Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
Courbes planes paramétrées.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque **matplotlib** pour tracer une courbe plane paramétrée.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction **odeint** de la bibliothèque **scipy.integrate** (sa spécification étant fournie).

Annexe 1 : Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants :
Fichiers python : Ordre 1 Euler.py et Ordre 1 odeint.py

Annexe 2 : Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
Fichier python : Ordre_2_odeint_portrait_phase_oscAmorti.py

outils mathématiques 1ère année

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas n = p = 2.
Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme f(x) = g(x). Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	

Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A.\cos(\omega x+\varphi)$ (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A.\exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt.	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1 + x)^\alpha$, e^x et $\ln(1 + x)$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions cos, sin, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier une loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.

ELEMENTS MATHEMATHIQUES POUR LA PHYSIQUE

Développements limités à l'ordre 2

Développement limité à l'ordre 2 de f(x) au voisinage de x_o :

$$f(x) = f(x_o) + \frac{(x - x_o)}{1!} f'(x_o) + \frac{(x - x_o)^2}{2!} f''(x_o) + \ldots$$

Si on pose $x = x_o + h$ avec h petit $(x - x_o) = h$

$$f(x_o + h) = f(x_o) + hf'(x_o) + \frac{h^2}{2} f''(x_o) + \ldots$$

On peut aussi poser $x = x_o$ et $h = dx$ et en se limitant à l'ordre 1 :

$$f(x + dx) = f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right) dx + \ldots$$

****

Ces équations différentielles qu'il faut savoir résoudre :

Soit s une fonction du temps, s(t) :

<u>Premier ordre</u> : τ est une constante

$\frac{ds}{dt} = \frac{E}{\tau}$ avec comme condition initiale $s(0) = E_o$, savoir tracer s(t).

$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = 0$ avec comme condition initiale s(0) = E, savoir tracer s(t).

$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E}{\tau}$ avec comme condition initiale s(0) = 0, savoir tracer s(t).

<u>Deuxième ordre</u> : λ est une constante, ω_o est une constante, E est une constante.

$\frac{d^2 s}{dt^2} = \omega_o^2 E$ avec comme conditions initiales $s(0) = E_o$ et $s(\tau) = E$.

$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0$ avec comme conditions initiales s(0) = E et $\frac{ds}{dt}(0) = 0$.

Cas 1 : $|\lambda| < \omega_o$
Cas 2 : $|\lambda| = \omega_o$
Cas 3 : $|\lambda| > \omega_o$

Tracer dans chaque cas l'allure de s(t).

$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\lambda \frac{ds}{dt} + \omega_o{}^2 s = \omega_o{}^2 E$ avec comme conditions initiales s(0) = 0 et $\frac{ds}{dt}(0) = 0$.

Cas 1 : $|\lambda| < \omega_o$
Cas 2 : $|\lambda| = \omega_o$
Cas 3 : $|\lambda| > \omega_o$

Tracer dans chaque cas l'allure de s(t).

$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_o{}^2 s = 0$ avec comme conditions initiales s(0) = E et $\frac{ds}{dt}(0) = 0$. (cette équation différentielle est celle de l'oscillateur harmonique, la forme de la solution doit-être immédiate) Tracer s(t).

$\frac{d^2s}{dt^2} - \omega_o{}^2 s = 0$ avec comme conditions initiales s(0) = E et $\frac{ds}{dt}(0) = 0$.

****

Annexe 1 : Résolution d’une équation différentielle linéaire d’ordre 1 à coefficients constants : Fichiers python : Ordre 1 Euler.py et Ordre 1 odeint.py

Exemple : charge d’un condensateur au travers d’une résistance, circuit RC série alimenté par un générateur de tension constante E. τ = RC, s est la tension aux bornes du condensateur.

