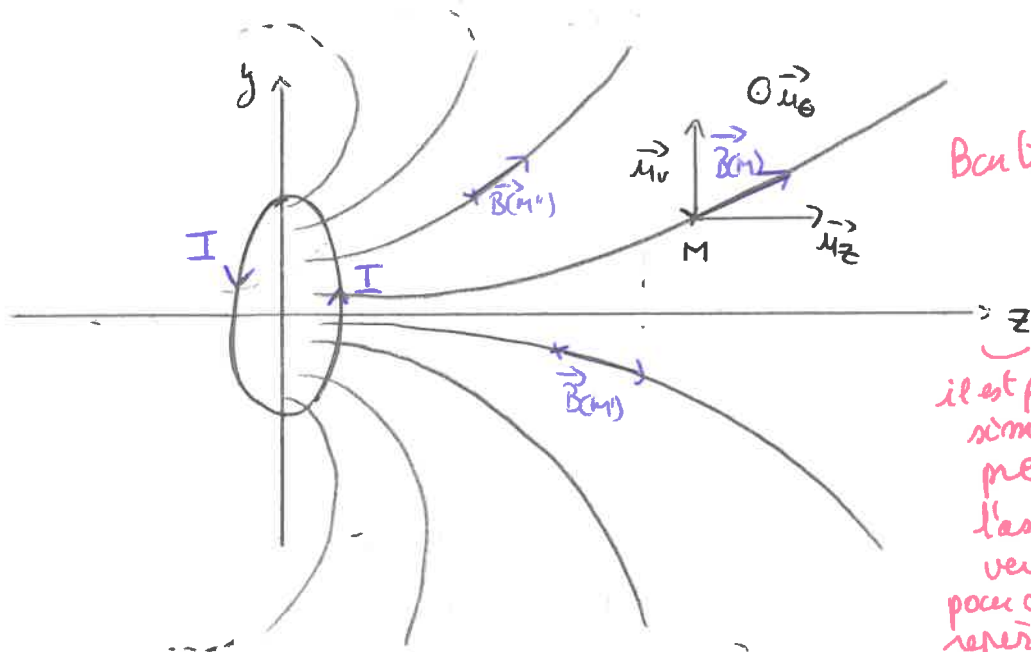


Exercice I TD n°22

GRUPE 4

Eloam
Léa
Yanis

1.



Bon travail.

il est plus simple de prendre l'axe z vertical pour avoir un repère usuel cylindrique.

* On remarque que $\pi_1 = (M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ est un plan d'antisymétrie des courants. Ainsi $\forall M \in \pi_1 ; \vec{B}(M) \in \pi_1$.

* De plus on voit facilement que le courant est invariant par rotation d'angle θ . Ainsi $\vec{B}(M)$ est indépendant de θ .

De fait, $\forall M \in \pi_1 ; \vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_{axe}(r, z) \vec{u}_z$ B

2. Soit $M \in (O, \vec{u}_z)$:

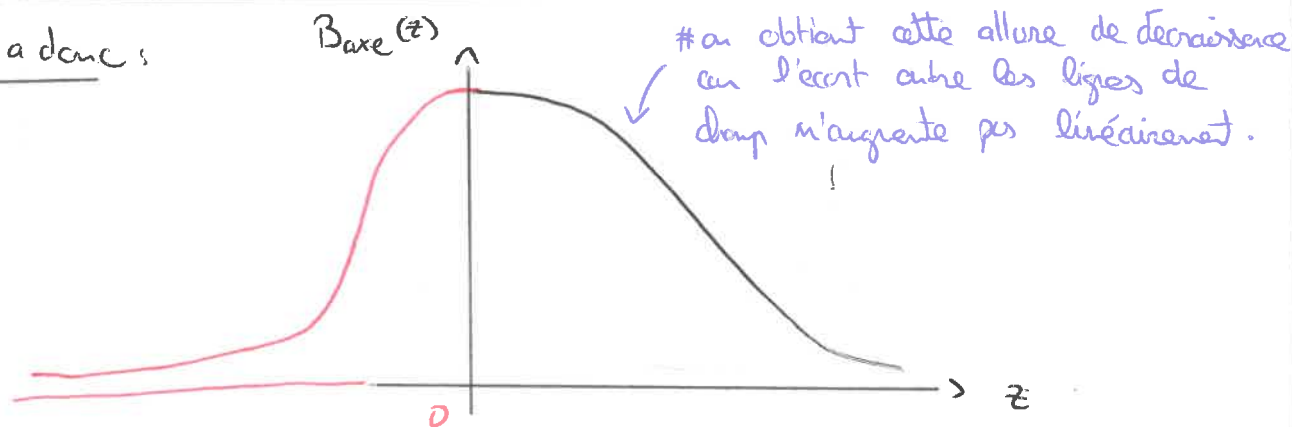
* On observe que tous les plans passant par M et donc par l'axe de la spire sont des plans d'antisymétrie des courants.

