Appendice 2 : outils mathématiques de 2è année

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Analyse	
a) gradient	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser un formulaire fourni en coordonnées cylindriques ou sphériques Connaître l'expression de la différentielle en fonction des dérivées partielles. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
b) divergence	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
c) rotationnel	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
d) laplacien d'un champ scalaire	Définir Δf = div (**grad** f). Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.

On notera $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point M et t la date.

FORMULAIRE OPERATEURS VECTORIELS

GRADIENT

Coordonnées cylindriques

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z\ .}$$

Coordonnées sphériques

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\ .}$$

DIVERGENCE

Coordonnées cylindriques

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\ .$$

Coordonnées sphériques

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r A_\varphi\right).$$

ROTATIONNEL

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta A_\varphi\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r A_\varphi\right) \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

LAPLACIEN

coordonnées cylindriques:

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\ .$$

coordonnées sphériques:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\ .$$

Le Laplacien d’un vecteur est le Laplacien de ses coordonnées

DEFINITION OPRATEURS VECTORIELS

1) GRADIENT D'UN CHAMP DE SCALAIRES

a) Définition

La différentielle du champ scalaire $U(\vec{r},t)$ est: $\boxed{\mathrm{d}U = \overrightarrow{grad}\,U.\mathrm{d}\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}\mathrm{d}t\ .}$

A une date t fixée: $\boxed{\mathrm{d}U = \overrightarrow{grad}\,U.\mathrm{d}\vec{r}}$, où $\mathrm{d}\vec{r}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

Remarques: On note aussi $\overrightarrow{grad}\,U = \vec{\nabla}U$ ($\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla).

$\overrightarrow{grad}\,U$ est un champ de <u>vecteurs.</u>

$$\boxed{\overrightarrow{grad}(scalaire) = \overrightarrow{vecteur}}$$

b) Expressions

<u>Coordonnées cartésiennes</u>

U(x,y,z) donc dU =

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{x,y} dz = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U. \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \overrightarrow{grad}U.d\vec{r}$$

En identifiant :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_x + \mathrm{d}y\,\vec{u}_y + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z,$$

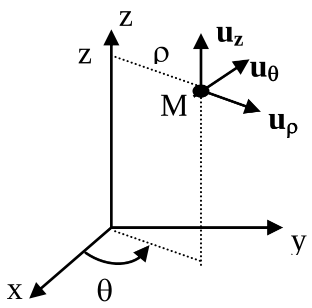
$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,U = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z\ .}$$

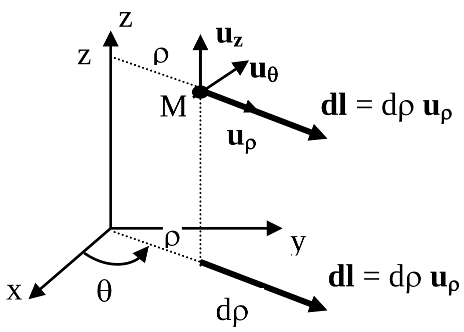
Remarque: $\vec{\nabla}$ est donc l'opérateur: $\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

<u>seulement en coordonnées cartésiennes</u>

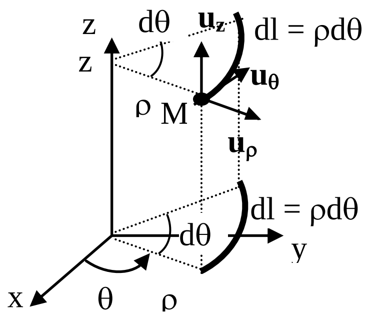
En coordonnées cylindriques :



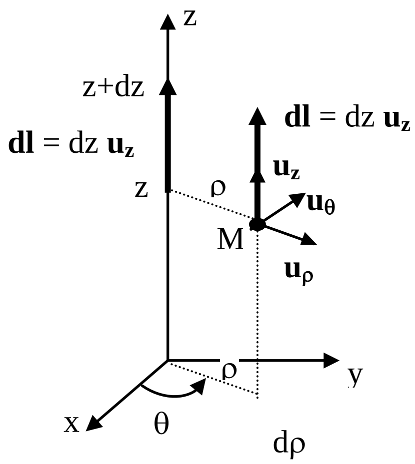


Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\rho}$:
dl = dρ $\mathbf{u_\rho}$ ou dl = dρ

