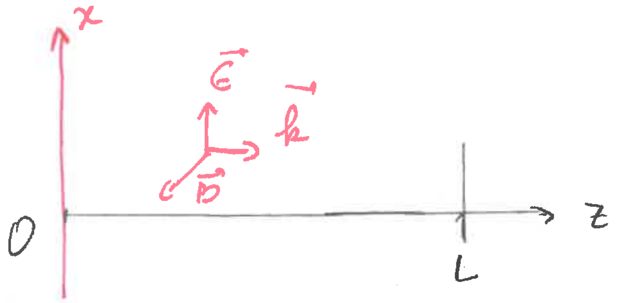
TD n°30, Ex 1



faites un schéma !

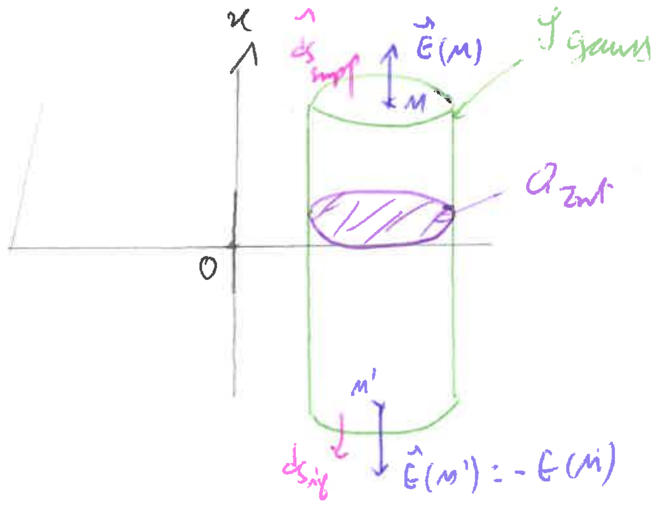
1) $\vec E(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\, \vec u_x$, $= \vec E(z,t)$

2) Dans un métal $\vec j = \vec 0$

alors d'après la loi d'Ohm : $\vec E = \cancel{\gamma}\, \vec j / \gamma$
$= \vec 0$

donc le champ électrique dans le métal de la câble s'annule.

3)



on prend un nouveau repère où le métal se trouve à l'origine

HS

si $\vec E = \vec 0$ en $x = L$

$\Rightarrow$ existence d'un noeud de vibration

$\Rightarrow$ existence d'une onde réfléchie.

Théorème de Gauss

$$\phi(\vec E) = \cancelto{0}{\iint_{S_{lat}} \vec E \cdot \vec{dS}} + 2ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma . S}{\varepsilon_0}$$

donc $2SE = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

alors $\vec E(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, \vec u_x$

et $\begin{cases} \text{si } z > 0, \ \vec E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, \vec u_x \\ \text{si } z < 0, \ \vec E = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\, \vec u_x \end{cases}$

Donc $\vec{E}(z=0^+) - \vec{E}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u_x}$

or, $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ donc il existe forcément une onde réfléchie

$\vec{E_r}(z,t) = \underline{E_{0r}}\, e^{j(\omega t + kz)} \vec{u_x}$

$\underline{E}(z=0,t) = 0$

$= \underline{\vec{E_i}}(z=0,t) + \underline{\vec{E_r}}(z=0,t)$

$= E_0 \cancel{e^{j\omega t}} \vec{u_x} + \underline{E_{0r}} \cancel{e^{j\omega t}} \vec{u_x}$

$\Rightarrow \underline{E_{0r}} = -E_0$

donc $\underline{\vec{E_r}}(M,t) = -E_0\, e^{j(\omega t + kz)} \vec{u_x}$ B

4) $c = \frac{2L}{\Delta t}$

$L = \frac{c \times \Delta t}{2}$ oh ! c = célérité d'1 onde EM = vitesse de la lumière

AN : $L = \frac{340 \times 2{,}60 \times 10^{-3}}{2} \times 3 \cdot 10^8$

$= \cancel{0{,}44 \text{ m}}$ 390 km

Grp 4

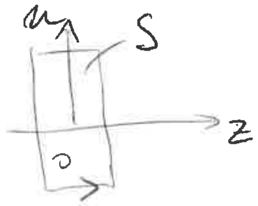
exercice II

TD 30

→ revoir la notion de tension efficace $= \sqrt{\langle u^2 \rangle} = \frac{U_{MAX}}{\sqrt{2}}$ ou grandeur efficace si $u(t) = U_{MAX}\cos(\omega t)$

① comme $\vec{E}$ est une OPPH, $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u_x}$ dans le sens z décroissant, polarisée selon $\vec{u_x}$

② • $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f}$ avec $\begin{cases} c = 3.10^8 \ m.s^{-1} \\ f = 3.10^9 \ Hz \end{cases}$ // célérité



donc $\lambda = \frac{3.10^8}{3.10^9} = 0{,}1 \ m$

• comme $h = 0{,}005 \ m \ll \lambda = 0{,}1 \ m$

alors on peut supposer que $\vec{E}$ uniforme sur S

et donc que $\vec{B}$ aussi

③ • (MF) : $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

en complexe, comme $\vec{E}$ est une OPPH, $\vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$

donc $\frac{-j\underline{k}\,\vec{u_z} \wedge \underline{\vec{E}}}{-j\omega} = \underline{\vec{B}}$

donc $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = -\frac{k}{\omega}\vec{u_z} \wedge E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u_x}$

ici $\vec{k} = -k\vec{u_z}$ car l'onde se propage dans le sens z ↘

$\vec{B} = -\frac{kE_0}{\omega}\cos(\omega t + kz)\vec{u_y}$

• comme $\vec{B}$ est uniforme sur S alors $\Phi(\vec{B}) = \vec{B}.\vec{S} = \frac{kSE_0}{\omega}\cos(\omega t + \cancel{kz})$

on est en $z = 0$

et $\vec{S} = -S\vec{u_y}$

donc pour N spires, $\boxed{\Phi(\vec{B}) = \frac{NkSE_0}{\omega}\cos(\omega t + \cancel{kz})}$

④ d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -kSE_0\sin(\omega t + \cancel{kz}) \qquad \downarrow k = \frac{\omega}{c}$$

$$e(t) = -\frac{N\omega h \ell E_0}{c}\sin(\omega t + \cancel{kz}) \qquad \text{et } S = h \times \ell$$

$$e(t) = e_{ff}\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \pi)$$

donc $\boxed{e_{ff} = +\frac{N\cancel{\sqrt{2}}\,\omega h \ell E_0}{\sqrt{2}\,c}\,\cancel{\sin(\omega t + kz)}}$

⚠ une grandeur efficace ne dépend pas du temps.