Ainsi, $M \in (O, \vec{u}_z) \Rightarrow \vec{B}(M) = B_{axe}(O, z) \vec{u}_z$
axe de la spire

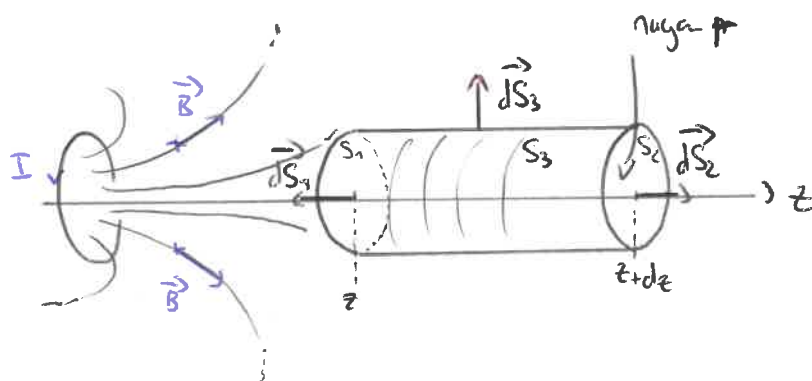
* De plus, la relation de Maxwell-Thomson (Flux), $\text{div } \vec{B} = 0$. Il en découle que $\vec{B}$ se concentre dans un tube de champ.

Ainsi, comme les lignes de champ "s'écartent" de part et d'autre de l'axe de la spire, on en déduit que la composante axiale de $\vec{B}$ diminue avec z qui croît : TB

On a donc :



3. On considère le schéma suivant :



Le cylindre (composé de ses 2 ^{bases} surfaces latérales ainsi que de sa surface latérale) constitue une surface fermée.

On $\text{div}(\vec{B}) = 0$ (équation de Maxwell-Thomson), donc en appliquant le théorème d'Ostrogradski à $\vec{B}$, on obtient que $\vec{B}$ est un vecteur à flux conservatif.

Donc $\boxed{\oint_{\text{Surface fermée}} (\vec{B}) = 0}$. Donc $\oint_{\text{Cylindre}} (\vec{B}) = 0$.

On, $\oint_{\text{Cylindre}} (\vec{B}) = \oint_{S_1} (\vec{B}) + \oint_{S_2} (\vec{B}) + \oint_{S_3} (\vec{B})$

$\oint_{\text{Cylindre}} \vec{B} \cdot \vec{S} = 0 = -\pi r^2 B_z(0,z) + \pi r^2 B_z(0,z+dz) + \iint_{S_3} (\underbrace{B_r dr + B_\theta dz}_{\text{produit scalaire nul}}) d\vec{S}_3$

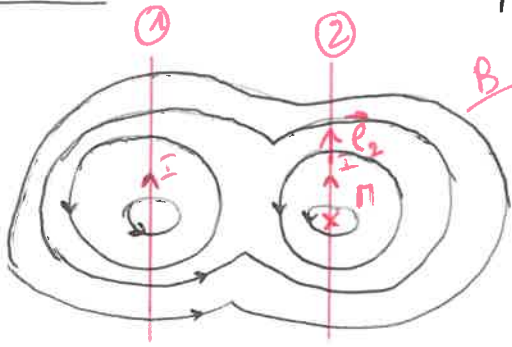
vrai car $\vec{B}$ est tangente à $S_{1,2}$
car $B_r = 0$ au voisinage de l'axe

Donc $\frac{\partial B_z}{\partial z}(0,z) \cdot \pi r^2 dz + B_r(r,z) \cdot 2\pi r dz = 0 \rightarrow \frac{\partial B_{\text{axe}}}{\partial z} < 0$