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

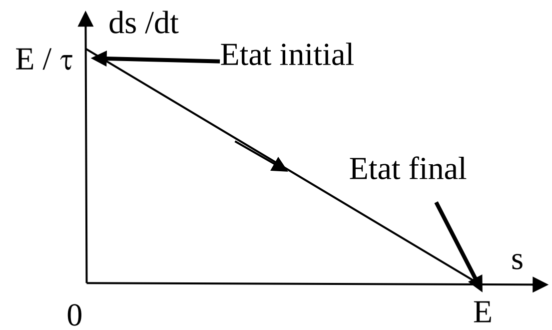
Condition initiale : on suppose qu’à t = 0- l’interrupteur est ouvert donc $s(t=0^-) = 0 = s(t=0^+)$ car s(t) est la tension aux bornes d’un condensateur fonction continue du temps.

Portrait de phase : représentation graphique de ds/dt en fonction de s :

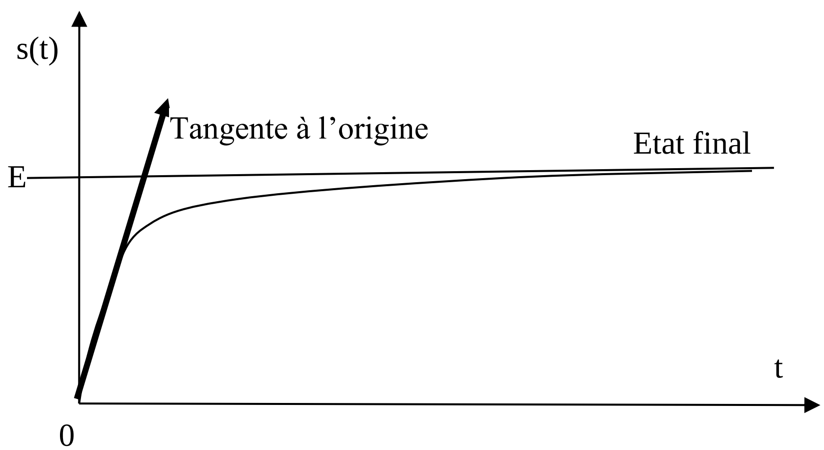
$\frac{ds}{dt} = \frac{E-s}{\tau}$: équation d’une droite dont l’ordonnée à l’origine est E / τ car s(t=0) = 0 et la pente -1/ τ.

s(t) varie rapidement au début : tangente à l’origine $\left(\frac{ds}{dt}\right)(t=0) = \frac{E}{\tau}$,

puis ne varie plus ensuite : état final s(t) = E.



D’où l’allure de s(t) sans résoudre l’équation différentielle :



résolution :

$s_{hom}(t) = Ae^{-t/\tau}$;

$s_{part}(t)$ = « de la forme du 2nd membre » = constante donc $s_{part} = E$

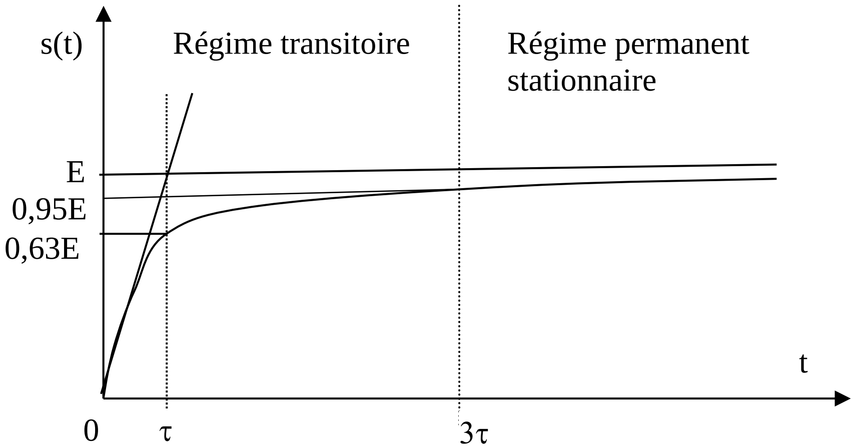
$s(t) = s_{hom}(t) + s_{part}(t) = Ae^{-t/\tau} + E$

Détermination de A à partir des conditions initiales : on suppose qu’à t = 0- l’interrupteur est ouvert donc $s(t=0^-) = 0 = s(t=0^+)$ s(t) est la tension aux bornes d’un condensateur fonction continue du temps.

s(0) = A + E = 0 d’où A = -E

et $\mathbf{s(t) = E(1- e^{-t/\tau})}$, il s’agit de la réponse du circuit à un échelon de tension ou **réponse indicielle**

Représentation graphique :



Montrer que l'intersection de la tangente à l'origine et la valeur finale E se fait pour t = τ.