⑤ $$V_{seff} = +\frac{N\cancel{\sqrt{2}}\,\omega h \ell E_0}{\sqrt{2}\,c}\,\cancel{\sin(\omega t + kz)}$$

donc $$E_0 = \frac{c\,V_{seff}\sqrt{2}}{N\cancel{\sqrt{2}}\,\omega h \ell}\;\frac{1}{\cancel{\sin(\omega t + kz)}}$$

donc E_0 est minimal ~~pour $\sin(\omega t + kz)$~~ $= 1$

d'où $$E_{0\,min\;eff} = \frac{c\,V_{seff}}{N\cancel{\sqrt{2}}\,\omega h \ell} = \frac{3 \times 10^8 \times 901 \times 10^{-3}}{1000 \times 0,1 \times 5 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 3.10^9} = 0,32.10^{-6}\,V.m^{-1}$$

⑥ $$\|\langle \vec{\Pi}_{min} \rangle\| = \left\|\left\langle \frac{\vec{E}_{min} \wedge \vec{B}_{min}}{\mu_0}\right\rangle\right\| = \frac{c\,V_{seff}}{\mu_0 N\sqrt{2}\,\omega h \ell} \times \frac{V_{seff}}{N\sqrt{2}\,\omega h \ell}$$

$$= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{E_{eff}^2}{\mu_0 c}$$

or $$B_{min} = \frac{kE_{0min}}{\omega} = \frac{k}{\omega}\,\frac{c\,V_{seff}}{\mu_0 N\cancel{\sqrt{2}}\,\omega h \ell} = \frac{V_{seff}}{N\cancel{\sqrt{2}}\,\omega h \ell}$$

donc $$\|\langle \vec{\Pi}_{min} \rangle\| = \frac{3.10^8 . (901.10^{-3})^2}{4.\pi.10^{-7}.(1000^2).2.(2.\pi.10^9.3)^2.(5.10^{-3})^2(10.10^{-1})^2}$$

$$= \underline{\underline{1,34.10^{-16}}}\ W.m^{-2}$$ (cela paraît vraiment peu)

↳ on trouve $\Pi_{min} = 2,7.10^{-16}\ W.m^{-2}$

exercice 3 TD-30 Groupe 5

$\rho = 0$, $\vec{j}_{el} = \vec{0}$

1) Dans le vide, les 4 équations de Maxwell sont ;

- Maxwell-Gauss ; $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
- Maxwell-Faraday ; $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- Maxwell-Thomson ; $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
- Maxwell-Ampère ; $\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Bon travail
Faire un schéma aide à comprendre les relations de passage.

2) $\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

Or, les composantes selon y et z sont nulles car $\vec{E}(M,t) = E(x,y)\cos(\omega t - kz)\,\vec{u_x}$

D'où $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x,y)\cos(\omega t - kz)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} E(x,y) = 0$

Ainsi, $E(x,y)$ ne dépend que de y.
En outre, l'onde n'est pas plane car l'amplitude dépend de y.

B

3) Equation de propagation du champ électrique dans le vide ;

$\vec{rot}(\vec{rot}(\vec{E})) = \vec{grad}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E}$

D'après Maxwell-Faraday et Maxwell-Gauss on a ;

$\vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{grad}(0) - \Delta \vec{E}$

On utilise le critère de Schwartz ;

$-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}(\vec{B})) = -\Delta \vec{E} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}(\vec{B})) = \Delta \vec{E}$

On applique Maxwell-Ampère ;

$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\mu_0 \varepsilon_0 = \Delta \vec{E}$ or $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$

Donc $\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E}}$

4) On remplace par $\vec{E}(y,t) = E(y)\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$

avec $\Delta\vec{E} = \vec{u}_x\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right) = \left(0 + \frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2}\cos(\omega t - kz) - E(y)k^2\cos(\omega t - kz)\right)\vec{u}_x$

$$= \left(\frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} - E(y)k^2\right)\vec{u}_x$$

et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-E(y)\omega\sin(\omega t - kz)\vec{u}_x\right) = -E(y)\omega^2\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$

Donc, $E(y)\omega^2\cos(\omega t - kz)\vec{u}_x = c^2\left(\frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} - E(y)k^2\right)\vec{u}_x$

$\Leftrightarrow E(y)\left[-\omega^2 + c^2k^2\right] = c^2\frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} + E(y)\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 E(y)}{\partial y^2} + E(y)\chi^2 = 0}$$

B

On pose $\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

5) On sait que $\vec{E}(y=0^+) - \vec{E}(y=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$ D'après la relation de passage du champ électromagnétique à l'interface d'équation $y=0$

inutile

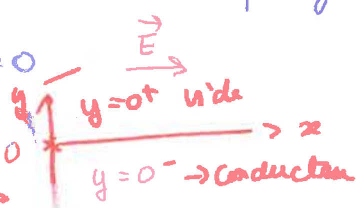
$$\begin{cases} \vec{E}_x(y=0^+) - \vec{E}_x(y=0^-) = 0\vec{u}_x \\ \vec{E}_y(y=0^+) - \vec{E}_y(y=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y \\ \vec{E}_z(y=0^+) - \vec{E}_z(y=0^-) = 0\vec{u}_z \end{cases}$$

<u>rappel</u> : $\vec{E} = E(y)e^{j(\omega t - kz)}\vec{u}_x$

$\vec{E}(y=0^+) = E(y=0^+)e^{j(\omega t - kz)}\vec{u}_x$

$\vec{E}(y=0^-) = \vec{0}$ (conducteur)