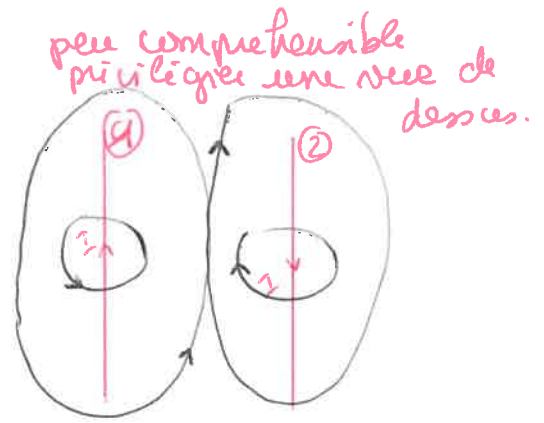
$\Leftrightarrow \boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}}$

Come $\frac{\partial B_z}{\partial z} \downarrow$ $B_{\text{axe}} \downarrow$; on a bien

$B_r(r,z) > 0$ ce qui est cohérent avec le sens des lignes de champ.



cas 1:



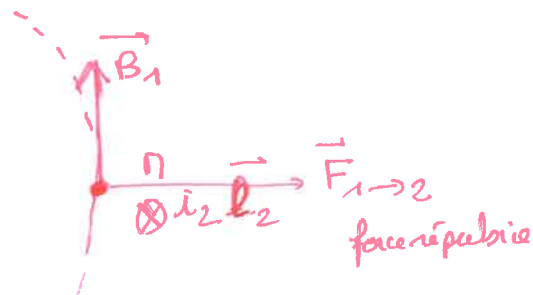
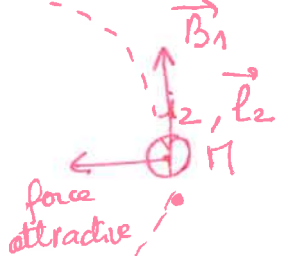
cas 2:

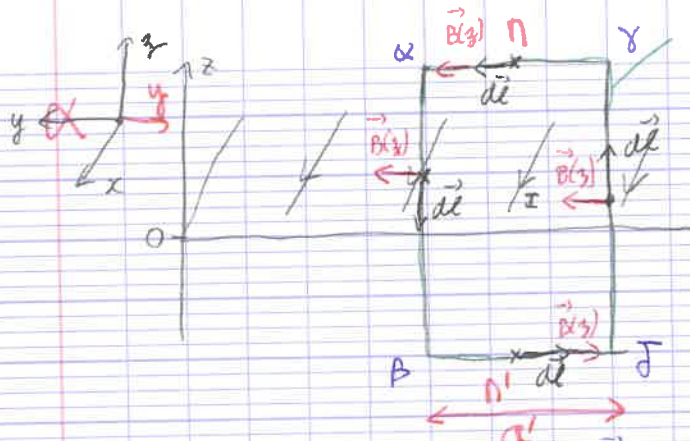
Les courants sont attractifs dans le cas 1 car les lignes de champ se "rejoignent". Au contraire, dans le cas 2, on voit que les lignes de champ se repoussent.

attention, il faut être plus quantitatif.

On cherche à modéliser l'interaction entre les 2 fils.

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = i_2 \vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1(H)$$





Amperie : rectangle symétrique par rapport aux courants.

(a' n'est pas forcément égal à a)

- Calculons la circulation de $\vec{B}$ et appliquons le théorème d'Amperie :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_r(\vec{B}) &= \oint_r \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{O car } \vec{B} \perp d\vec{\ell}} + \underbrace{\int_{\alpha+\pi}^{\alpha+\pi+\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{O car } \vec{B} \perp d\vec{\ell}} \\ &\quad + \int_{\alpha+\pi+\gamma}^{\alpha+\pi+\gamma+\delta} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\alpha+\pi+\gamma+\delta}^{\alpha+\pi+\gamma+\delta+\epsilon} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= 2 \int_{\gamma}^{\alpha} B \cdot d\ell = 2 B(\gamma) a' \end{aligned}$$

or d'après le théorème d'Amperie : $\mathcal{C}_r(\vec{B}) = \mu_0 I_{\text{enc}} =$

et car $I_{\text{enc}} = \cancel{N} I$ $\text{tel } a' b = \frac{I}{Nb^2} a' b = \frac{I}{Nb} a' = \frac{I a'}{a}$