Equation de la tangente à l'origine : tans(t) = $\left(\frac{ds}{dt}\right)(t=0)*t = \frac{E}{\tau}*t$ et on retrouve bien

tans(t= τ) = E

Montrer que s(t= τ) = 0,63 E

Temps de réponse à 5% de la valeur finale : s(t_{95}) = 0,95E montrer que t_{95} = 3τ, c'est la durée du régime transitoire

Régime permanent : le **régime permanent** est imposé par le générateur. Ici le générateur est un générateur de tension constante donc le régime permanent est stationnaire (ou continu).
Lorsque le régime permanent est atteint s(t) = E.
On montre que si t > 3τ alors s(t) = E = s_{part}(t) c'est le régime permanent qui est ici stationnaire.

Régime transitoire :
Si t < 3τ alors s(t) = s_{hom}(t) + s_{part}(t) le régime est dit **transitoire**.

Lorsque t $t \to 3\tau$ s_{hom}(t) = Ae^{-3} = 0,05A $\to 0$

Dépassement : lorsque la réponse dépasse la valeur finale.

Système stable :
Lorsqu'un système est **stable** $\lim_{t\to\infty} s_{\text{hom}}(t)$ est une valeur finie souvent nulle.

Les équations différentielles d'ordre 1 de la forme $\frac{ds}{dt}+\frac{s}{\tau}=\frac{e}{\tau}$ sont **stables** lorsque τ > 0.

Pour étudier la stabilité d'un système, il suffit d'étudier $\lim_{t\to\infty} s_{\text{hom}}(t)$.

Annexe 2 : Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
Fichier python : Ordre_2_odeint_portrait_phase_oscAmorti.py

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_o\frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 2m\omega_o\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q}\frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = \frac{\omega_o}{Q}\frac{dE}{dt} = 0$$

En posant $2m = \frac{1}{Q}$

résolution :
$s_{part}(t)$ = « de la forme du 2nd membre » = constante donc $s_{part} = 0$ ici, il s'agit du **régime libre.**

Détermination du régime transitoire :

Equation caractéristique : $r^2 + 2m\omega_o.r + \omega_o^2 = 0$
Discriminant : $\Delta = 4m^2\,\omega_o^2 - 4\omega_o^2 = 4\omega_o^2\,(m^2 - 1)$

$\Delta > 0$ si $m^2 > 1$ 2 racines réelles : $r_{1/2} = -\,m\omega_o \pm \omega_o\sqrt{m^2-1}$

$s_{hom}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, **le régime est dit apériodique**

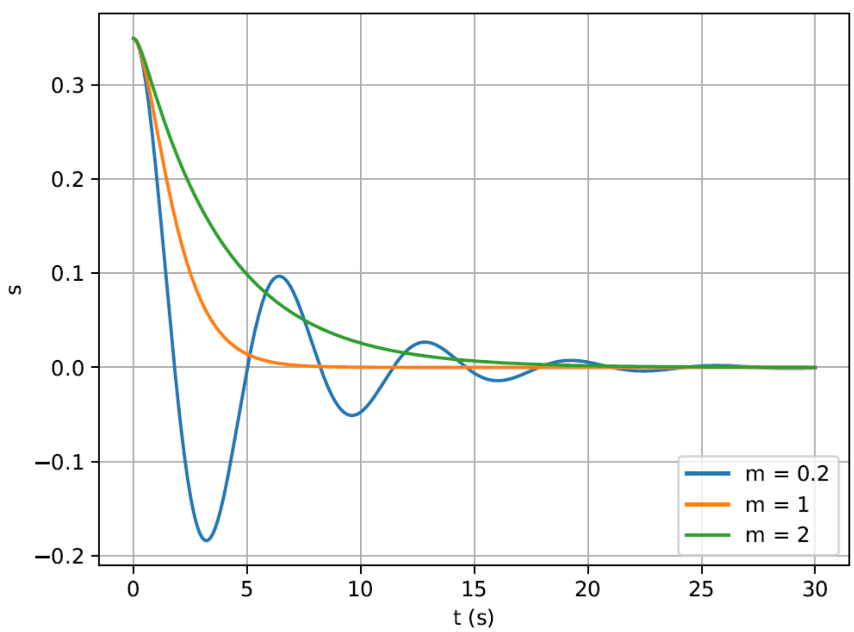
$\Delta = 0$ si $m = 1$ 1 racine double réelle : m = 1 $r = m\,\omega_o$

