Appendice 2 : outils mathématiques 1ère année

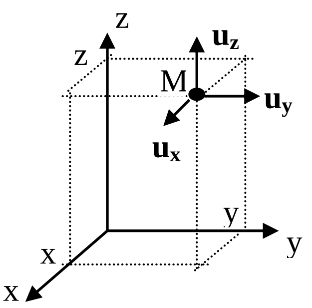
Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Géométrie	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée d'un espace de dimension inférieure ou égale à 3. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Connaître les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.

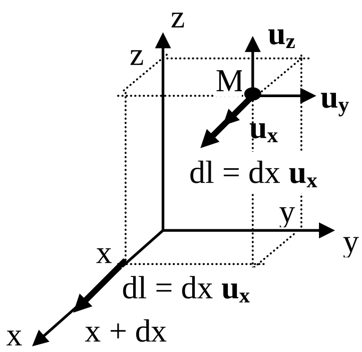
Longueurs, surfaces et volumes

Les vecteurs sont notés en caractères **gras**

<u>LONGUEURS</u> : L

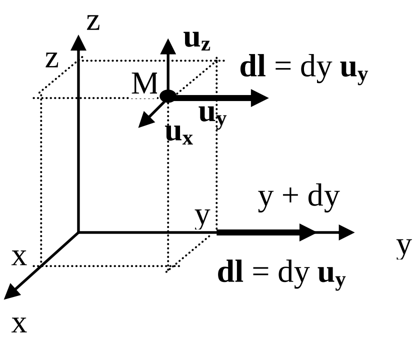
En coordonnées cartésiennes :

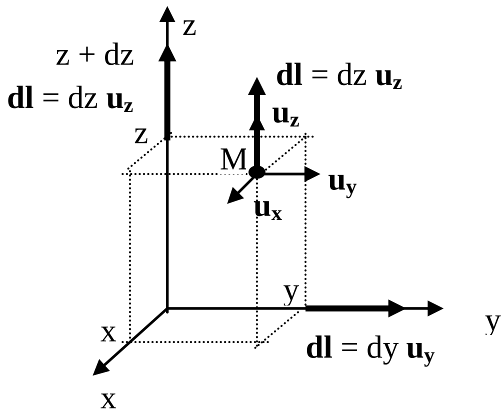




Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_x}$

dl = dx $\mathbf{u_x}$ ou dl = dx





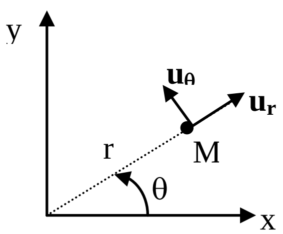
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_y}$

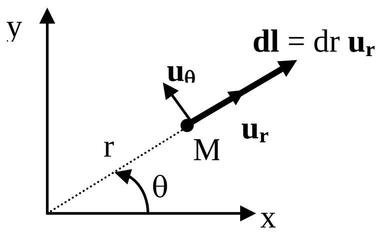
dl = dy $\mathbf{u_y}$ ou dl = dy

Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_z}$

dl = dz $\mathbf{u_z}$ ou dl = dz

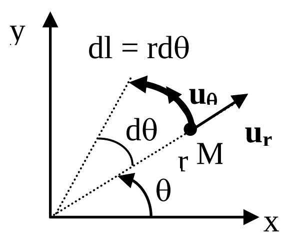
Dans le plan polaire :





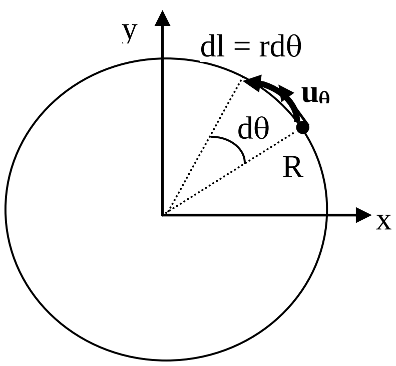
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_r}$

dl = dr $\mathbf{u_r}$ ou dl = dr



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\theta}$

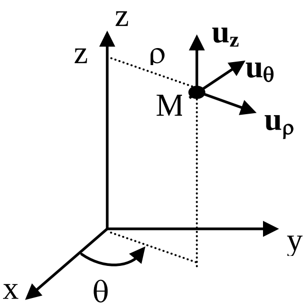
dl = rdθ $\mathbf{u_r}$ ou dl = rdθ

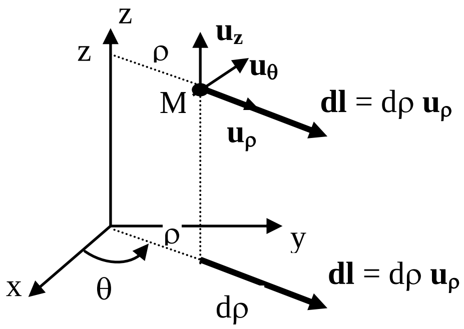


Périmètre du cercle de rayon R :