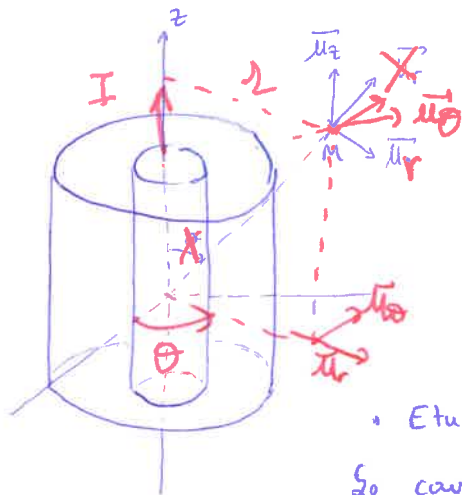
Ainsi

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \frac{\mu_0 \cancel{N} I}{2 \cancel{Nb}} a' \vec{u}_y & x \geq 0 \\ -\frac{\mu_0 \cancel{N} I}{2 \cancel{Nb}} a' \vec{u}_y & x < 0 \end{cases}$$

c) $||\vec{B}(z)|| = \frac{4\pi \times 10^{-2} \times \cancel{6.5} \times 10^{-3}}{2 \times 3,25 \times 10^{-2}} = \frac{1,9 \cdot 10^{-8} \text{ T}}{1,2 \mu\text{T}} \approx 0,02 \mu\text{T}$

Exercice IV, TD 22

Q1



Groupe 6

⚠ Vous êtes en cylindriques pas en sphériques.

• Étude des symétries des courants: **sphériques**.
Le plan $\Pi(n, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie par la distribution des courants. On, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan

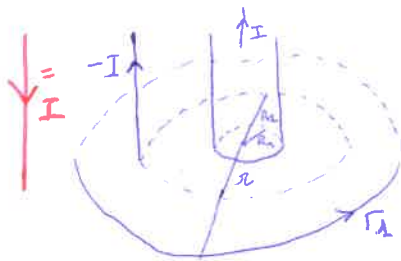
$$\text{donc } \vec{B}(n) = B(n) \vec{u}_\theta$$

$r = \text{distance M avec } z$
 $\neq \text{distance OM}$
 $\rightarrow \text{sphérique}$

• Étude des invariances:

Le courant est invariant par rotation d'angle θ et par translation selon l'axe z . Donc $B(n, \theta, z)$ est indépendant de θ et z .

$$B(n, \theta, z) \vec{u}_\theta = B(n) \vec{u}_\theta \quad \underline{B}$$



• On applique le théorème d'Ampère sur le contour Γ_1 :

$$\oint \vec{B}(n) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 I_{\text{enc}} \vec{u}_\theta \cdot d\vec{l}$$

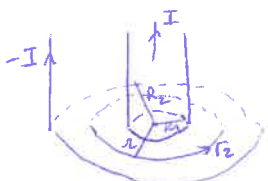
Γ_1 fermé orienté

$$B(n) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow B(n) = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi r}$$

On ici, $I_{\text{enc}} = I - I = 0$ donc $B(n) = 0$ pour $r > R_2$

• En appliquant le théorème d'Ampère sur le contour Γ_2 :

$$B(n) = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi r} \quad \text{or ici, } I_{\text{enc}} = I$$



$$\Rightarrow B_2(n) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{pour } R_2 > r > R_1$$



• En appliquant le théorème d'Ampère sur le contour Γ_3 :

$$B(n) = \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi r} \quad \text{or ici, } I_{\text{enc}} = j_{\text{el}} \cdot \pi r^2$$

$$\Rightarrow B(n) = \frac{\mu_0 j_{\text{el}} \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_{\text{el}} r}{2}$$

or I est le même dans le contour Γ_2 et Γ_3 donc j_{el} aussi

$$\text{donc } j_{\text{el}} = \frac{I}{\pi R_1^2}$$

Finalement: $B_3(n) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \quad \text{pour } R_1 > r \quad \underline{B}$