$s_{hom}(t) = (At + B)e^{rt}$, **le régime est dit critique**

$\Delta < 0$ si $m^2 < 1$ **2** racines complexes $r_{1/2} = -\,m\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{1-m^2} = -\,m\omega_o \pm j\Omega$

en posant $\Omega = \omega_o\sqrt{1-m^2}$

$s_{hom}(t) = e^{-m\omega_o t}\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$, **le régime est dit pseudopériodique** de pseudo période $T = 2\pi/\Omega$ de coefficient d'amortissement $m\omega_o$.



Dans cette représentation graphique on a choisi une condition initiale telle que s(t=0) = 0,35 V et ds/dt (t= 0) = 0

m = 0,2 régime pseudopériodique avec Q = 1/2m = 2,5 on peut remarquer qu'il s'agit de l'ordre de grandeur du nombre de pseudooscillations avant le régime permanent

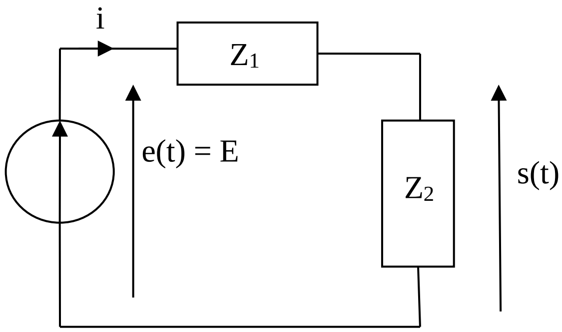
m = 1 régime critique
m = 2 régime apériodique

Vérifier que si m > 0 alors le système est <u>stable</u>

Par analogie avec un système d'ordre 1, on peut définir la durée du régime transitoire par

$$3\tau = 3 / (m\omega_o)$$

Détermination de A et B à partir des conditions initiales :



Z_1 association série d'une bobine parfaite d'inductance L et d'un condensateur parfait de capacité C ; Z_2 = R

Connaissant les conditions initiales, la nature du régime ainsi que l'état final, on peut en déduire simplement l'allure de la représentation graphique de s(t), ainsi que celles de uc(t) tension aux bornes du condensateur et $u_L(t)$ tension aux bornes de la bobine.

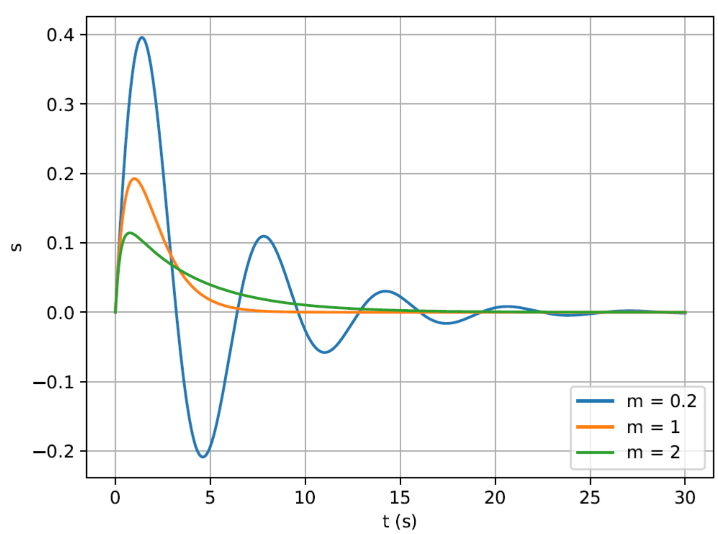
On suppose qu'à t = 0- l'interrupteur est ouvert et le condensateur déchargé