$\Rightarrow E(y=0^+)e^{j(\omega t - kz)}\vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$



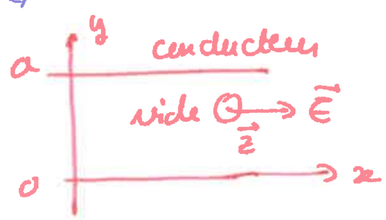
direct

Or, $\vec{E}(y=0^-) = \vec{0}$ car on a un métal parfait, donc $\vec{E}_x(y=0^+) = \vec{E}_y(y=0^+) = \vec{E}_z(y=0^+) = \vec{0}$

De plus, $\vec{E}(y=0^+) = E(y=0^+)\vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$ donc $\boxed{E(y=0)=0}$

C'est le même travail en $y=a$, sauf que c'est $\vec{E}(y=a^+)=\vec{0}$ car c'est un métal parfait et $\vec{E}(y=a^-) = E(y=a^+)\vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_y$

Donc $\boxed{E(y=a)=0}$



Or, $\vec{B}(y=0^+) = \vec{0}$ car le métal est parfait.

et $\vec{B}(y=0^-) = -\frac{E_0}{c}\sin\left(\frac{n\pi}{a}0\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y} + \frac{E_0}{\omega}\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi}{a}0\right)\sin(\omega t-kz)\vec{u_z}$

$= \frac{E_0}{\omega}\frac{n\pi}{a}\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}$

En outre, $\vec{j_S}$ étant tangeant, $\vec{j_S} = j_S\vec{u_z}$

Or, $\mu_0\vec{j_S}\wedge\vec{u_y} = -\mu_0 j_S\vec{u_x}$

Ainsi $\vec{B}(y=0^-) = 0$

On effectue le même travail en $y=a$ où $\vec{B}(y=a^-) = \vec{0}$ car le métal est parfait.

Et $\vec{B}(y=a^+) = B(y=a^+)\vec{u_z}$

Mais $\vec{j_S} = j_S\vec{u_z}$

Ainsi $\vec{B}(y=a^+) = \vec{0}$

<u>En conclusion, $\vec{B}(y=0) = \vec{B}(y=a) = 0$ donc $\vec{B}$ vérifie les relations de continuité.</u>

8) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_0\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos(\omega t-kz)\vec{u_x}\wedge\left(-\frac{E_0}{c}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos(\omega t-kz)\vec{u_y} + \frac{E_0}{\omega}\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\sin(\omega t-kz)\vec{u_z}\right)\right]$

$= \frac{1}{\mu_0}\left[-\frac{E_0^2}{c}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{u_z} - \frac{E_0^2}{\omega}\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{u_y}\right]$

$$\boxed{\vec{\Pi} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos^2(\omega t-kz)\vec{u_z} - \frac{E_0^2}{\mu_0\omega}\frac{n\pi}{a}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos(\omega t-kz)\sin(\omega t-kz)\vec{u_y}}$$

$$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = +\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\vec{u_z}}$$ car $\langle\cos^2(\omega t-kz)\rangle = \frac{1}{2}$

et $\langle\cos(\omega t-kz)\rangle = \langle\sin(\omega t-kz)\rangle = 0$

$P = \iint_S\langle\vec{\Pi}\rangle\,d\vec{S} = \iint_S +\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\vec{u_z}\times dx\,dy\,\vec{u_z} =$

$= +\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\int_0^b dx\int_0^a\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy = +\frac{E_0^2 b}{2\mu_0 c}\int_0^a\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)dy$

Or, $\int_0^a\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)dy = \int_0^a\frac{1}{2}dy + \int_0^a\frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy$

$= \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{a\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{n\pi}\right]_0^a$

$= \frac{a}{2}$

$$\boxed{\text{Ainsi, } P = +\frac{E_0^2 b}{2\mu_0 c}\times\frac{a}{2} = +\frac{E_0^2 b\cdot a}{4\mu_0 c}}$$

Suite 5) Si $\chi^2 < 0$: la solution pour E est : $\boxed{\frac{d^2E(y)}{dy} + \chi^2 E(y) = 0}$

$E(y) = \lambda e^{\chi y} + \mu e^{-\chi y}$, λ et μ sont des réels

Or $E(0) = E(a) = 0 \Rightarrow E(y) = 0$, impossible

B

Si $\chi^2 > 0$, $E(y) = \lambda \cos(\chi y) + \mu \sin(\chi y)$

6) $\frac{\partial^2 E(y)}{\partial^2 y} + E(y)\chi^2 = 0$

Les solutions sont de la forme ; $E(y) = A\cos(\chi y) + B\sin(\chi y)$

En $y=0$; $E(y=0) = 0 = A$

En $y=a$; $E(y=a) = A\cos(\chi a) + B\sin(\chi a) \Leftrightarrow B\sin(\chi a) = 0$

$\Leftrightarrow \chi a = 0 [\pi] = m\pi \Leftrightarrow \chi = \frac{m\pi}{a}$ avec $m \in \mathbb{N}$

Ainsi, $E(y) = B\sin(\chi y)$ où $B = E_0$ et $\chi = \frac{m\pi}{a}$

On a alors $\boxed{E(y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} y\right)}$ B

7) L'onde n'est pas plane donc on applique l'équation de Maxwell-Faraday :

B

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Or, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E(y)\cos(\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(E(y)\cos(\omega t - kz)\right) \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(E(y)\cos(\omega t - kz)\right) \end{pmatrix}$ B

Donc $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(E(y)\cos(\omega t - kz)\right)\vec{u_y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(E(y)\cos(\omega t - kz)\right)\vec{u_z}$

$= +E(y)\,k\sin(\omega t - kz)\vec{u_y} - E_0 \frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_z}$ car $E(y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)$

B

$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) k \sin(\omega t - kz)\vec{u_y} + E_0 \frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_z}$

$\Leftrightarrow \vec{B}(y,t) = -E_0 k \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\left(-\frac{\cos(\omega t - kz)}{\omega}\right)\vec{u_y} + E_0 \frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\frac{\sin(\omega t - kz)}{\omega}\vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{B}(y,t) = +\frac{E_0}{c}\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y} + \frac{E_0}{\omega}\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}}$$

$\vec{B}(y,t)$ doit vérifier la relation de passage : $\vec{B}(y=0^+) - \vec{B}(y=0^-) = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{u_y}$

Les composantes normale de $\vec{B}$ sont sur $\vec{u_y}$.