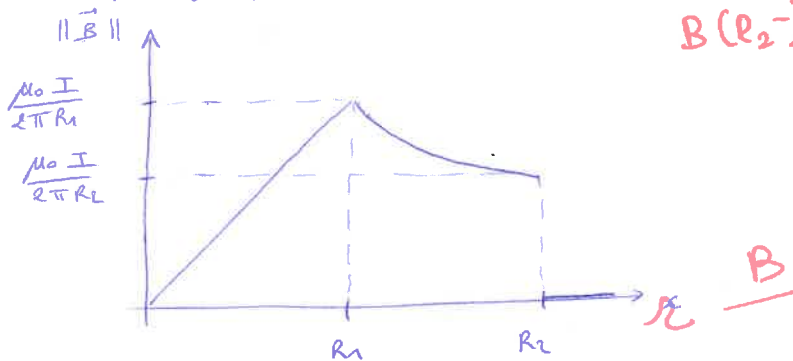
Q2 En $r = R_1$: $B_2(r = R_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} = B_3(r = R_1)$, Donc B est continu en R_1 B

De plus B est continu pour $r \in [0, R_1[\cup]R_1, R_2[$

Donc $\vec{B}$ est continu $\forall r < R_2$

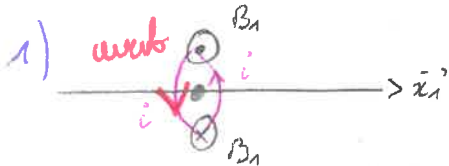
Le champ magnétique est donc continu à la traversée ~~des deux~~ ^{du 1^{er} cylindre uniquement} cylindres.

$$B(R_2^-) \neq B(R_2^+)$$



Q3 Le champ est le plus intense en $r = R_1$ ✓

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1}{2\pi \cdot 10^{-3} \cdot 1,3} \approx \underline{\underline{2 \cdot 10^{-4} \text{ T}}} \quad \text{1,5}$$

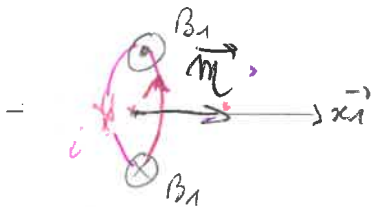


$\vec{B}$ est selon $\vec{x}_1$ d'après la règle de la main droite

$\vec{m} = i\vec{S}$ or $\vec{S}$ est orientée perpendiculairement

aux courants donc $\vec{S} = -S\vec{x}_1$ { le rotor est représenté par $\vec{m}$
 dans un champ $\vec{B}$ ext $\vec{m}$ subit le couple
 $\vec{C} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ à l'équilibre $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires
 et de même sens.

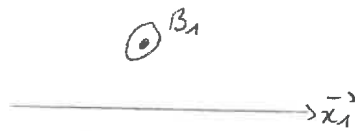
Ainsi, $\vec{m} = iS\vec{x}_1$



Cas où seule bobine 1
 alimentée donc

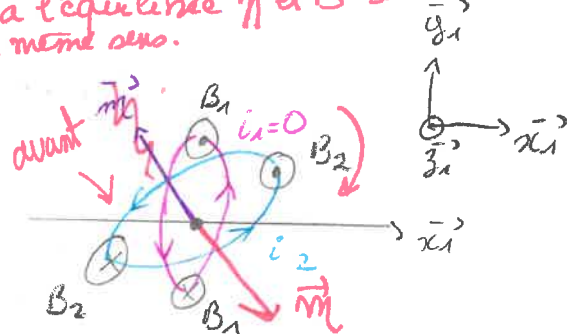
$\vec{m} = m\vec{x}_1$

Nota (≠ moment
 magnétique de Bob1)



Bobine 1 pas
 alimentée donc
 pas de moment
 magnétique

il existe toujours... c'est
 le rotor.



On alimente maintenant la
 bobine 2 donc $i_1 = 0$ (courant
 bobine 1). Et $\vec{m}$ étant colinéaire
 à $\vec{S}$ ($\perp$ aux courants), il a
 une composante sur $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$.

le rotor a tourné de 30° au.