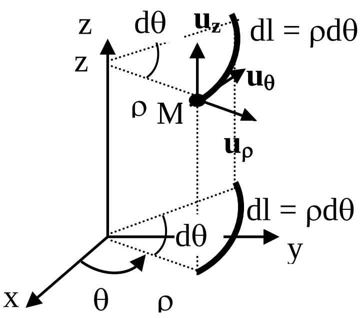
C = $\oint R d\theta = R\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi R$

En coordonnées cylindriques :

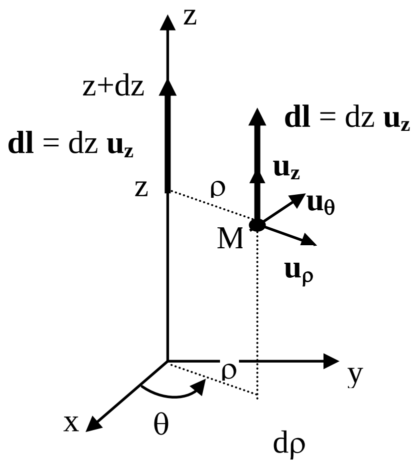




Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\rho}$:
dl = dρ $\mathbf{u_\rho}$ ou dl = dρ

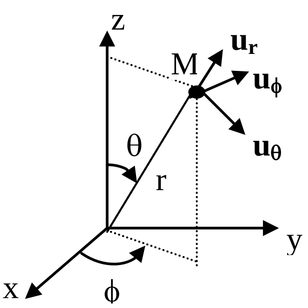


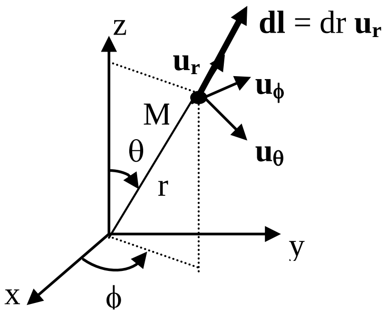
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\theta}$:
dl = ρdθ $\mathbf{u_\theta}$ ou dl = ρdθ



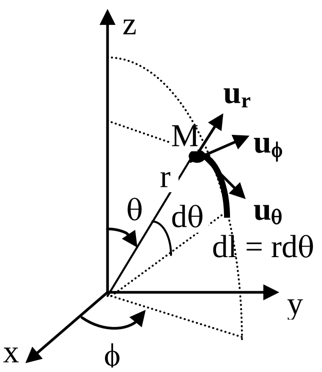
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_z}$:
dl = dz $\mathbf{u_z}$ ou dl = dz

En coordonnées sphériques :

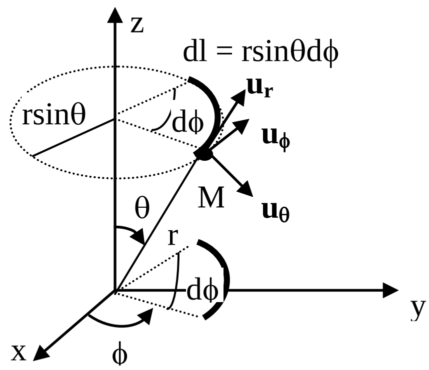




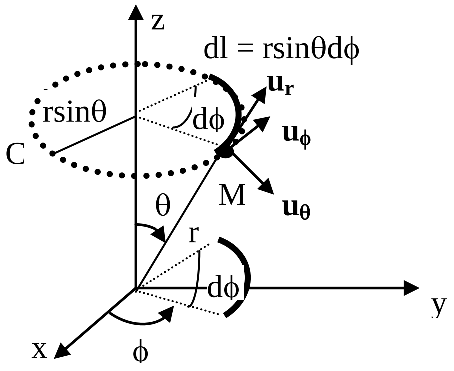
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_r}$:
dl = dr $\mathbf{u_r}$ ou dl = dr