OM = ρ $\mathbf{u_r}$ + z $\mathbf{u_z}$
dl = dρ $\mathbf{u_\rho}$ + rdθ $\mathbf{u_\theta}$ + dz



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_\theta}$:
dl = ρdθ $\mathbf{u_\theta}$ ou dl = ρdθ



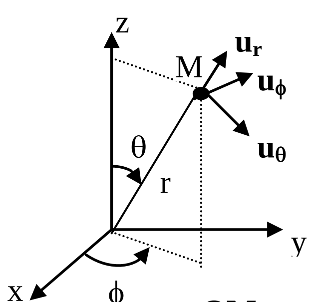
Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_z}$:
dl = dz $\mathbf{u_z}$ ou dl = dz

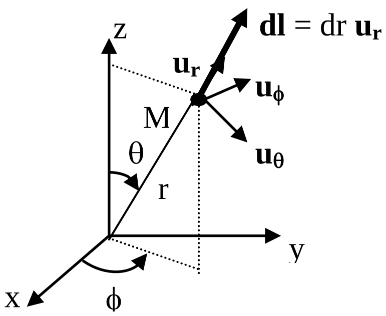
$$\overrightarrow{grad}U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \rho} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U$$

$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$, donc:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.}$$

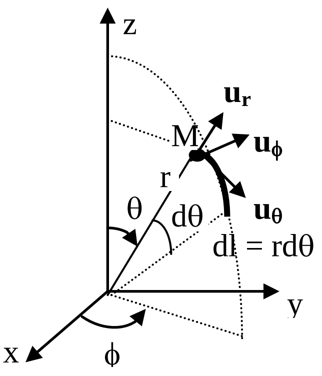
En coordonnées sphériques :



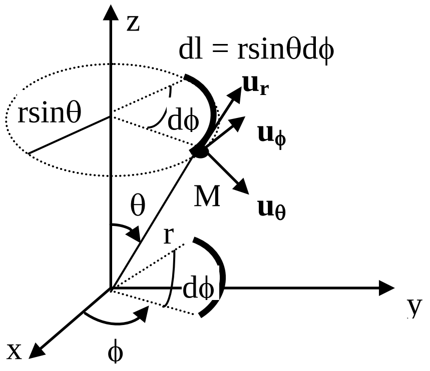


Déplacement colinéaire à $\mathbf{u_r}$:
dl = dr $\mathbf{u_r}$ ou dl = dr

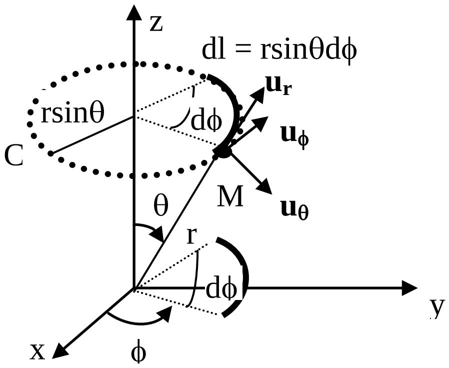
OM = r $\mathbf{u_r}$
dl = dr $\mathbf{u_r}$ + rdθ $\mathbf{u_\theta}$ + rsinθdϕ



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u}_\theta$:
dl = rdθ $\mathbf{u}_\theta$ ou dl = rdθ



Déplacement colinéaire à $\mathbf{u}_\phi$:
dl = rsinθdϕ $\mathbf{u}_\phi$ ou dl = rsinθdϕ



Périmètre du cercle de rayon rsinθ :
C = $\oint r\sin\theta d\phi = 2\pi r\sin\theta$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r.\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r.\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} U}$$

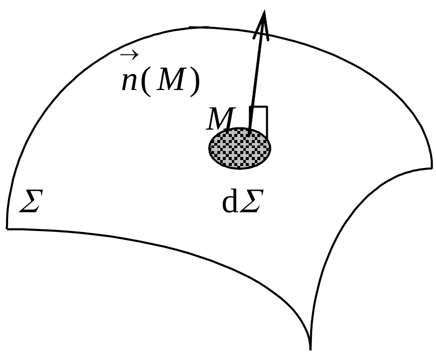
$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$, donc:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\ .}$$

2) FLUX D'UN CHAMP DE VECTEURS

Le flux élémentaire à travers la surface (élémentaire) **orientée** dΣ autour de *M*, du champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r},t)$ est:

$$\boxed{\delta\phi = \vec{A}(\vec{r},t).\mathrm{d}\vec{S} = \vec{A}.\vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma\ .}$$



b) Flux

Le flux du champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r},t)$ à travers la surface Σ **orientée** est: $\phi = \iint_\Sigma \delta\phi = \iint_\Sigma \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$.

