(V_W - V_F) \\ -(V_W - V_L) \end{array}\right\} \rightarrow \underline{3 \text{ dérivations unipolaires}}.$$

6. L'électrode de référence permet avec une dérivation unipolaire de connaître le potentiel des électrodes exploratrices.

7. $V = \dfrac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\rightarrow$ $V_R = \dfrac{\cancel{\vec{P}\,\vec{OR}} \cdot \vec{OR}}{4\pi\varepsilon_0 r_R^3} = \dfrac{\cancel{q\,(OR)^2}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 (OR)^3}} = \boxed{\dfrac{q}{\cancel{4\pi\varepsilon_0 (OR)}} = V_R}$ $= r_R$

$\vec{P} = q\,\underline{\underline{AB}}$ distance entre les 2 charges $\neq OR$

de même : $\boxed{V_L = \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{OL}}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{(OL)}_{r_L}{}^3}}$ et $\boxed{V_F = \dfrac{\vec{P}\cdot\vec{OF}}{4\pi\varepsilon_0 \underbrace{(OF)}_{r_F}{}^3}}$

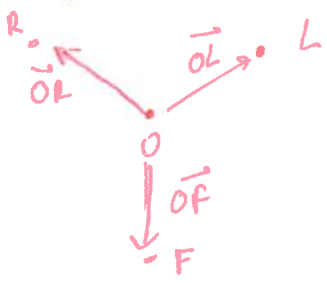
8. L'hypothèse 3 impose que les <u>points R, F, L sont équidistants du centre O</u>, donc que $\|\vec{OR}\| = \|\vec{OL}\| = \|\vec{OF}\| = r$

Par l'hypothèse 2, on en déduit que le potentiel en O, est la somme de $V_R + V_F + V_L = V_0$

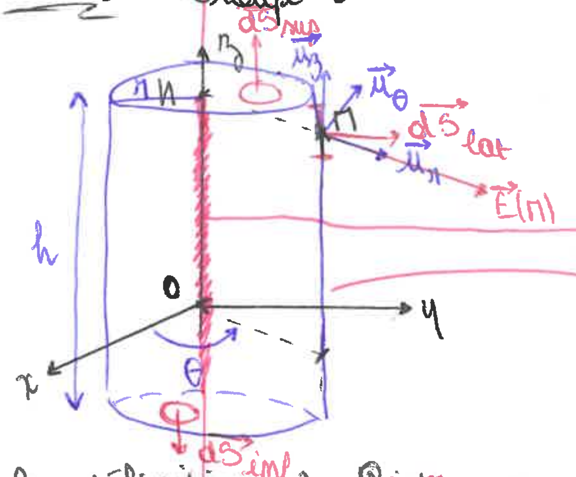
$\dfrac{\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \underbrace{(\vec{OL} + \vec{OF} + \vec{OR})}_{\vec{0}}$? $= 0$ ~~car $\vec{P} = q\vec{OO}$~~ $= 0$

9. Ainsi, comme le centre du triangle est au niveau du coeur, et que <u>son potentiel est nul</u>, alors <u>on peut y placer une électrode de référence V_W nulle</u>.

<u>B</u> $\rightarrow$ nécessité de régler correctement les 3 vecteurs et les distances.



Exercice 2 : Groupe 8



$\boxed{Q_{INT} = \lambda\, h.}$

autre : Surface de gauss.

1) Par définition, $\lambda = \dfrac{Q_{\cancel{int}}}{\|\vec{OM}\|} = \dfrac{Q_{\cancel{int}}}{\cancel{R}}$ donc $[\lambda] = C \cdot m^{-1}$

2) On définit les plans de symétrie des CHARGES

$\Pi_1(M ; \vec{u}_r ; \vec{u}_\theta) = \Pi_s$ ⟶ à identifier.
$\Pi_2(M ; \vec{u}_r ; \vec{u}_z) = \Pi_s$ } car coupe les charges.

$\Pi_3(M ; \vec{u}_z ; \vec{u}_\theta) \neq \Pi_s$ car ne coupe pas les charges.

Donc $\vec{E}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$ càd $\vec{E}(M)$ colinéaire à $\vec{u}_r$ — $\boxed{\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\, \vec{u}_r}$

~~Or, $\vec{E}(M)$ varie seulement~~ ~~invariant~~ par ~~translation sur~~ $\vec{u}_r$

Donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\, \vec{u}_r}$

rédaction INSUFFISANTE
les charges sont invariantes par rotation d'angle θ
DONC E(r, θ, z) est INDEPENDANT de θ
les charges sont invariantes par translation selon z
DONC E(r, z) est INDEPENDANT de z
donc

3) (voir •)

4) On cherche E(r) :

~~Théorème de Gauss~~ : $\Phi_{S_{Gauss}}(\vec{E}) = \Phi_{S_{lat}}(\vec{E}) + \Phi_{S_{sup}}(\vec{E}) + \Phi_{S_{inf}}(\vec{E})$

$= \int E(r)\vec{u}_r\, dS\, \vec{u}_r + \iint E(r)\underbrace{\,dS\, \vec{u}_z}_{\vec{u}_r} + \iint E(r)\vec{u}_r(-dS\, \vec{u}_z)$

$= E(r)\, S_{lat}$

$\Phi_{S_{Gauss}}(\vec{E}) = E(r)\, 2\pi r h$

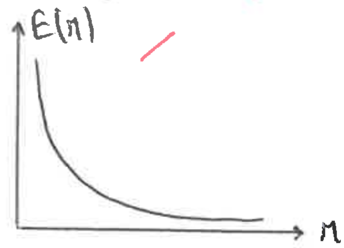
De plus, par le théorème de Gauss,

$\Phi_{S_{fermée}}(\vec{E}) = \Phi_{S_{Gauss}}(\vec{E}) = E(r)\, 2\pi r h = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

c'est 1 VARIABLE à expliciter en fonction de λ
$\boxed{Q_{INT} = \lambda h}$

$\Leftrightarrow E(r) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0 2\pi h} \dfrac{1}{r}$

$= \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi} \dfrac{1}{r}$

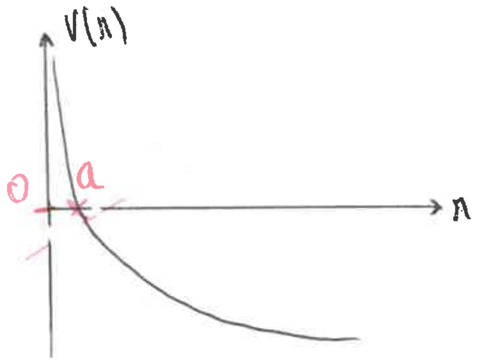


5) On a : $-\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r \iff -\frac{dV}{dr} = E(r)$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{\cancel{Q_{int}}\ \lambda h}{2\pi h \varepsilon_0} \ln r + cte$$

On pose : cte = 0 → ce n'est pas possible car ici il y a des charges à « l'infini » le fil étant infini

D'où $V(r) = -\frac{\cancel{Q_{int}}\ \lambda h}{2\pi h \varepsilon_0} \ln r$ → dans un ln( ) ↑ grandeur sans dimension.