↳ elles doivent être continues donc égale à $\vec{0}$ en $y=0$ et en $y=a$ → c'est bien le cas.

y

$\vec{B}(y=0^+) = \frac{E_0 m\pi}{\omega a}\sin(\omega t - kz)\vec{u_z}$

0

$\vec{B}(y=0^-) = \vec{0}$ → conclu dessus

3/6

Suite Ex III :

7) ~~Relation de structure des OPPH em, valable en complexe car linéaire :~~
~~$\vec{B} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ où $\vec{k}$ est la direction de propagation et $\vec{k} = k\vec{u_z}$ car l'onde se propage dans le sens des z croissants.~~

~~$\vec{B} = \dfrac{1}{\omega}\left(k\vec{u_z} \wedge E_0 \sin(\chi y) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u_x}\right) = \dfrac{k}{\omega} E_0 \sin(\chi y) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u_y}$~~

~~$= \dfrac{E_0}{c} \sin(\chi y) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u_y}$ car $k = \dfrac{\omega}{c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c} = \dfrac{k}{\omega}$~~

~~$\boxed{\text{En réel : } \vec{B}(y,t) = \dfrac{E_0}{c} \sin(\chi y) \cos(\omega t - kz) \vec{u_y}}$~~

~~Il doit vérifier la relation de passage :~~

valeur moyenne de cette composante $= 0$.

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_x B_z \\ E_x B_y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_0^2 \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \frac{n\pi}{a\omega} \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \\ \frac{k}{\omega} E_0^2 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \end{pmatrix}$$

et $\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{E_0^2}{\mu_0} \dfrac{k}{\omega} \sin^2\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right) \times \dfrac{1}{2} \vec{u_z}$

8) ~~$\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{1}{\mu_0}\left(E_0 \sin(\chi y) \cos(\omega t - kz) \vec{u_x} \wedge \dfrac{E_0}{c} \sin(\chi y) \cos(\omega t - kz) \vec{u_y}\right)$~~

~~$\boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin^2(\chi y) \cos^2(\omega t - kz) \vec{u_z}}$~~

~~$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c} \sin^2(\chi y) \vec{u_z} \text{ car } \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \dfrac{1}{2}}$~~

~~$\boxed{P = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle S = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c} \sin^2(\chi y) \times a.b \quad \text{car } S = a \times b}$~~

$\mathcal{P} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle . \vec{dS} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle . dS \vec{u_z}$

$= \dfrac{E_0^2 k}{2\omega\mu_0} \displaystyle\int_0^a \sin^2\left(\dfrac{n\pi y}{a}\right) dy \int_0^b dx$

$= \dfrac{E_0^2 k}{2\omega\mu_0} \left[\dfrac{1 - \cos\left(\frac{2n\pi y}{a}\right)}{2}\right]_0^a b$

$= \dfrac{E_0^2 k}{4\omega\mu_0} ab$

9) $\chi^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k^2$ si $k^2 < 0 \rightarrow k$ = imaginaire pur $= jk'$ et $k' < 0$ $\Rightarrow \underline{\vec{E}} = E(y) e^{-j(\omega t - jk'x)}$ $= E(y) e^{k'x} e^{-j\omega t}$

$\underbrace{}_{\text{onde évanescente}}$

Or, $\chi^2 = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \Leftrightarrow k^2 = \left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$ /

Or, $k^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \dfrac{\omega^2 - \frac{(n\pi)^2 c^2}{a^2}}{c^2}$ donc $\omega_p^2 = \left(\dfrac{n\pi c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \omega_p = \dfrac{n\pi c}{a}$ /

Donc si $k^2 < 0$, $\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_p$ / $\rightarrow$ l'onde ne se propage pas.

En outre, $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

Si $\omega_p > \omega$ alors la valeur dans la racine est ~~négative~~ négatif, mais $v_\varphi \in \mathbb{R}$ donc ce cas n'est pas possible / oui

Ainsi, seul le cas $\omega > \omega_p$ fonctionne
Donc le guide d'onde est un filtre passe-haut.

$$\omega_p = 2\pi f_c \Leftrightarrow f_c = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{n\pi c}{2\pi a}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_c = \frac{nc}{2a}}$$

10) Prenons $n = 1$:
AN : $f_c = \frac{c}{2a} = \frac{3.10^8}{2 \times 10.10^{-2}} = 1,5.10^9\,Hz = 1,5\,GHz$
c'est le mode fondamental.

11) Si $n = 2$, $2 f_c = 3\,GHz$
Donc les valeurs de n possibles sont $n = 1$ et $n = 2$.

~~12)~~ $\cancel{P = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle S = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \sin^2(\chi y).a.b = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} y\right) \times a.b}$

~~Si, $n = 1$ et $a = b$~~
~~Donc~~ $\cancel{P = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \sin^2\left(\frac{\pi}{a} y\right) a^2}$

12) $P = + \frac{E_0^2 . b . a\, k}{4\mu_0 \cancel{c}\, \omega} \Leftrightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{\frac{4 P \mu_0 c \omega}{a^2 k}} \quad \text{car } b = a}$

$$\text{AN : } \boxed{E_0 = \cancel{\sqrt{\frac{4 \times 1.10^{-3} \times 4\pi.10^{-7} \times 3.10^8}{(10.10^{-2})^2}}} = 12,3\ V.m^{-1}}$$