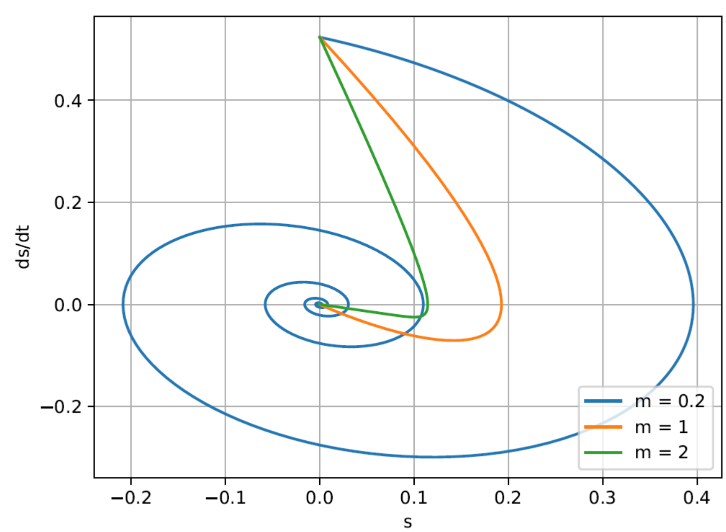
$Ri = s(t=0^-) = 0 = s(t=0^+)$ la bobine impose la continuité du courant, c'est la première condition initiale.
La 2è condition initiale est donnée par (ds / dt) (t=0+) or $u_l = L(di / dt) = (L/R) (ds / dt)$ et
$uc(t=0^-) = uc(t=0^+) = 0$ la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps.
La loi des mailles est valable à tout instant : $E = uc + u_L + s$
à t = 0+ : $E = u_l = (L/R) (ds /dt) (t=0+)$ d'où $(ds / dt) (t=0+) = RE / L$

Etat final $t \to \infty$, régime permanent, le condensateur est chargé uc = E, i = 0 donc s = 0, la bobine est un fil donc $u_L = 0$

En déduire les courbes de réponse s(t) selon la nature du régime transitoire ainsi que les portraits de phase.

Dans les représentations ci-dessous, on a pris E = 0,5 V et (ds/dt)(0+) = 0,5 $V.s^{-1}$





Expression complète de la solution en fonction du signe de Δ :

Δ > 0 s(t) = A$e^{r_1 t}$ + B$e^{r_2 t}$ s(t=0) = A + B = 0

$$\frac{ds}{dt} = A\left(r_1 e^{r_1 t} - r_2 e^{r_2 t}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)(t=0) = A(r_1 - r_2) = \frac{RE}{L}$$

d'où A = $\frac{R}{(r_1 - r_2)L}E$ et B = $-\frac{R}{(r_1 - r_2)L}E$

$$s(t) = E\frac{R}{L}\left(\frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2}\right) = -E\frac{R}{L}\left(\frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{2m}\right)$$

Δ = 0 s(t) = (At + B)e^{rt} , s(t=0) = B = 0

$$\frac{ds}{dt} = e^{rt}A(1 + rt) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)(t=0) = A = ER/L$$

$$s(t) = E\frac{R}{L}e^{rt}t$$

Δ < 0 s(t) = $e^{-m\omega o\, t}$ (Acos (Ωt) + Bsin (Ωt)), s(t=0) = A = 0 donc A = 0

$$\frac{ds}{dt} = e^{-m\omega o t}\left(\Omega B\cos(\Omega t) - mB\sin(\Omega t)\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)(t=0) = \Omega B = E\frac{R}{L}$$

donc B = $E\frac{R}{L\Omega}$

$$s(t) = E\frac{R}{L\Omega}e^{-m\omega o t}\sin(\Omega t)$$