posons $V(a) = 0$ par exemple

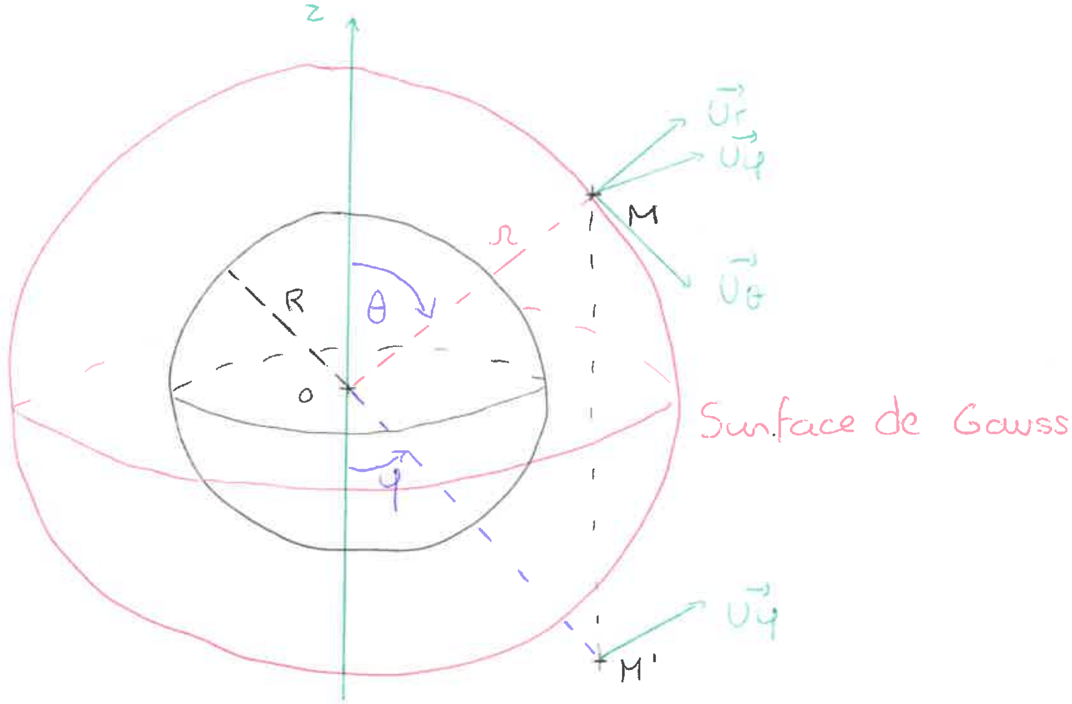
$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln a + cst$$

$$\Rightarrow cst = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln a$$

et $\boxed{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{a}\right)}$

Groupe 6 : Exercice 3 :

1)



• Plan de symétrie de charge : Π_S

$\Pi_1(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi}) = \Pi_{S1}$ car coupe les charges selon 1 diamètre

$\Pi_2(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}) = \Pi_{S2}$ car coupe les charges "

$\Pi_3(M, \vec{u_\varphi}, \vec{u_\theta})$ n'est pas un plan de symétrie car ne coupe pas les charges.

$\Rightarrow \vec{E}(M)$ est colinéaire à $\vec{u_r}$ (~~car~~ $\vec{E}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$). donc.

on a donc $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{u_r}$.

• Invariances par rotation / translation :

~~$E(r,\theta,\varphi)$ est~~ Les CHARGES SONT invariant par rotation d'angle θ et φ.

mais ~~n'est~~ pas invariant par translation selon $\vec{u_r}$

donc $E(r,\theta,\varphi)\ \vec{u_r} = E(r)\vec{u_r}$.

$\boxed{\text{donc } E(r,\theta,\varphi) \text{ est indépendant de } \theta \text{ et } \varphi}$

• On applique le théorème de Gauss :

$\Phi_{\text{à travers } S_{gauss}}(\vec{E}) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Or $\Phi_{\text{à travers } S_{gauss}}(\vec{E}) = \oiint_{S_{gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot$ Surface de la sphère de rayon r

$\Rightarrow \Phi$ à travers $S_{gauss}(\vec{E}) = E(r)\,4\pi r^2$

Ici $Q_{int} = \rho$. Volume de la sphère de rayon R

$= \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$.

$\Leftrightarrow E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\,\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$

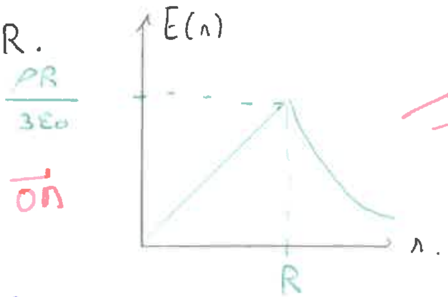
$\Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}$ (pour $r > R$). donc $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}\vec{u_r}$

dans le cas $r < R$:

Φ à travers $S_{gauss}(\vec{E}) = E(r)4\pi r^2$ et $Q_{int} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$

$\Leftrightarrow E(r)\,4\pi r^2 = \frac{\rho\,\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$ $\Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$

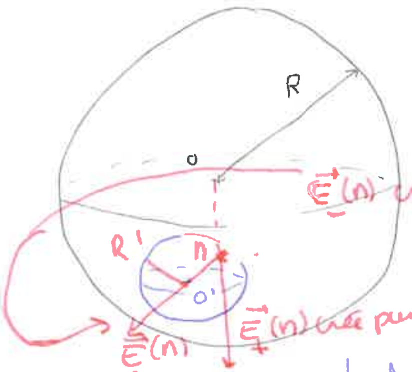
donc $\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u_r}$ pour $r < R$.



on peut poser $\vec{E}(n) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{On}$ avec $r\vec{u_r} = \vec{On}$

TB

2)



La boule bleue (cavité sphérique) de centre O' est de rayon R'.

$\vec{E}(n)$ créé par la sphère de rayon R' de charge − Q

$\vec{E}(n)$ créé par la sphère de rayon R de charge + Q

Prenons un point M à l'intérieur de cette cavité et la surface de Gauss passant par ce point.

d'après le théorème de Gauss :

Φ à travers $S_{gauss}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$ car $Q_{int} = 0$

En effet, il n'y a pas de charges à l'intérieur de cette cavité. L'application de ce théorème est donc impossible

oui ; il y a aussi un argument de symétrie ...

3) La cavité vide de charges peut être modélisée par la superposition d'une sphère uniformément chargée de charge +Q.
et d'une sphère uniformément chargée de charge -Q.

Champ dans la cavité de centre O' en M
$\vec{E}_{cavité\,(-)}(M) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{O'M}$ $(\rho<0)$ créé par la charge de densité $-\rho$

Ainsi, comme il s'agit là encore de deux sphères de rayon R', en reprenant les résultats des questions précédentes, on obtient :