Autre notation : $\phi = \int_\Sigma \delta\phi = \int_\Sigma \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S}$

3) DIVERGENCE D'UN CHAMP DE VECTEURS

a) Définition, Théorème d'Ostrogradski (admis)

Soit $\vec{A}(\vec{r},t)$ un champ de vecteur défini sur tout l'espace.

Il existe un unique champ scalaire appelé divergence de $\vec{A}$ et noté $div\vec{A}$, tel que pour tout volume V limité par une surface **fermée** S, orientée par sa normale extérieure, le flux de $\vec{A}$ à travers S est égal à l'intégrale de $div\vec{A}$ sur le volume V.

$$\boxed{\oiint_S \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V div\vec{A}\,\mathrm{d}\tau.}$$

Autre notation : $\boxed{\oint_S \vec{A}.\mathrm{d}\vec{S} = \int_V div\vec{A}\,\mathrm{d}\tau}$

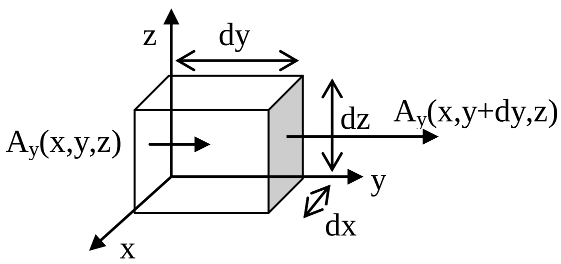
Remarque: $div\vec{A}$ est un champ de scalaires. $\boxed{div\left(\overrightarrow{vecteur}\right) = scalaire}$

Remarque: on note aussi: $div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$ (où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla).

b) Expressions

Coordonnées cartésiennes

On pose: $\vec{A} = A_x(x,y,z)\,\vec{u}_x + A_y(x,y,z)\,\vec{u}_y + A_z(x,y,z)\,\vec{u}_z$.



On considère le cube élémentaire de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ci-contre entourant le point M. Le flux de $\vec{A}$ à travers la surface de ce cube est:

$\delta\Phi =$

$[A_x(x+\mathrm{d}x,y,z) - A_x(x,y,z)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [A_y(x,y+\mathrm{d}y,z) - A_y(x,y,z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + [A_z(x,y,z+\mathrm{d}z) - A_z(x,y,z)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

donc: $\delta\Phi = \frac{\partial A_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial A_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Or $\delta\Phi = div\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$, avec: $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, *donc:* $\boxed{div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.}$

Coordonnées cylindriques

On pose: $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\,\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z)\,\vec{u}_z$. Alors: $div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Coordonnées sphériques

On pose: $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{u}_\varphi$.

Alors: $div\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r A_\varphi\right)$.

4) CIRCULATION ET ROTATIONNEL D'UN CHAMP DE VECTEURS

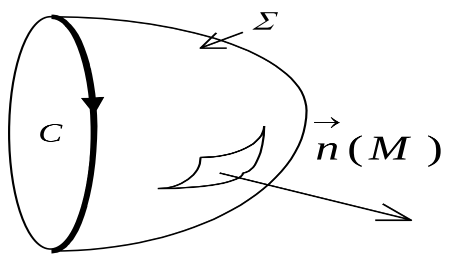
a) Circulation d'un champ de vecteurs

La circulation élémentaire δC du champ vectoriel $\vec{A}$ entre deux points voisins M et M' tels que $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}\vec{r}$ est: $\boxed{\delta C = \vec{A}(r,t).\mathrm{d}\vec{r}.}$

La circulation du champ vectoriel $\vec{A}$ entre les points M et P le long de la courbe (C) est: $C_M^P(C) = \int_{M(C)}^{P} \vec{A}(\vec{r},t).\mathrm{d}\vec{r}$.

b) Définition du rotationnel d'un champ de vecteurs, Théorème de Stokes (1849), (admis)