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\theta}$:
dl = rdθ $\mathbf{u_\theta}$ ou dl = rdθ



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\phi}$:
dl = rsinθdϕ $\mathbf{u_\phi}$ ou dl = rsinθdϕ

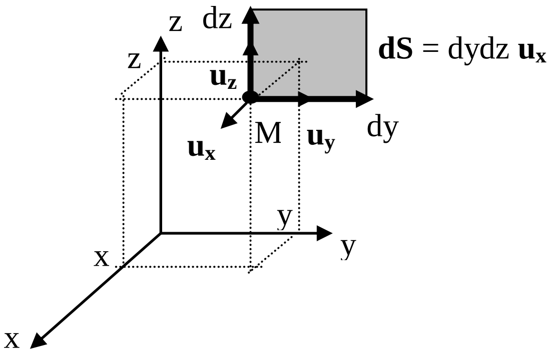


Périmètre du cercle de rayon rsinθ :

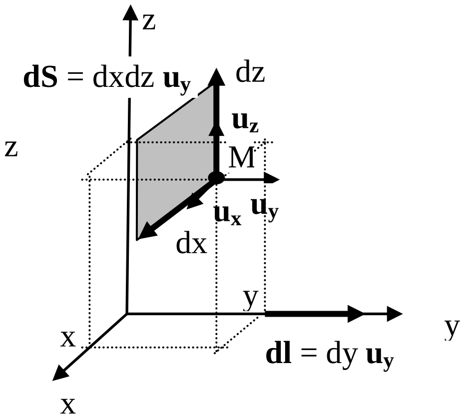
C = $\oint r\sin\theta d\phi = 2\pi r\sin\theta$

<u>SURFACES</u> : L^2 les surfaces sont orientées par leur normale

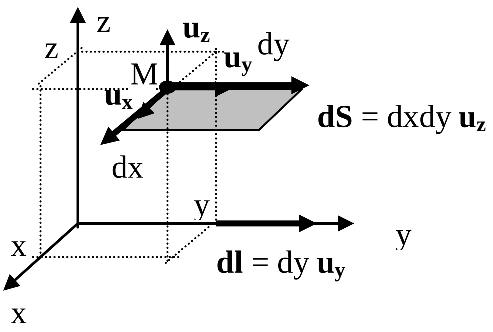
En coordonnées cartésiennes :



Surface colinéaire à $\mathbf{u_x}$
dS = dydz $\mathbf{u_x}$ ou dS = dydz

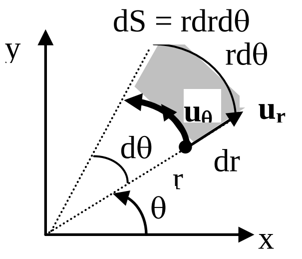


Surface colinéaire à $\mathbf{u_y}$
dS = dxdz $\mathbf{u_y}$ ou dS = dxdy

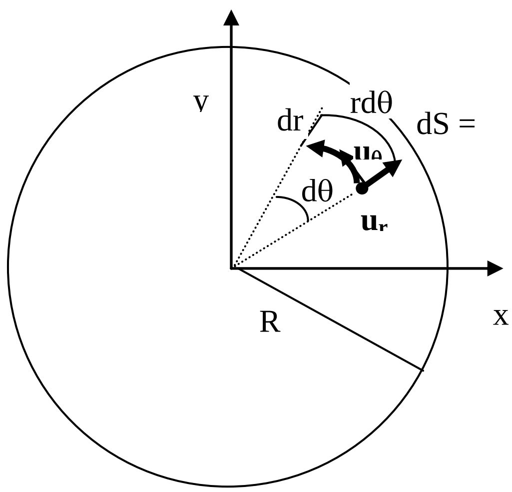


Surface colinéaire à $\mathbf{u_z}$
dS = dxdy $\mathbf{u_z}$ ou dS = dxdy

Dans le plan polaire :