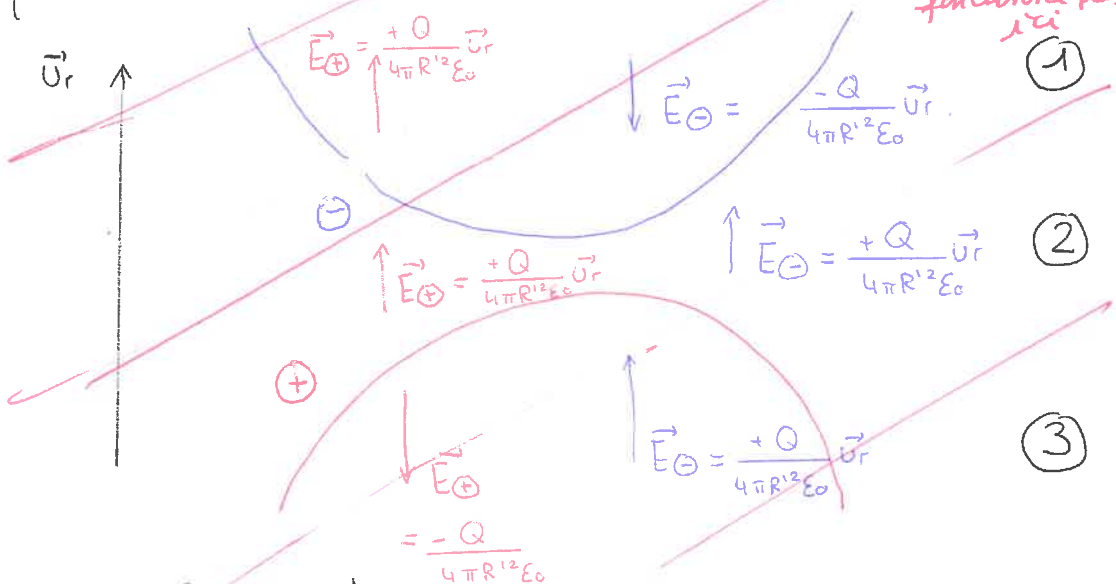
$\vec{E}_{cavité\,(+)}(M) = +\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OM}$ champ créé par la charge de densité $+\rho$

$E(R') = \frac{Q}{4\pi R'^2\varepsilon_0}$

non, il faut prendre l'expression du champ A L'INTERIEUR DES BOULES

$$\boxed{\vec{E}_{cavité}(M) = \vec{E}_{+}(M) + \vec{E}_{-}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{OM} - \vec{O'M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'}}$$ indépendant de M donc uniforme.

~~On peut comparer cet exercice à l'exemple du condensateur. Ainsi, on peut se représenter le problème de cette façon :~~ ↳ bonne idée, mais ne fonctionne pas ici



HS

~~en appliquant le théorème de superposition :~~

~~① $\vec{E}_{\oplus} + \vec{E}_{\ominus} = \vec{0}$~~

~~② $\vec{E}_{\oplus} + \vec{E}_{\ominus} = \vec{0}$~~

~~③ $\vec{E}_{\oplus} + \vec{E}_{\ominus} = \frac{+Q}{4\pi R'^2\varepsilon_0}\vec{u}_r + \frac{+Q}{4\pi R'^2\varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{+Q}{2\pi R'^2\varepsilon_0}$ uniforme dans la cavité.~~

TD 20 groupe 2

Exercice IV

1) $\vec{F} = m . \vec{G}(P)$

2)

électrostatique	gravitation
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{G} = - 4\pi \mu \mathcal{G}$
$1/\varepsilon_0$	$-4\pi \mathcal{G}$
$\vec{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\vec{rot}(\vec{G}) = \vec{0}$

(μ analogue à ρ)

Une différence fondamentale entre l'électrostatique et la gravitation est que les forces électrostatiques peuvent être répulsives.

AU (Nommez le théorème utilisé et énoncez le entièrement,

3) $\mathcal{C}(\vec{G}) = \Phi(\vec{rot}(\vec{G})) = \cancel{\vec{0}}$) scalaire. car $\vec{rot}(\vec{G}) = \vec{0}$
Γ fermé à travers $S(\Gamma)$
(d'après le théorème de Stokes. | au!

donc $\vec{G}$ est à ~~flux~~ circulation conservatif(ve), donc il existe un potentiel gravitationnel Φ.

alors, $\vec{G} = \pm \vec{grad}\, \Phi$ or, $\operatorname{div} \vec{G} = - 4\pi \mu \mathcal{G}$

donc $\operatorname{div}(\pm \vec{grad}\, \Phi) = - 4\pi \mu \mathcal{G}$

finalement, en choisissant $\vec{G} = - \vec{grad}\, \Phi$, on obtient :

$$\boxed{\Delta \Phi = 4\pi \mu \mathcal{G}}$$

B

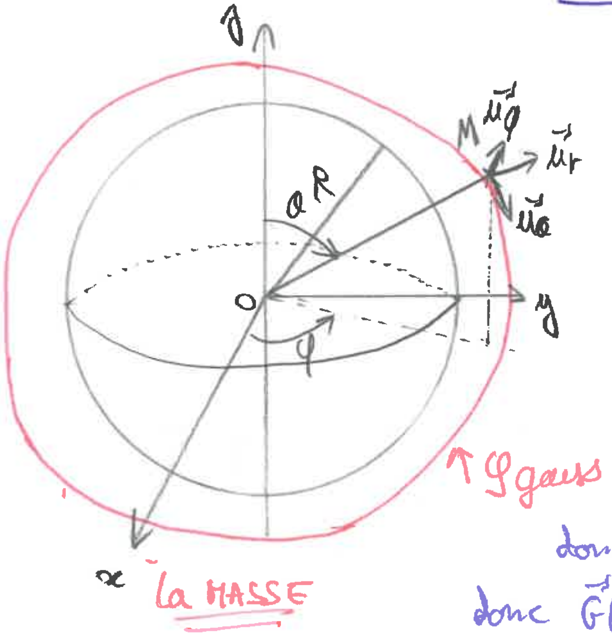
4) Théorème de Gauss : $\underset{\text{à travers } S \text{ fermée}}{\Phi(\vec{E})} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div}(\vec{E}) d\tau = \iiint_{V(S)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$

par analogie,

$$\underset{\substack{\text{à travers}\\ S \text{ fermée}}}{\Phi(\vec{G})} = \iiint_{V(S)} \operatorname{div}\vec{G} \cdot d\tau = \iiint_{V(S)} -4\pi\mu\mathcal{G} \cdot d\tau = \underline{-4\pi\mathcal{G} \cdot M_{int}}$$

théorème de Gauss gravitationnel : $\boxed{\underset{\substack{\text{à travers}\\ S \text{ fermée}}}{\Phi(\vec{G})} = -4\pi\mathcal{G}\, M_{int}}$

5)



identifier les variables

$\Pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) = \Pi_S$ car Π_1 coupe la masse selon un diamètre.

$\Pi_2(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \Pi_S$ car Π_2 coupe la masse selon un diamètre.

donc $\vec{G}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$

donc $\vec{G}(M) = G(M)\,\vec{u}_r$

de plus, ~~$\vec{G}(M)$~~ est invariant par rotation d'angle θ ou φ car la distribution de la masse est sphérique. donc $G(M) = G(r, \theta, \varphi)$ est INDEPENDANT de θ et φ

~~Aussi, comme G est une fonction décroissante de r~~, $\underline{\vec{G}(M) = +G(r)\,\vec{u}_r}$

l'algébrisation vient dans le théorème de gauss

⚠ ici μ n'est pas uniforme

6) par définition, $\mu(r) = \cancel{\dfrac{M(r)}{V_{boule}}}$ $\boxed{\mu(r) = \dfrac{dm}{d\tau}}$

donc $\cancel{M(r) = V_{boule} \cdot \mu(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \mu(r)}$ $= \int dm = \iiint \mu(r)\, d\tau$

comme la distribution sphérique de masse est non homogène, $\mu(r)$ est non homogène sur r,

alors $\boxed{M(r) = \int_0^r 4\pi\, r'^2 \cdot \mu(r')\, dr'}$

avec $d\tau = S\,dr'$ volume élémentaire d'une couronne sphérique de rayon dr' de surface S

ou en sphérique $d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$4\pi r'^2 dr' = d\tau = r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

Exercice IV

7) théorème de Gauss :

$$\underset{\substack{\text{à travers}\\ S \text{ fermée}}}{\Phi(\vec{G})} = \oint_{S_{Gauss}} \vec{G}(r) \cdot \vec{dS} = G(r) \cdot 4\pi r^2$$