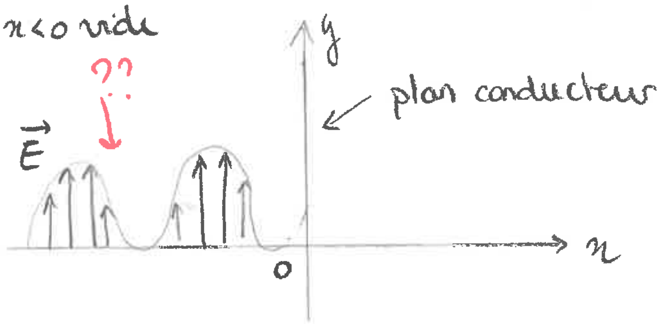
avec $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \rightarrow k = \sqrt{\left(\frac{2\pi \times 3.10^9}{3 \times 10^8}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{0,1}\right)^2}$
$n = 1$ et $f = 3\,GHz$

$$= \pi\sqrt{20^2 - 10^2}$$
$$= 10\pi\sqrt{3}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-3} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3.10^8 \times 2\pi \times 3 \times 10^9}{0,1^2 \times 10\pi\sqrt{3}}}$$

$E_0 = 13,2\ V.m^{-1}$

6/6



1. On pose $\underline{\vec{E_i}}(x,t) = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{u_y}$

= expression complexe du champ électrique incident

relation de passage : $\vec{E_i}(x=0^+) - \vec{E_i}(x=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$

or $\vec{E_i}(x=0^+) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $-\vec{E_i}(x=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$

↳ métal parfait

$\Leftrightarrow$ $-E_0 e^{j\omega t}\vec{u_y} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$.

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\sigma = 0}$ = densité surfacique de charge

- Cherchons le champ électrique total :

$\boxed{\vec{E}(x=0,t) = \vec{0}}$ $\Rightarrow$ il existe une onde réfléchie.

On pose, $\underline{\vec{E_R}} = \underline{E_{R0}}\, e^{j(\omega t + kx)} \vec{u_r}$.

or $\underline{\vec{E}}(x=0,t) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\vec{E_i}}(x=0,t) + \underline{\vec{E_R}}(x=0,t) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $E_0 e^{j\omega t}\vec{u_y} = -\underline{E_{0R}}\, e^{j\omega t}\vec{u_r}$ on choisit $\vec{u_r} = \vec{u_y}$

Ainsi, $\underline{E_{0R}} = -E_0$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{E_R}} = -E_0 e^{j(\omega t + kx)}\vec{u_y}$.

- Déterminons le champ magnétique total :

$\underline{\vec{B_i}}(x,t) = \frac{\vec{k_i} \wedge \underline{\vec{E_i}}(x,t)}{\omega} = \frac{k\vec{u_x} \wedge E_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{u_y}}{\omega} = \frac{1}{c} E_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{u_z}$

$\underline{\vec{B_r}}(x,t) = \frac{\vec{k_r} \wedge \underline{\vec{E_r}}(x,t)}{\omega} = \frac{-k\vec{u_x} \wedge (-E_0) e^{j(\omega t + kx)}\vec{u_y}}{\omega} = \frac{1}{c} E_0 e^{j(\omega t + kx)}\vec{u_z}$

Où l'on a posé $c = \frac{\omega}{k}$ = célérité de l'onde.

Ainsi, $\vec{B}(x,t) = \vec{B_i}(x,t) + \vec{B_R}(x,t)$

$$= \frac{E_0}{c} e^{j\omega t}\left(e^{jkx} + e^{-jkx}\right)\vec{u_z}$$

et donc $\boxed{\vec{B}(x=0,t) = \frac{2E_0 e^{j\omega t}\vec{u_z}}{c}}$ ou encore, $\boxed{\vec{B}(x=0,t) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\vec{u_z}}$

• Déterminons la valeur de la densité surfacique de courant :

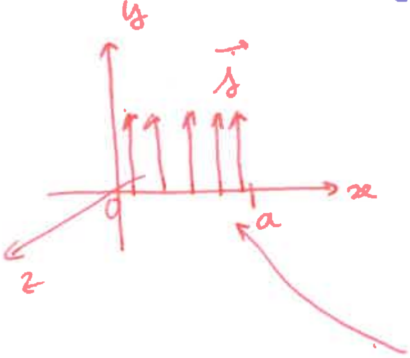
D'après la deuxième relation de passage : $\underbrace{\vec{B}(x=0^+)}_{=\vec{0}} - \vec{B}(x=0^-) = \mu_0 \vec{j_S} \wedge \vec{u_x}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\vec{u_z} = \mu_0 \vec{j_S} \wedge \vec{u_x}$$

$$\Leftrightarrow \quad +\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\left(\vec{u_y} \wedge \vec{u_x}\right) = \mu_0 \vec{j_S} \wedge \vec{u_x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_0 \vec{j_S} = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\vec{u_y}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{j_S} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\vec{u_y}}$$



$\vec{j_S}(x=0,t) = \vec{j_S}(t)$ car $\vec{j_S}$ ne dépend pas de x.
on est en $x = 0$.

d a. Par homogénéité $\boxed{\vec{j} = \frac{\vec{j_S}}{a}}$ ($\vec{j}$: A.m^{-2} ; $\vec{j_S}$: A.m^{-1} ; a : m .)

b. Pour $x > a$, $\vec{j} = \vec{0}$ or d'après la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

c. $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$

~~L'idée de l'énoncé est de déterminer $\vec{B}$ avec MA pour un conducteur~~

d'après la relation de structure pour $0 < x < a$

c-à-d $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ avec $\vec{B} = B(x)\,\vec{u_z}$

$$= \boxed{\frac{1}{\gamma\omega} \cdot \vec{k} \wedge \vec{j}}$$

et $\boxed{di = j \cdot dS}$ On suppose que j est uniforme sur la surface dS et que $\vec{j}$ et $\vec{dS}$ sont colinéaires et de même sens.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x) \end{pmatrix} = -\frac{\partial B(x)}{\partial x}\vec{u_y} = \cancel{\mu_0 \frac{j_S}{a}}\,\vec{u_y}$$

$dS = dx\,dz$

et $di = j\,dx\,dz = -\frac{\partial B(x)}{\partial x} \times \frac{1}{\mu_0} dx\,dz$