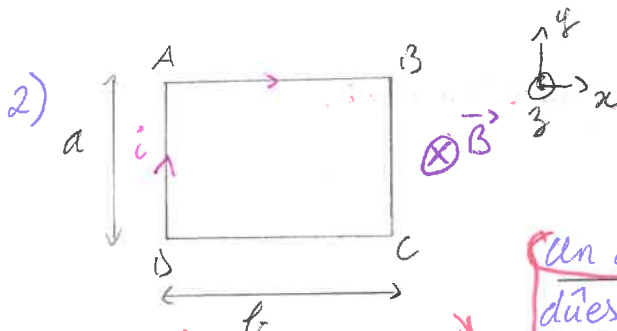
On a donc $\vec{B} = -B\vec{u}_z$

et $\vec{S} = -S\vec{u}_z$

D'où $\vec{m} = -iS\vec{u}_z = -iab\vec{u}_z$

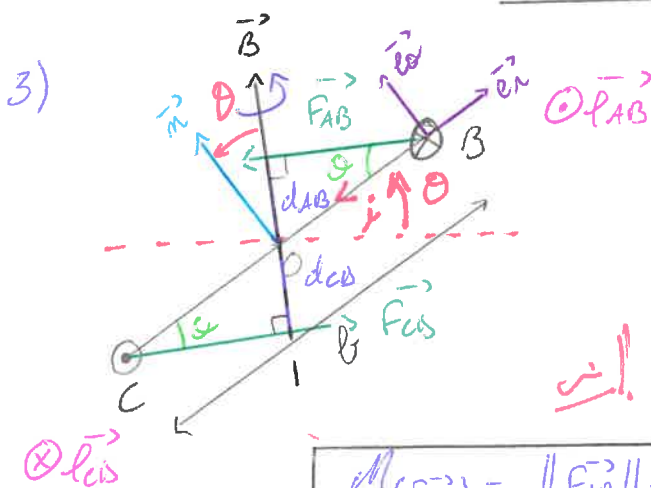
Un aimant crée des lignes de champ qui sont
 dues au moment magnétique $\vec{m}$ de l'aimant.

Les lignes de champ créées par 1 aimant sont
 analogues à celles créées
 par 1 spire parcourue
 par 1 courant.



(respectu schéma donné)

Ordre de grandeur d'un moment magnétique d'un aimant est
 d'environ 10 A.m^2



$\vec{F}_{AB} = i\vec{AB} \wedge \vec{B} = i\vec{b}\vec{e}_z \wedge (B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta)$
 $= -i\vec{b}B_r\vec{e}_\theta + i\vec{b}B_\theta\vec{e}_r$

$\vec{F}_{CB} = i\vec{CB} \wedge \vec{B} = -i\vec{b}\vec{e}_z \wedge (B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta)$
 $= i\vec{b}B_r\vec{e}_\theta - i\vec{b}B_\theta\vec{e}_r$

On remarque que $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = \vec{0}$

Donc $(\vec{F}_{AB}, \vec{F}_{CB})$ est un couple de force.

$M_{(\vec{F}_{AB})} = \|\vec{F}_{AB}\| \times d_{AB} = \sqrt{(i\vec{b}B_r)^2 + (i\vec{b}B_\theta)^2} \times \frac{a}{2} \sin\theta = \frac{i\vec{b}a\|\vec{B}\|}{2} \sin\theta$

$M_{(\vec{F}_{CB})} = \|\vec{F}_{CB}\| \times d_{CB} = \sqrt{(i\vec{b}B_r)^2 + (i\vec{b}B_\theta)^2} \times \frac{a}{2} \sin\theta = \frac{i\vec{b}a\|\vec{B}\|}{2} \sin\theta$

$\sqrt{(i\vec{b}B_r)^2 + (i\vec{b}B_\theta)^2} = i\vec{b}\sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = i\vec{b}\|\vec{B}\|$

$C = \mathcal{M}_{AB}(\vec{F}_{AB}) + \mathcal{M}_{CB}(\vec{F}_{CB}) = i\vec{b}a\|\vec{B}\|\sin\theta \rightarrow$

sur DA
$$d\vec{F}_L = i d\vec{r} \wedge \vec{B} = i d\vec{r} \wedge (B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta)$$

$$= i B_\theta d\vec{r} \wedge \vec{e}_\theta$$

$$\mathcal{M}_{1,D}(\vec{F}_{DA}) = 0.$$

idem sur BC

En cours:
$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} \wedge \vec{B} = i \vec{S} \wedge \vec{B} \\ &= i ab \vec{n} \wedge \vec{B} \\ &= i ab \|\vec{B}\| \widehat{\sin(\vec{n}, \vec{B})} \vec{u}_z \\ &= i ab \|\vec{B}\| \sin\theta \vec{u}_z \\ &= C \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\uparrow$$

trouvé précédemment.