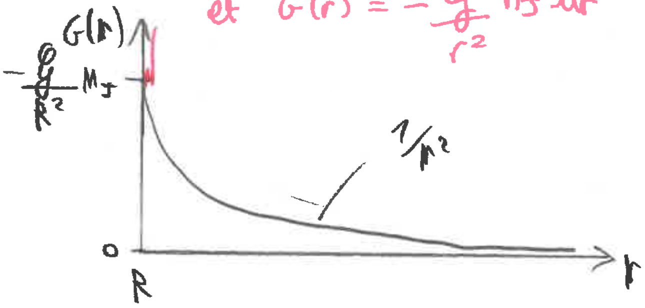
ci-dessus

or, $\underset{\substack{\text{à travers}\\ S \text{ fermée}}}{\Phi(\vec{G})} = -4\pi \mathcal{G} M_{int}$

donc $G(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi \mathcal{G} M_{int}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{G(r) = -\frac{\mathcal{G}}{r^2} M_J}$ pour $r > R$, et avec $M_J = M(R)$ et $\rho(r)$ la masse volumique non homogène de Jupiter.

et $\vec{G}(r) = -\frac{\mathcal{G}}{r^2} M_J \vec{u_r}$



Cherchons $\Phi(r)$: $\vec{G}(r) = -\vec{grad}\, \Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr} \vec{u_r}$

donc $G(r) = \frac{-d\Phi(r)}{dr}$

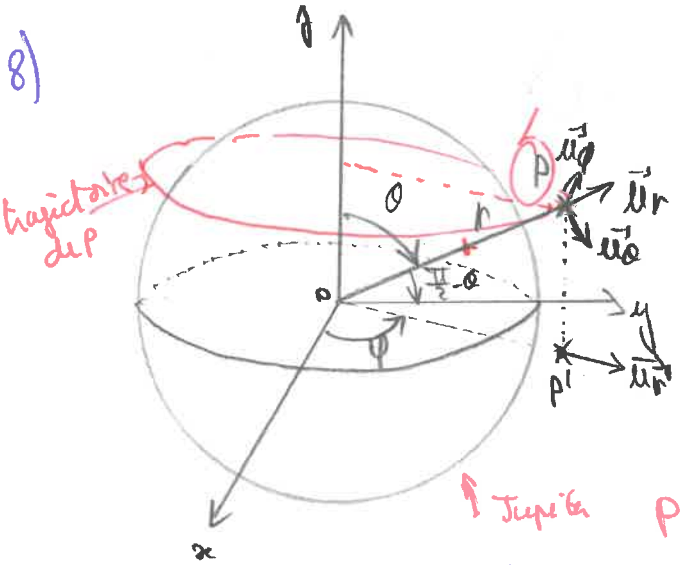
$\frac{d\Phi(r)}{dr} = -G(r) = +\frac{\mathcal{G}}{r^2} M_J$

primitive $\hookrightarrow$

$\Phi(r) = -\frac{\mathcal{G}}{r} M_J + \underbrace{cte}_{=0}$ car le potentiel est nul en $+\infty$.

$$\Phi(r) = -\frac{\mathcal{G} M_J}{r}$$

8)



P' est le projeté de P dans le plan Oxy

On définit $\vec{u_{r'}}$ le vecteur unitaire orthoradial contenu dans le plan Oxy.

Jupiter est en rotation uniforme autour de Oz.

$\rightarrow \omega_{sid} = \dot{\varphi}$ B

P ∈ atmosphère de Jupiter

$$\vec{OP} = r\,\vec{u_r}$$

$$\vec{v} = r\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)\dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi} = \underline{r\sin(\theta)\,\omega_{sid}\,\vec{u_\varphi}}$$

comme la rotation est uniforme, $\dot{\omega}_{sid} = \ddot{\varphi} = 0$.

donc $\boxed{\vec{a} = -r\sin\theta\,\omega_{sid}^2\,\vec{u_{r'}}}$ B

9) Les volumes élémentaires de l'atmosphère de Jupiter situés proche de l'équateur (donc loin de l'axe Oz, pour θ grand) sont soumis à une plus grande accélération que les volumes élémentaires situés proches des pôles (donc proche de l'axe Oz). → ce qui justifie l'applatissement des pôles

→ et la force subit par dm autour de P s'écrit $d\vec{f} = dm\,\vec{a}$

→ force centrifuge

10) $K = \dfrac{I_J}{M_J R_J^2}$ or, si Jupiter est une boule pleine, homogène,

$$I_J = \frac{8\pi}{15}\,\mu\,R_J^5$$

$$\text{donc } K = \frac{8\pi}{15}\underbrace{\frac{\mu}{M_J}}_{=\frac{1}{V_{Jupiter}}}\frac{R_J^5}{R_J^2} = \frac{8}{15}\pi\,\frac{R_J^3}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{2}{5}$$

si $K = \frac{2}{5}$ → planète sphérique

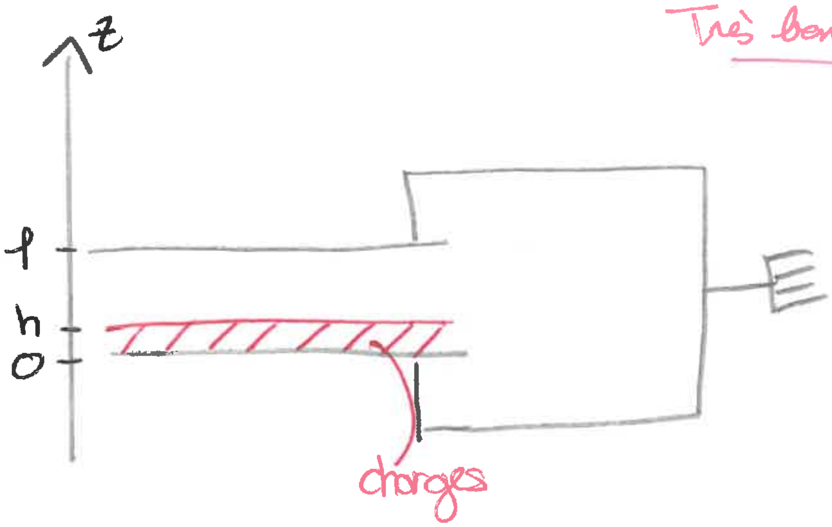
si $K \neq \frac{2}{5}$ → planète non sphérique.