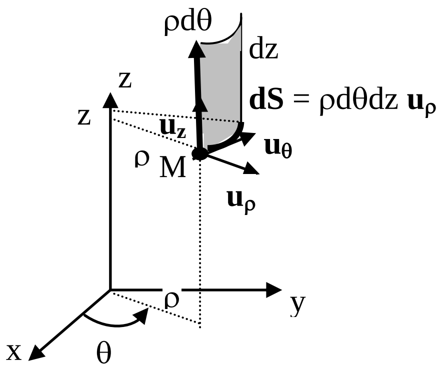


Surface élémentaire
dS = rdrdθ

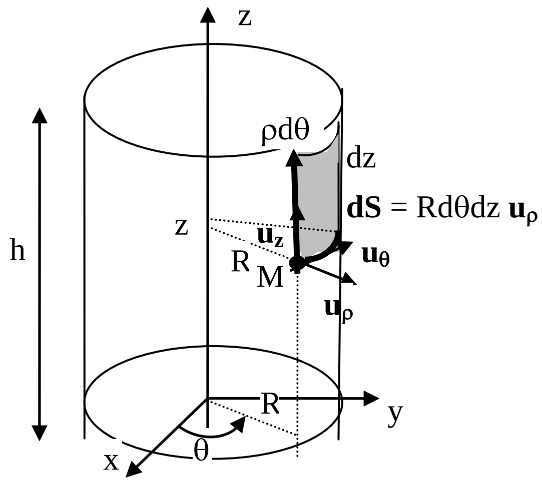


Surface d'un disque de rayon R :
S = $\int r dr d\theta = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$

En coordonnées cylindriques :

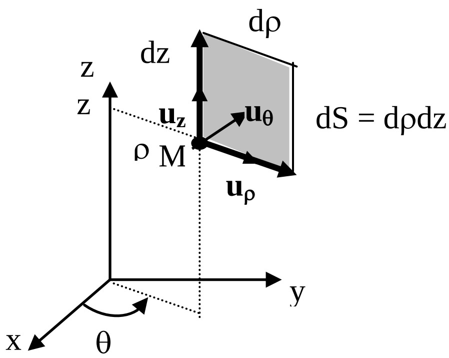


Surface colinéaire à $\mathbf{u}_\rho$:
$\mathbf{dS} = \rho d\theta dz\, \mathbf{u}_\rho$ ou $dS = \rho d\theta dz$

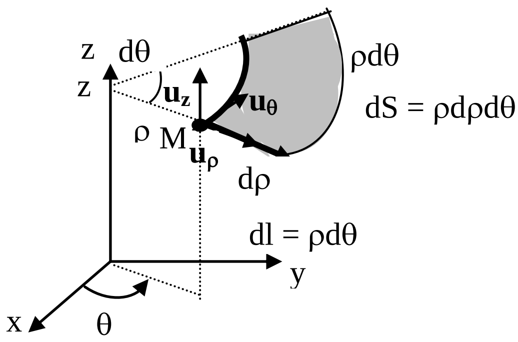


Surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h

$$S = \int R d\theta dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h} dz = 2\pi R h$$

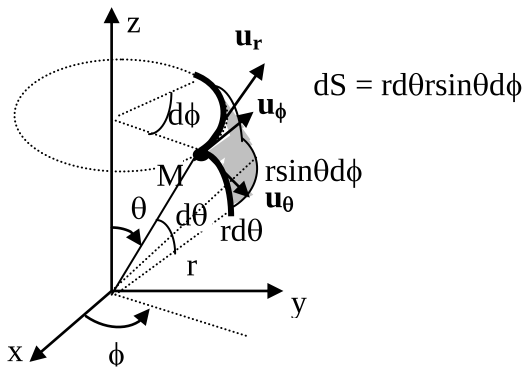


Surface colinéaire à $\mathbf{u}_\theta$:
$\mathbf{dS} = d\rho dz\, \mathbf{u}_\theta$ ou $dS = d\rho dz$

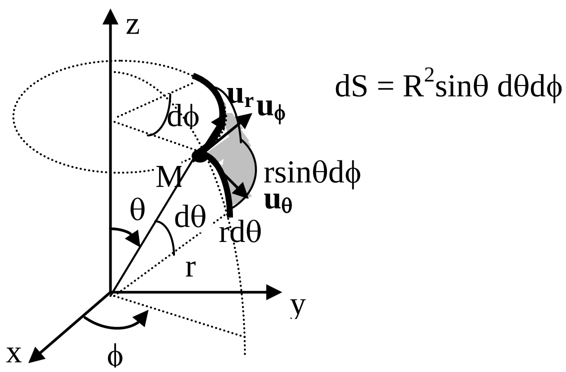


Surface colinéaire à $\mathbf{u}_z$:
$\mathbf{dS} = \rho d\theta d\rho\, \mathbf{u}_z$ ou $dS = \rho d\theta d\rho$