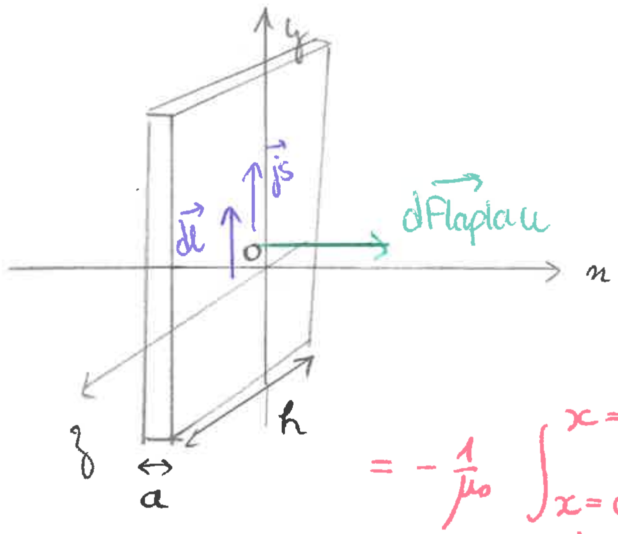
d. $\boxed{\vec{dF}_{Laplace} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}}$ → voir schéma p.3

$$= j S\,\vec{dl} \wedge \vec{B} = j_S \cdot \frac{1}{a} \cdot \underbrace{a \cdot h}_{S}\ \vec{dl} \wedge \vec{B} = j_S h\,dl\,\vec{u_y} \wedge B\vec{u_z}$$

$$= \boxed{j_S h\,dl\,B\,\vec{u_x}}$$

$$= -\frac{\partial B}{\partial x}\frac{1}{\mu_0} dx\,dz\,dy\,\vec{u_y} \wedge B(x)\,\vec{u_z}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} B(x)\frac{\partial B}{\partial x} dx\,dz\,dy\,\vec{u_x} = -\frac{1}{\mu_0} dy\,dz\ \frac{\partial \frac{B^2}{2}}{\partial x} dx$$



$$= -\frac{1}{\mu_0}\int_{x=0}^{x=a} \frac{\partial B^2/2}{\partial x}\,dx = -\frac{1}{2\mu_0}\left[\underbrace{B^2(x=a)}_{=0} - B^2(x=0)\right]$$

pression de radiation : $\boxed{P_{rad} = \frac{\|d\vec{F}_{Lap}\|}{\underset{\hookrightarrow\, dydz}{dS}} = \frac{1}{2}\|\vec{j_s}\wedge\vec{B}\|}$

⚠ la pression est un scalaire.

$= \frac{B^2(x=0)}{2\mu_0}.$

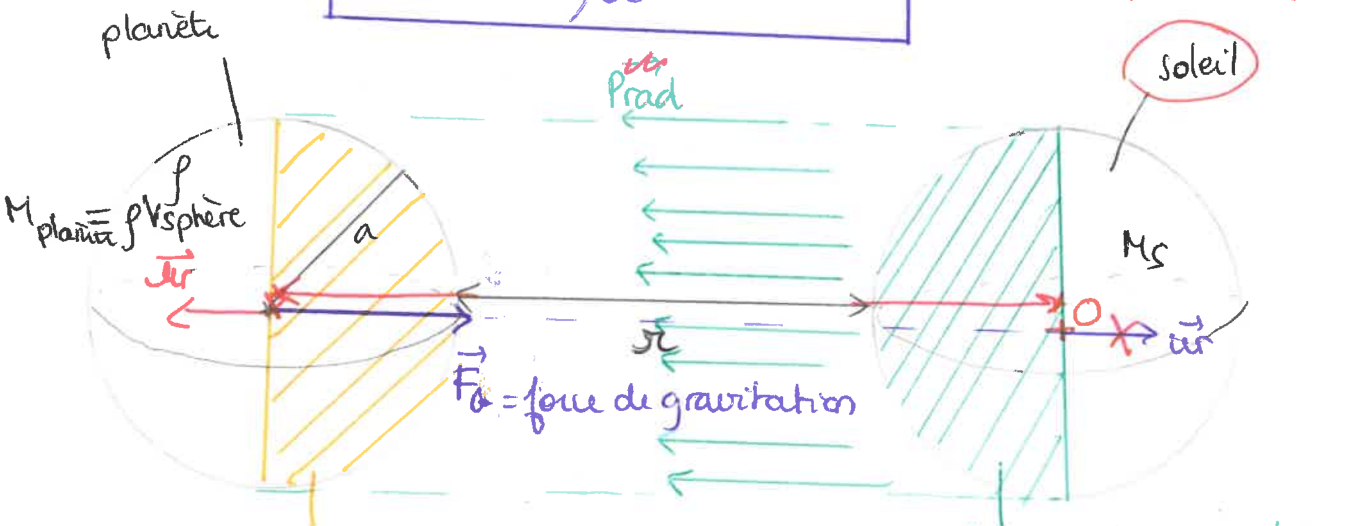
expression : $\cancel{\vec{P}}_{rad} = \frac{\|d\vec{F}_{laplace}\|}{dS} = \frac{1}{2}\,\frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\,\vec{u_y}\wedge\vec{B}(x=0,t)$

$= \left\|\frac{E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\,\vec{u_y}\wedge\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\,\vec{u_z}\right\|$

$$\boxed{\cancel{\vec{P}}_{rad} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\,\cancel{\vec{u_x}}}$$

référence de position

3.



zone touchée par les radiations

zone où l'émission des radiations touchent la planète

- $\vec{F_G} = -\frac{G M_S M_{planète}}{r^2}\vec{u_r} = -\frac{G M_S \rho \frac{4}{3}\pi a^3}{r^2}\vec{u_r}$

pas forcément car on peut supposer que le soleil est très éloigné de la sphère $r >> a$

- La puissance ~~émise par le soleil~~ reçue par la sphère $\boxed{P_0 = \vec{\Pi}\cdot\vec{v} = P_{rad}\, dS\, c}$
- système = {planète ~~+ soleil~~}

↳ on s'intéresse aux actions sur la planète

On applique le principe fondamental de la dynamique au système : avec $a = a_0$ (le rayon limite) 4/4

$$\vec{0} = \vec{F_G} + P_{rad} \cdot \vec{dS}$$ B

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{F_G} + \frac{1}{2} P_{rad} \cdot 4\pi a_0^2 \vec{u_r}$$ B