TD 20 : V. Mesures de charges

Groupe 1

Très bon travail

a)



l'équation de poisson s'écrit : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

• entre $0 \leq z \leq h$: V ne dépend que de z donc

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

donc on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

• entre $h \leq z \leq \ell$: il n'y a pas de charge $\rho = 0$:

donc $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$.

b) • pour $h \leq z \leq \ell$: $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow V(z) = az + b$

• pour $0 \leq z \leq h$: $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow V(z) = \frac{-\rho}{2\varepsilon_0} z^2 + cz + d$

or $V(0) = 0$ et $V(\ell) = 0$

d'où $V(0) = d = 0$ et $V(\ell) = a\ell + b = 0$

$\Rightarrow b = -a\ell \Rightarrow V(z) = a(z - \ell)$

on obtient le système suivant : Groupe 1

$$V(z)\begin{cases} a(z-\ell) & \text{si } h\le z\le \ell \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}z^2+cz & \text{si } 0\le z\le h\end{cases}$$

D'après l'énoncé V et E sont des fonctions continues en h.

par définition $\vec{E}=-\vec{grad}V=-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$

$$E(z)=\begin{cases} -a & \text{si } h\le z\le \ell \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}z-c & \text{si } 0\le z\le h\end{cases}$$

$E(h)(h\le z\le \ell)=E(h)(0\le z\le h)$ et $V(h)(h\le z\le \ell)=V(h)(0\le z\le \ell)$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\rho}{\varepsilon_0}h-c=-a \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}h^2+ch=a(h-\ell)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c-\frac{\rho}{\varepsilon_0}h=a \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}h^2+ch=\left(c-\frac{\rho}{\varepsilon_0}h\right)(h-\ell)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=c-\frac{\rho}{\varepsilon_0}h \\ c\ell=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}h^2+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}h^2+\frac{\rho}{\varepsilon_0}h\ell\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0\ell}h^2 & \text{oui} \\ c=\frac{\rho}{\varepsilon_0}h-\frac{\rho}{2\varepsilon_0\ell}h^2 & \text{oui}\end{cases}$$

$$\text{d'où}\quad b=-a\ell=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}h^2 \quad \text{B}$$

$$\text{d'où } V(z)=\begin{cases}-\frac{\rho}{2\varepsilon_0\ell}h^2z+\frac{\rho}{2\varepsilon_0}h^2 & \text{si } h\le z\le \ell \\ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}z^2+\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}h-\frac{\rho}{2\varepsilon_0\ell}h^2\right)z & \text{si } 0\le z\le h\end{cases}$$

$$V(z)=\begin{cases}\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\ell}\right) & \text{si } h\le z\le \ell \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(-\frac{z^2}{2}+z\left(h-\frac{h^2}{2\ell}\right)\right) & \text{si } 0\le z\le h\end{cases}$$

TB

vérifions que V(z) est bien continue en h :

$$V(h)(h\le z\le \ell)=\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{h}{\ell}\right)=\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho h^3}{2\varepsilon_0\ell}$$

$$V(h)(0\le z\le h)=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(-\frac{h^2}{2}+h^2-\frac{h^3}{2\ell}\right)=\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho h^3}{2\varepsilon_0\ell}$$

→ c'est bien continue en h.

2/5

d'après les calculs précédents on a $E(z) = -a$

d'où $E(\ell) = \frac{\rho h^2}{2\ell\varepsilon_0}$ / B

c) $v(z) = \begin{cases} \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\ell}\right) & \text{si } h \leq z \leq \ell \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(-\frac{z^2}{2} + z\left(h - \frac{h^2}{2\ell}\right)\right) & \text{si } 0 \leq z \leq h. \end{cases}$

V s'annule en 0 et en ℓ.

- en $h \leq z \leq \ell$ $v(z)$ est une fonction affine de pente $-\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0 \ell}$ et d'ordonnée à l'origine : $\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}$
- en $0 \leq z \leq h$: $V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + \frac{h\rho}{\varepsilon_0} z - \frac{\rho h^2}{\varepsilon_0 2\ell}$

$v(z)$ est donc une parabole

or $-\frac{\rho}{2\varepsilon_0} < 0$ donc parabole vers le bas.

Déterminons son maximum :

$v'(z) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} z + \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho h^2}{2\ell\varepsilon_0}$

$v'(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} z = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho h^2}{2\ell\varepsilon_0}$

$\Leftrightarrow z = h - \frac{h^2}{2\ell} < h$ or $\frac{h}{\ell} = 0{,}2$

donc $h - \frac{h^2}{2\ell} = h - h\frac{0{,}2}{2} = 0{,}3h > 0$.

d'où $V_{max} = V\left(h - \frac{h^2}{2\ell}\right) = \frac{-\rho}{2\varepsilon_0}\left(h - \frac{h^2}{2\ell}\right)^2 + \left(h - \frac{h^2}{2\ell}\right)\left(\frac{\rho h}{\varepsilon_0} - \frac{\rho h^2}{2\ell\varepsilon_0}\right)$

$= -\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho h^3}{2\varepsilon_0 \ell} - \frac{\rho h^4}{4\ell^2\varepsilon_0} + \frac{\rho h^2}{\varepsilon_0} - \frac{\rho h^3}{2\ell\varepsilon_0} - \frac{\rho h^3}{2\ell\varepsilon_0} + \frac{\rho h^4}{4\ell^2\varepsilon_0}$

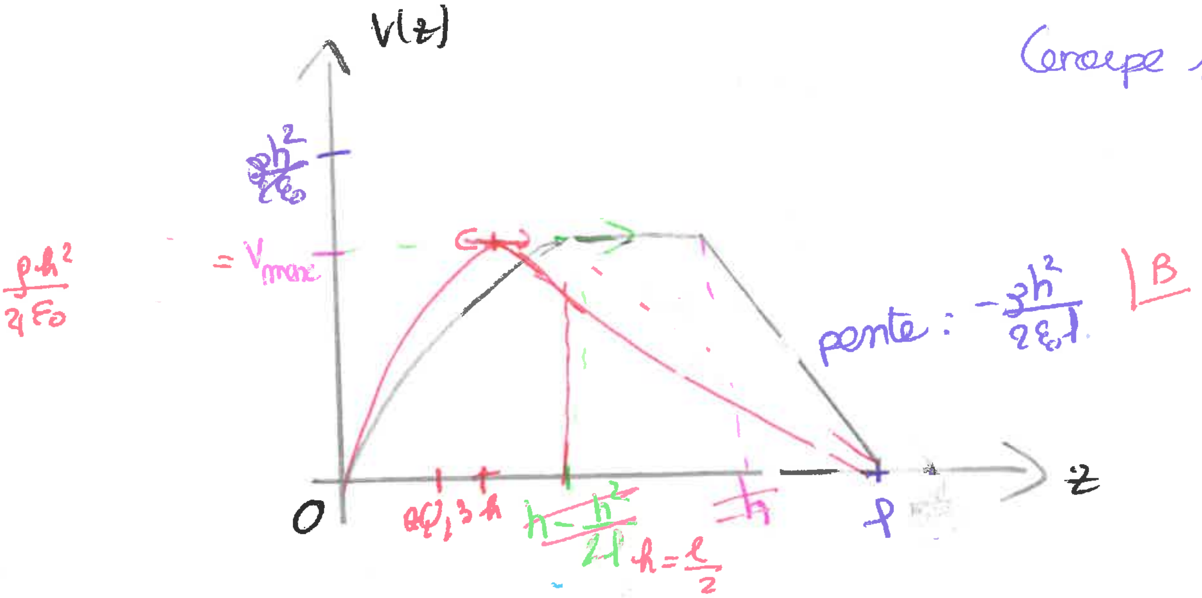
$V_{max} = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho h^3}{2\varepsilon_0 \ell}$

et $h = \ell/2$

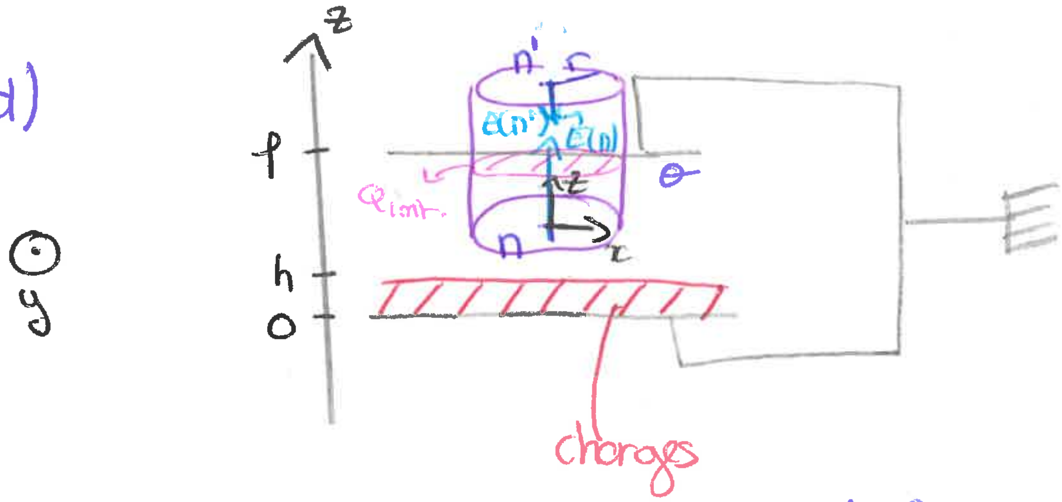
$V_{max} = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\rho h^2}{4\varepsilon_0}$.