En coordonnées sphériques :



Surface colinéaire à $\mathbf{u}_r$:
$\mathbf{dS} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi\, \mathbf{u}_r$ ou $dS = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$



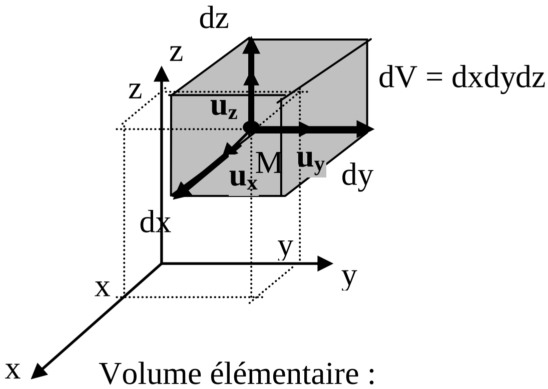
Surface d'une sphère de rayon R

$$S = \int R^2 \sin\theta d\theta d\phi = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} 2\pi = 4\pi R^2$$

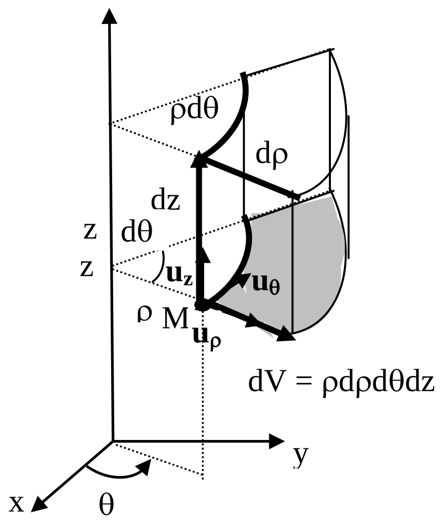
VOLUMES : L^3

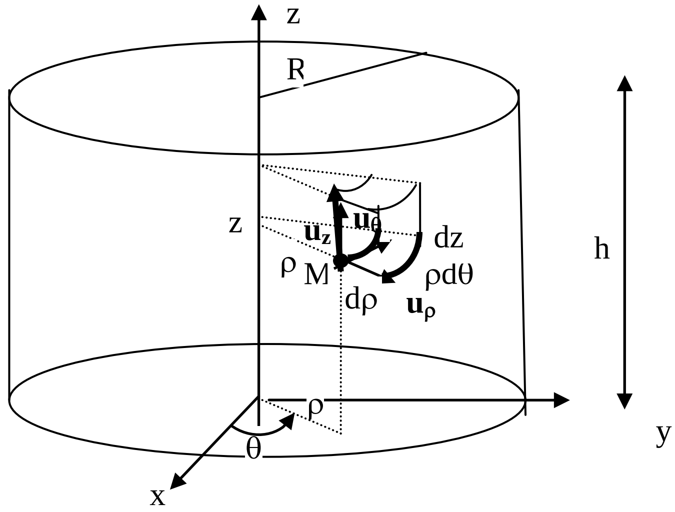
En coordonnées cartésiennes :



Volume élémentaire :
dV = dxdydz

En coordonnées cylindriques :

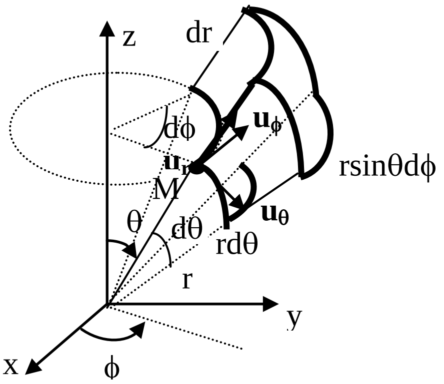




Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h

$$V = \int \rho d\rho d\theta dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \pi R^2 h$$

En coordonnées sphériques :



dV = r^2dr sinθdθ dϕ

Volume d'une sphère de rayon R

$$V = \int r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$\frac{R^3}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$