– seul la moitié de la surface est en contact avec les radiations

puissance émise (soleil)

$$P_{rad} = \frac{P_0}{4\pi r^2 c}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{G M_S \rho \frac{4}{3}\pi a_0^3}{r^2} + \frac{P_0}{\cancel{dSc}_{4\pi r^2}} \cdot 2\pi \cancel{a_0^2} = 0$$

or $dS = \frac{1}{2}\pi \cdot 4 a_0^2$

$$\Leftrightarrow \frac{G M_S \rho \frac{4}{3}\pi a_0^3}{\cancel{r^2}} = \frac{P_0 \, 2\pi a_0^2}{4\cancel{\pi} c}$$

sphère, r, Soleil émet dans toutes les directions de l'espace

Π = valeur moyenne du vecteur de Poynting

$P_{reçue\ par\ la\ sphère} = \Pi(r) \frac{4\pi a_0^2}{2}$

$P_{émise\ par\ le\ soleil} = P_0 = \Pi(r)\, 4\pi r^2$

$P_{reçue/sphère} = \frac{P_0 a_0^2}{2r^2} = P_{rad} 2\pi a_0^2$

$$\Leftrightarrow a_0^{\cancel{3}} = \frac{r^2 P_0}{G M_S \rho \frac{4}{3}\pi c}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = \cancel{\sqrt[3]{\frac{\cancel{r^2} P_0}{G M_S \rho \frac{4}{3}\pi c \times 2}}}}$$

~~en prenant comme ordre de grandeur $r = 10^{11}$ m~~ et $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$

$$= \cancel{\sqrt[3]{\frac{\cancel{(10^{11})^2} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{26}}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^8 \times 2}}}$$

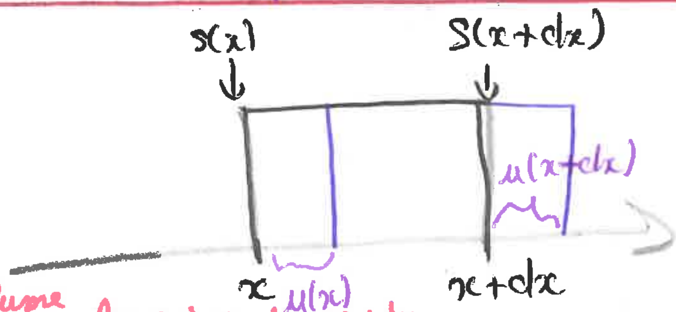
$\boxed{\simeq \cancel{196\,km}}$ $= 0{,}38\ \mu m$!

Ainsi, d'après les caractéristiques de cette ~~planète~~ sphère, si son rayon est inférieur à ~~$a_0 = 196$ km~~ $= 0{,}38\ \mu m$, la ~~planète~~ sphère sera repoussée par le soleil.

V. TD 30 : Pavillon exponentiel et adaptation d'impédance

Groupe 1.

1)



variation du volume par rapport au volume initial $= S(x)dx$

$$\delta V = S(x+dx)\,u(x+dx) - S(x)\,u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(S(x)u(x,t))dx$$

δ est un accroissement relatif de $S(x)dx$, donc on peut écrire :

$$\delta = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(S(x)u(x,t))dx}{S(x)dx} = \frac{1}{S(x)}\frac{\partial}{\partial x}(S(x)u(x,t))$$

en reconnaissant $\dfrac{\partial S}{S(x)\partial x} = \dfrac{\partial \ln S(x)}{\partial x}$

ainsi $$\delta = \frac{d\ln S(x)}{dx}u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$$

$$\chi_S = -\frac{1}{V_0}\frac{V-V_0}{P-P_0} = -\frac{\delta}{p(x,t)}$$

V_0 étant le volume initial et sachant que δ peut aussi s'écrire :

$$\delta = \frac{dV}{V_0} = \frac{V(x,t)-V_0}{V_0}$$

ainsi $p(x,t) = -\dfrac{\delta}{\chi_S}$ B

d'où $$\boxed{p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{d\ln S(x)}{dx}u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)}$$ B

2) notons $$p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{d\ln S(x)}{dx}u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\mu_0\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \quad (2)$$ → équation d'Euler linéarisée.

$\dfrac{\partial(2)}{\partial x}$: $$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial^2 x} = -\mu_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}$$

$\dfrac{\partial(1)}{\partial t}$: $$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S}\left(\frac{d\ln S(x)}{dx}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}\right)$$

or d'après l'énoncé $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \vec{e_x}$

en appliquant le critère de Schwarzh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\frac{\partial^2 (1)}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s}\left(\frac{d\ln S(x)}{dx}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}\right)$$

De même avec le critère de Schwarzh :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

d'où $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s}\left(\frac{d\ln S}{dx}\left(-\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right) - \frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \mu_0}\left(\frac{d\ln S}{dx}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)$$

En posant : $c^2 = \frac{1}{\chi_s \mu_0}$, on obtient l'équation demandée :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{d\ln S}{dx}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$ B

3) $S(x) = S(0)\, e^{x/a}$ $a > 0$

$$\ln S(x) = \ln S(0) + \frac{x}{a}$$

$$\frac{d\ln S(x)}{dx} = \frac{1}{a}$$

ainsi l'équation de propagation devient :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

si $\frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{1}{a^2} < 0$ alors $\omega < \frac{c}{2a}$

$\underline{k} = -j\frac{1}{2a} \pm j\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \rightarrow$ 2 racines complexes.

donc $k' = 0$ l'onde ne se propage pas. B

Ainsi le pavillon se comporte comme un filtre passe haut et à une pulsation de coupure de $\omega_c = \frac{c}{2a}$.