3/5

Groupe 1.



d)



on fait l'hypothèse que les charges sont positives

* On choisit un repère cartésien.

* $\Pi_1 = (n, \vec{y}, \vec{z})$ et $\Pi_2 = (n, \vec{x}, \vec{z})$ sont des plans de symétries des charges

donc par propriétés topographiques du champ E :

→ $\vec{E}(n) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$

d'où $\vec{E}(n) = E(n)\vec{u}_z$

et $\|\vec{E}(n)\| = \|\vec{E}(n')\|$

car $E(n') = \text{sym } E(n)$/charges

ici on suppose $\vec{E}(n') = 0$

* Les charges sont invariantes par translations selon y et x, donc $E(n) = E(z)\vec{u}_z$

* Théorème de Gauss :

$$\oiint_{S_{Gauss}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \iint_{\text{base sup}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \iint_{\text{base inf}} \vec{E} \cdot \vec{dS} + \cancel{\iint_{\text{base lat}} \vec{E} \cdot \vec{dS}}$$

$= 0$ car $\vec{E} \perp \vec{dS}$

$\vec{E}(\text{base sup}) = 0$ par hypothèse

4/5

$$\Leftrightarrow \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \cancel{E(z)\iint_{base\ sup} d\vec{S}}^{\,0} + E(z)\iint_{base\ inf} dS$$

$E(z)$ uniforme sur la base inf

d'où $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \cancel{2}E(z)S$

or $Q_{int} = \sigma . S$

d'où $\frac{\sigma . S}{\varepsilon_0} = \cancel{2}E(z)S \Leftrightarrow E(z) = \frac{\sigma}{\cancel{2}\varepsilon_0}$

e) en $z = l \rightarrow$ il y a σ :

or d'après les questions précédentes

$$E(l) = \frac{\rho h^2}{2l\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\cancel{2}\varepsilon_0}$$

d'où $\boxed{\sigma = \frac{\rho h^2}{2l\cancel{\varepsilon_0}}}$

8) On cherche la force subie par l'électrode supérieure : = système

$$\vec{F}_{\text{elec sup}} = \vec{F}_{1\to 2} = q(\cancel{0}) \times \vec{E}(l) = q(l) \times \frac{h^2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

$$= \sigma S \times \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

$$= \frac{\rho h^2}{2l} S \times \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{\to \text{elec sup}} = \frac{\rho^2 h^4}{4l\varepsilon_0}\vec{u}_z\, S$$

or $q\cancel{R} = \frac{\|\vec{F}_{1\to 0}\|}{\|\vec{E}(l)\|}$ or $q = \rho S h$

d'où $\vec{F}_{\to \text{elec sup}} = \frac{q^2h^2}{S} \times \frac{1}{4l^2\varepsilon_0}\vec{u}_z$) TB

On peut mesurer la force $\vec{F}_{\to \text{elec sup}}$ avec un dynamomètre, de plus avec les dimensions et les autres grandeurs, on obtient directement la valeur de la charge q.

TB

TD20 EX VI Grp 2

1) Capacité d'un condensateur plan : $C = \frac{Q}{u} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ ← surface de l'électrode ; d ← distance qui sépare les 2 plaques du condensateur.

2) Pour retrouver cette expression, il faut,

- → déterminer l'expression du champ électrostatique créé par un plan infini chargé par +Q
- → appliquer le théorème de superposition (charge +Q et −Q)
- → utiliser la définition générale de la capacité d'un condensateur
- → remplacer par les expressions. $U_{AB} = \mathcal{C}_{A \to B}(\vec{E})$.

→ justifiez vos réponses

3) On peut modéliser le corps et la main droite par une association en ~~série~~. NON ! → ici les conducteurs sont soumis à la même tension ⇒ association //
↳ conducteurs parcourus par le même courant !

$$\boxed{C = \cancel{\frac{\varepsilon_0 S}{2d}} + \frac{\varepsilon_0 s}{\cancel{2}x} + \frac{\varepsilon_0 (S-s)}{\cancel{2}d}} = \cancel{\frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{s}{x} - \frac{S}{d}\right)}$$

↳ $C = \sum C_i \Rightarrow$ association //

Le musicien déplace sa main d'une distance dx : ↳ pas de schéma qui permet de comprendre ce que vous écrivez !

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 (S - s)}{\cancel{2}d} + \frac{\varepsilon_0}{\cancel{2}}\left(\frac{s}{x+dx} - \cancel{\frac{S}{d}}\right)}$$

avec $s << S$ $\quad = \frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon_0 s}{x\left(1 + \frac{dx}{x}\right)} \simeq \frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon_0 s}{x}\left(1 - \frac{dx}{x}\right)$

4) Seul le membre qui dépend de dx varie ⇒ $dC = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{s}{x+dx}$

$dC = \left(\frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon_0 s}{x}\right) - \left(\varepsilon_0 S/d + \frac{\varepsilon_0 s}{x}(1 - dx/x)\right) = s\,\varepsilon_0 dx / x^2$

AN : $dC = \frac{8{,}9 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot (10^{-2})^2}{2 \cdot (20 \cdot 10^{-2} + 0{,}5 \cdot 10^{-2})} = 2{,}2 \cdot 10^{-13}\,F$

$= \boxed{2{,}2 \cdot 10^{-4}\,nF}$

B La variation est très négligeable par rapport aux valeurs habituelles de capacité d'un condensateur, cependant, elle suffit à émettre un son différent. faire varier la fréquence sonore émise.

$dC = \frac{8{,}9 \cdot 10^{-12} \times 100 \times 0{,}5 \times 10^{-2}}{(20)^2} \simeq 10^{-14}\,F$

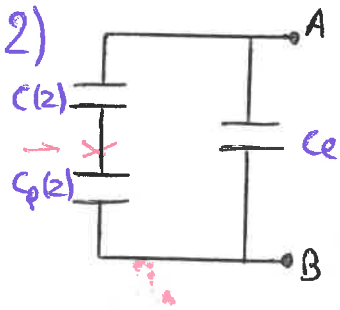
Exo VII TD 20 — GROUPE 3

cavité ↓ — enveloppe

1) L'interaction entre A et B qui sont 2 plans chargés modélise un condensateur. De même, lorsque la cible métallique est proche des armatures A ~~et B~~, cela forme 2 condensateurs supplémentaires.

bof !

2)



• Association en série de $C_p(z)$ et $C(z)$:

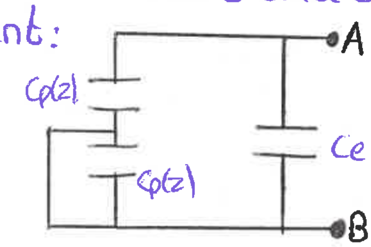
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C(z)} + \frac{1}{C_p(z)} \quad \text{donc } C_{eq} = \frac{C_p(z)\,C(z)}{C_p(z)+C(z)}$$

• Association en parallèle de C_{eq} et C_e :

$$\boxed{C_{AB} = C_{eq} + C_e = \frac{C_p(z)\,C(z)}{C_p(z)+C(z)} + C_e}$$

3) Pour s'affranchir de $C_p(z)$, il faut le mettre en court-circuit. Pour cela, il faut relier l'enveloppe extérieure B à la cible métallique. Ce qui donne le schéma suivant :

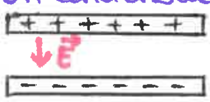
B



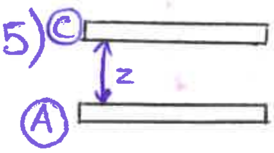
4) Un condensateur électrostatique est modélisé par 2 (plans infinis)

condensateur plan uniquement

surfaces métalliques de charges opposées en regard



5)



capacité du condensateur : $C = \frac{Q}{U}$

6) or $* \; U_{AC} = \mathcal{E}_{A\to C} = \int_A^C d\mathcal{E} = \int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} = Ez$

$* \; Q = \sigma S$ où σ : densité surfacique

donc $C = \frac{\sigma S}{Ez}$ et E à l'intérieur du condensateur : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Ainsi $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{z}}$ où $\boxed{S = \pi r_A^2}$ oui

Etapes de la démonstration : — plus

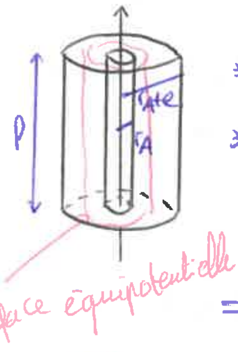
1) Plan de symétrie des charges
2) Etude des invariances des charges
3) Determiner une surface de Gauss
4) Théorème de Gauss → pour déterminer $\vec{E}$ créé par un plan infini
5) Théorème de superposition → pour déterminer $\vec{E}$ créé par les 2 plans infinis

Pour pouvoir négliger les effets de bord, il faut que

$\boxed{z \ll \sqrt{S}}$ où S : surface du plan ou $z \ll r_A$

z : distance entre les 2 plans infinis

6)



* Pour négliger les effets de bord, il faut que $\boxed{e \ll \sqrt{S}}$

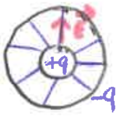
$e \ll r_A \ll l$

* Etude des plans de symétrie des charges :

$\Pi_1(M, \vec{U_r}, \vec{U_\theta}) = \Pi_S$ où Π_S : plan de symétrie des charges

$\Pi_2(M, \vec{U_r}, \vec{U_z}) = \Pi_S$

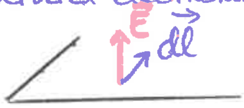
$\Rightarrow \vec{E} \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$ donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(M)\vec{U_r}}$



* $\vec{E}$ est tangent aux lignes de champ

* Relation entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique :

$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}V}$



Def surface équipotentielle : surface où V = cste donc dV = 0

$\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface équipotentielle car $-\vec{E}.\vec{dl} = \vec{0}$

↳ une équipotentielle ici, est cylindrique de rayon r

* Etude des invariances des charges :

Les charges restent invariantes par rotation d'angle θ et translation selon z

Ainsi $\vec{E}(M)$ est indépendant de θ et de z donc $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{U_r} = \boxed{E(r)\vec{U_r}}$

* Théorème de Gauss : $\phi_{S\,fermé}(\vec{E}) = \dfrac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$] où est la surface de gauss ?

↳ dessin OBLIGATOIRE

où $\phi_{S\,fermé}(\vec{E}) = \iint_{Slat} \vec{E}(M)d\vec{S} + \underbrace{\iint_{sup} E(M)\vec{U_r}.dS\vec{U_z} + \iint_{inf} E(M)\vec{U_r}.dS(-\vec{U_z})}_{=0 \text{ car } \vec{U_r}.\vec{U_z} = 0}$

$= E(r)2\pi r l$

Donc $E(r)2\pi r l = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ donc $E(r) = \dfrac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0}$ donc $\boxed{\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0}\vec{U_r}}$

* D'après la définition de la capacité : $C = \dfrac{Q}{U}$

or $U = \mathcal{C}(\vec{E}) = \int_{r_A}^{r_A+e} \vec{E}.\vec{dl} = \int_{r_A}^{r_A+e} \dfrac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0} dr = \dfrac{Q}{2\pi l \varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_A+e} \dfrac{1}{r} dr = \dfrac{Q \ln\left(\frac{r_A+e}{r_A}\right)}{2\pi l \varepsilon_0}$

Ainsi $C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_A+e}{r_A}\right)}$ par identification : $\boxed{\alpha = 2\pi l \varepsilon_0}$

* Le champ électrique à l'extérieur du condensateur est nul

↳ modifier la surface de gauss ; faire les schémas.

si $r < r_A$ $Q_{INT} = 0$ $\Rightarrow E = 0$

si $r > r_A + e$ $Q_{INT} = +Q - Q = 0$ $\Rightarrow E = 0$

Suite exo VII TD 20 — GROUPE 3

7) On avait à la question 2)

$$C_{AB} = C_e + \frac{C(z)C_p(z)}{C(z)+C_p(z)} \qquad \text{or } C_p \to \infty$$

donc $C_{AB} = C(z) + C_e$ / et $C(z) = \frac{\varepsilon_0 S}{z}$ (Q5) et $C_e = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_A+e}{r_A}\right)} = \frac{2\pi l\varepsilon_0}{\ln\left(1+\frac{e}{r_A}\right)}$

A l'aide d'un développement limité au 1er ordre de $\frac{e}{r_A}$, on obtient :

$$\boxed{C_{AB} = \frac{\varepsilon_0 \pi r_A^2}{z} + 2\pi l \varepsilon_0 \frac{r_A}{e} = \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z} + \frac{2l}{e}\right)}$$

$\ln(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$

8) D'après l'énoncé : $z = z_0 + \Delta z$

donc $C_{AB} \approx \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z_0+\Delta z} + \frac{2l}{e}\right) = \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{\frac{r_A}{z_0}}{1+\frac{\Delta z}{z_0}} + \frac{2l}{e}\right)$

A l'aide du développement limité à l'ordre 1 de $\frac{\Delta z}{z_0}$:

$$C_{AB} = \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z_0}\left(1-\frac{\Delta z}{z_0}\right) + \frac{2l}{e}\right)$$

$$= \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z_0} - \frac{r_A\Delta z}{z_0^2} + \frac{2l}{e}\right)$$

plus simplement pour $\Delta z = 0$, $z = z_0$

$C_{AB} = C_0 = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l r_A}{e} + \frac{\varepsilon_0 \pi r_A^2}{z_0}$

$$= \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z_0} + \frac{2l}{e}\right)\left(1 - \frac{\frac{r_A}{z_0}}{\left(\frac{r_A}{z_0}+\frac{2l}{e}\right)}\cdot\frac{\Delta z}{z_0}\right)$$

$\downarrow \times z_0 e$

$$= \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z_0} + \frac{2l}{e}\right)\left(1 - \frac{re}{re+2lz_0}\,\frac{\Delta z}{z_0}\right)$$