B

7) $\omega_c = 2\pi f_c$ d'où $f_c = \frac{c}{2\pi a}$.

or le pavillon est de longueur L

$$S(L) = S(0)\, e^{L/a}$$

$$\frac{L}{a} = \ln\left(\frac{S(L)}{S(0)}\right)$$

$$a = \frac{L}{\ln\left(\frac{S(L)}{S(0)}\right)}$$

$$f_c = \frac{c \ln\left(\frac{S(L)}{S(0)}\right)}{4\pi L}$$

8) À la question 6 nous avons trouvé que

$$k'' = \frac{1}{2a} \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\omega_c}{c}\right)^2}$$

$$k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{c}\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$$

9) Par définition de la puissance sonore :

$$P = \iint_S \cancel{\vec{p}}\, \vec{v}\, \vec{dS} = pvS(x)$$

⚠ p = pression = scalaire.

donc $\langle P \rangle = \langle pvS(x) \rangle$

4) $\underline{p}(x,t) = P_m e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' + jk''$ $(k',k'')\in\mathbb{R}^2$

$\underline{p}(x,t) = P_m e^{j(\omega t - (k' - jk')x)}$

$= P_m e^{j(\omega t - k'x)} e^{-k''x}$

d'où $p(x,t) = \Re e(\underline{p}(x,t)) = P_m \cos(\omega t - k'x) e^{-k''x}$

le terme de propagation est $\cos(\omega t - k'x)$

On a une onde se propageant dans le sens des x croissants.

Le terme d'amortissement est $e^{-k''x}$

Relation de dispersion.

5) $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

on est en coordonnées cartésiennes et $p(x,t)$ est 1 OPPH.

$$\frac{1}{c^2}((j\omega)^2) - (j\underline{k})^2 = \frac{1}{a}(-j\underline{k})$$

$$\frac{1}{c^2}(-\omega)^2 + \underline{k}^2 = -\frac{1}{a}j\underline{k}$$ ⚠ signe !

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{j\underline{k}}{a} + \underline{k}^2$$

6) $$\underline{k}^2 + \frac{j\underline{k}}{a} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

on a un polynôme de degré , calculons son discriminant :

$$\Delta = \left(j\frac{1}{a}\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}$$

si $\frac{4\omega^2}{c^2} - \frac{1}{a^2} > 0$ alors $\omega > \frac{c}{2a}$

donc $\underline{k} = -j\frac{1}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ puisqu'on a deux racines réelles

comme l'onde se propage dans le sens des x croissants

$k' = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $k'' = \frac{1}{2a}$ par identification or $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \dfrac{\partial \underline{v}(x,t)}{\partial t}$

$-j\underline{k}\,\underline{p} = -\mu_0 j\omega \underline{v}(x,t)$ — en cartésien

$\underline{k}\,\underline{p} = \mu_0 j\omega\, \underline{v}(x,t)$

$\underline{v} = (k'-jk'')\dfrac{p_0 e^{j(\omega t - kx)}}{\mu_0\omega}$

grandeurs quadratiques $\Rightarrow p(x,t)$ $v(x,t)$ en réels

ainsi $\langle P\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{p}\,\underline{v}^*S(x)) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(P_m\cos(\omega t - k'x)e^{-k''x}\underline{v}\,S$

$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left((P_m e^{-k''x})\underline{v}\,S(x)\right)$

$\langle P\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(P_m e^{-k''x}\dfrac{\underline{k}\,\underline{p}\,S(x)}{\mu_0\omega}\right)$

$= \frac{1}{2}P_m^2 e^{-2k''x}\dfrac{k'}{\mu_0\omega}S(0)e^{x/a}$

$= \frac{1}{2}P_m^2 e^{-2\frac{x}{2a}}\dfrac{\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}}{\mu_0 c}S(0)e^{x/a}$

$p(x,t) = p_m e^{-k''x}\cos(\omega t - k'x)$

$v = \dfrac{p_m}{\mu_0\omega}\left[k' e^{j(\omega t - k'x)}e^{-k''x} + k'' e^{j(\omega t - k'x - \frac{\pi}{2})}e^{-k''x}\right]$

$= \dfrac{p_m}{\mu_0\omega}e^{-k''x}\left[k'(\cos(\omega t - k'x) + j\sin(\omega t - k'x)) + k''\cos(\omega t - k'x + \frac{\pi}{2}) + jk''\sin(\omega t - k'x + \frac{\pi}{2})\right]$

$\langle P\rangle = \dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}{2\mu_0 c}P_m^2 S(0)$ $\longrightarrow$ ne dépend pas de x.

$v(\omega) = \dfrac{p_m}{\mu_0\omega}e^{-k''x}\left(k'\cos(\omega t - k'x) + k''\sin(\omega t - k'x)\right)$

10) pour $\omega > 10\omega_c$ $\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \simeq 1$.

$\langle P\rangle = \dfrac{P_m^2 S(0)}{2\mu_0 c} = \langle P_{\text{transférée}}\rangle$

or il n'y a pas d'onde réfléchie, donc

$\langle P_{\text{incidente}}\rangle = \langle P_{\text{transférée}}\rangle$

ainsi $T_{pav} = 1 \rightarrow$ très bonne transmission.

on en déduit que $\dfrac{Z_{\text{transférée}}}{Z_{\text{incidente}}} = 1$.

11) $T = \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$ $\qquad \dfrac{T_{pav}}{T} = \dfrac{(1+\alpha)^2}{4\alpha} = \dfrac{(1+9)^2}{4\times 9} = \dfrac{10}{36} \simeq 2{,}8$

La puissance transférée est quasiment triplée en présence du pavillon $\left(\dfrac{T_{pav}}{T}\right)_{dB} = 10\log\left(\dfrac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}\right) \simeq 10\log(2{,}8) \simeq 4{,}5\,dB$

B

5/5

$$P = \frac{A_m^2}{\mu_0 \omega} e^{-2k''x} \left[k' \cos^2(\omega t - kx) + k'' \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \right] \times S(x)$$

$$\langle P \rangle = \frac{A_m^2}{\mu_0 \omega} e^{-2k''x} \left(k' \times \frac{1}{2} + k'' \times 0 \right) S(x)$$

$$\langle P \rangle = \frac{A_m^2}{2\mu_0 \omega} k' e^{-2k''x} \times S(x)$$

$$= \frac{A_m^2}{2\mu_0 c} k' e^{-\frac{x}{a}} S_0 e^{+x/a} .$$

$$\langle P \rangle = \frac{A_m^2}{2\mu_0 c} k' S_0$$