Par identification : $\boxed{C_0 = \pi\varepsilon_0 r_A\left(\frac{r_A}{z_0} + \frac{2l}{e}\right)}$ oui

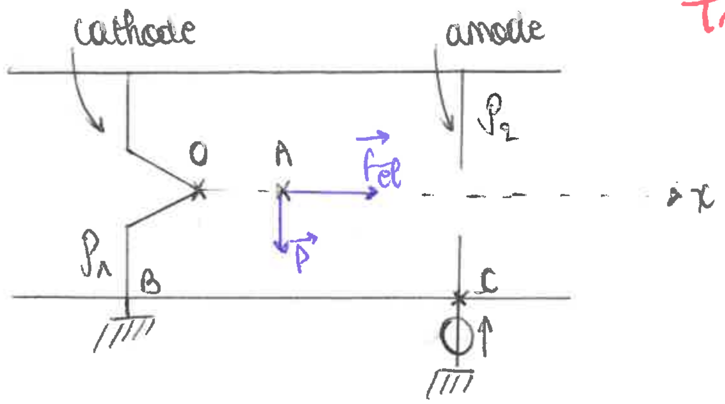
$$= \pi\times 9\times 10^{-12}\times 10\times 10^{-3}\left(\frac{10\times\cancel{10^{-3}}}{2\times\cancel{10^{-3}}} + \frac{2\times 10\times\cancel{10^{-3}}}{1\times\cancel{10^{-3}}}\right)$$

$$= \boxed{7\times 10^{-12}\,F = 7\,pF}$$ B

et $\boxed{k = \frac{-re}{re+2lz_0}}$ B $= \frac{-10\times\cancel{10^{-3}}\times 1\times\cancel{10^{-3}}}{10\times\cancel{10^{-3}}\times 1\times\cancel{10^{-3}} + 2\times 10\times 10^{-3}\times 2\times\cancel{10^{-3}}} = \boxed{-0,2}$ B

Exercice 1 : TD 20 Groupe 8

Très bon travail.



1) On effectue un bilan des forces sur A :

* Poids = négligeable car $\|\vec{P}\| \ll \|\vec{F}_{el}\|$

* force électrique $= \vec{F}_{el} = -e\vec{E}$

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W(\vec{F}) = W(\vec{F}_{el})$$

Or, $W(\vec{F}_{el}) = \int_B^C \vec{F}_{el} \cdot \vec{dl} = -\int_B^C e\vec{E} \cdot \vec{dl} = -e\,U_{BC} = -e(V_B - V_C) = -e(-V_a)$

$= eV_a$ TB

Donc $\frac{1}{2} m_e v_f^2 - \frac{1}{2} m_e v_i^2 = eV_a$ avec v_i négligeable

D'où $\frac{1}{2} m_e v^2 = eV_a \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2eV_a}{m_e}}$ B)

2) AN : $v = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 100}{9 \times 10^{-31}}} \simeq 6 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ C)

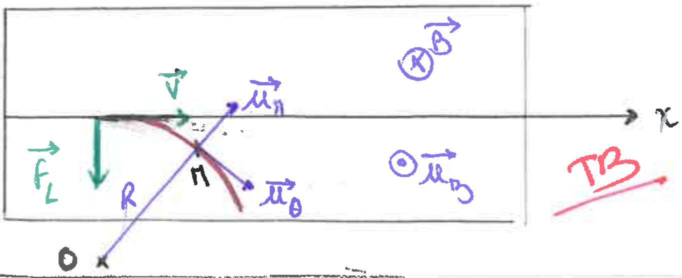
3) Par définition,

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eV_a}{m_e}}} = \frac{h}{\sqrt{2 e m_e V_a}}$$ A)

quantité de mouvement

AN : $\lambda_{DB} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 9 \times 10^{-31} \times 100}} \simeq 100 \times 10^{-12} \text{ m}$ C)

4)



TB

avec $\vec{B}$ stationnaire et uniforme

et $\vec{B} = -B\,\vec{u}_B$

Comme $\vec{B}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, il existe une force de Lorentz :

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} = -evB\,\vec{u}_n$$

Or, la seule force subie par l'électron est la force de Lorentz donc par application du PFD, on a :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

(A) Non car $\vec{B}$ modifie la trajectoire de la particule

avec $\vec{OM} = R\,\vec{u}_n$.

$\vec{v} = R\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ avec $R\dot{\theta} = $ cst.

(B) Non, la trajectoire est circulaire uniforme.

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u}_n + \underbrace{R\ddot{\theta}}_{=0}\,\vec{u}_\theta$$

On projette sur les axes :

$\underline{\vec{u}_n}$: $-m_eR\dot{\theta}^2 = -evB$

$$\Leftrightarrow R\dot{\theta}^2 = \frac{evB}{m_e}$$

Or, $v = R\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R}$

D'où $R\frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{evB}{m_e} \Leftrightarrow R = \frac{vm_e}{eB}$.

$\underline{\vec{u}_\theta}$: $R\ddot{\theta} = 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow v = R\dot{\theta} = \text{cte} = \frac{eRB}{m_e}$$

en fait un "savoir"

Ainsi, ⚠ $x = \int v_x(t)dt$ $v_x \neq v$

* ~~$x = \int v(t)\,dt = \frac{eRB}{m_e}t + \underbrace{x(0)}_{=0}$~~ donc $\boxed{\text{la trajectoire est circulaire}}$

uniforme car la puissance de la force de Lorentz est nulle

* $R = \frac{vm_e}{eB} = \frac{\sqrt{\frac{2eV_a}{m_e}} \times m_e}{eB} = \frac{\sqrt{2V_a m_e}}{\sqrt{e}\,B}$ B D)

5) Lorsque l'électron quitte le champ, il n'est plus à la force de Lorentz. Donc, comme le poids est négligé, sa trajectoire sera rectiligne si il quitte le champ. D) oui mais la vitesse (A) reste constante donc on a aussi $\|\vec{v}_S\| = 6.10^6\,m.s^{-1}$

6) On donne : $\theta_m = \sqrt{\frac{e}{2m_eV_a}}\,BL^\alpha$

On effectue une analyse dimensionnelle :

$$\frac{C^{1/2}}{kg^{1/2} \cdot V^{1/2}} \times T \times m^{\alpha} = 0$$ car θ_m est sans dimension

Or, $T = kg \cdot s^{-1} \cdot C^{-1}$ d'après $F = evB$

D'où $C^{-1/2} \times kg^{1/2} \times V^{-1/2} \times s^{-1} \times m^{\alpha} = 0$

$$\Leftrightarrow C^{-1} \times kg \times V^{-1} \times s^{-2} \times m^{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{kg}{C \times V \times s^2} \times m^{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{kg}{C \times C^{-1} \times N \times m \times s^2} \times m^{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{kg}{kg \cdot m \times s^{-2} \times m \times s^2} \times m^{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^{2\alpha}}{m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\alpha = 1}$$

C) $\underline{B}$

c'était peut être plus simple de poser

$$L^{*} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2 m Va}{e}} = \quad \text{avec} \quad F = evB$$

$$= \left[\frac{ev}{F} \times \sqrt{\frac{2m\,Va}{e} \times \frac{m}{m} \times \frac{e}{e}}\right] = \left[\frac{\cancel{e}v}{F} \times v \times \frac{m}{\cancel{e}}\right]$$

v

$$= \frac{m^2 s^{-2}}{\cancel{kg} \cdot m s^{-2}} \times \cancel{kg} = m.$$

$\hookrightarrow \alpha = 1$