Soit $\vec{A}(\vec{r},t)$ un champ de vecteur défini sur tout l'espace. Il existe un unique champ de vecteurs appelé rotationnel de $\vec{A}$, noté $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ ou $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ tel que pour toute surface Σ s'appuyant sur un contour C **fermé** et **orienté** à la circulation de $\vec{A}$ le long de C est égale au flux de $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ à travers à travers Σ



$$\boxed{\oint_C \vec{A}.\mathrm{d}\vec{r} = \iint_\Sigma \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right).\mathrm{d}\vec{S} = \iint_\Sigma \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right).\vec{n}\,\mathrm{d}S}.$$

Autre notation : $\boxed{\oint_C \vec{A}.\mathrm{d}\vec{r} = \int_\Sigma \left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right).\mathrm{d}\vec{S}}$

Remarque: $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$ est un champ de vecteurs. $\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{vecteur}\right) = \overrightarrow{vecteur}}$

Remarque: Si le champ $\vec{A}$ est à circulation conservative, c'est-à-dire si $\vec{A}$ dérive d'un champ de scalaires Φ: $\vec{A} = \overrightarrow{grad}\,\phi$, alors $\delta\mathcal{C} = 0$ pour toute courbe élémentaire dC , donc $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$

$\boxed{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,\phi\right) = \vec{0} \text{ ou } \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\phi\right) = \vec{0}.}$

c) Vecteur dérivant d'un potentiel vecteur

On dit qu'un champ de vecteurs $\vec{B}$ dérive d'un potentiel-vecteur $\vec{A}$ lorsque pour tout point M de l'espace $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$.

4) Expressions

a) Coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{pmatrix}}$$

b)Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\end{pmatrix}$$

c) Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\end{pmatrix}$$

5) LAPLACIEN

a) Laplacien d'un champ de scalaires

Définition

On appelle laplacien du champ scalaire U($\vec{r}$,t) le champ scalaire:

$$\boxed{\Delta U=div\left(\overrightarrow{grad}U\right)=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}U\right)=\vec{\nabla}^2\,U\,.}$$

Expressions

En coordonnées cartésiennes: $\boxed{\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}}$, d'où la notation $\vec{\nabla}^2$.

En coordonnées cylindriques: $\Delta U=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

En coordonnées sphériques: $\Delta U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$.

b) Laplacien d'un champ vectoriel

Définition

Le laplacien d'un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r},t)$ est le champ de vecteurs:

$$\boxed{\vec{\Delta A} = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right)}$$ ou: $\vec{\Delta A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right) - \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right) = \vec{\nabla}^2\vec{A} - \vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}\right)$.

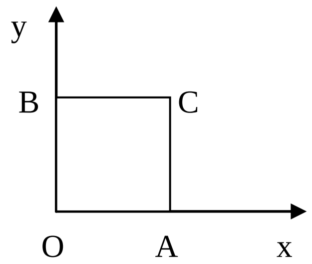
b) Expression en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{\Delta A} = \Delta A_x\,\vec{u}_x + \Delta A_y\,\vec{u}_y + \Delta A_z\,\vec{u}_z\,.}$$

(Le laplacien d'un champ de vecteurs a pour coordonnées cartésiennes les laplaciens de ses coordonnées cartésiennes)

IV. APPLICATION A LA MECANIQUE DES FLUIDES

1) SIGNIFICATION PHYSIQUE DES OPERATEURS DIVERGENT ET ROTATIONNEL



Soit une particule fluide d'épaisseur e très mince, dont la projection à l'instant t dans le plan (Oxy) est un carré (OABC) de côté a.

Donner les coordonnées des points O, A, B et C à l'instant t.

On modélise un écoulement plan par la donnée du champ des vitesses : $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{u_x} + v_y\,\mathbf{u_y}$.

On étudie la déformation subie par la particule fluide dans le champs de vitesse $\mathbf{v_1} = a_1x\,\mathbf{u_x} + b_1y\,\mathbf{u_y}$ où les a_i et b_i sont des coefficients positifs.

Calculer div$\mathbf{v_1}$, **rot**$\mathbf{v_1}$.
Déterminer la vitesse $\mathbf{v_1}$ pour les points O, A, B et C.
Représenter dans le plan cartésien la position de ces points à l'instant t+dt.
En déduire la forme de la particule à l'instant t+dt.
Calculer l'accroissement relatif de volume de la particule fluide entre t et t+dt.

Mêmes questions pour le champ de vitesse $\mathbf{v_2} = a_2y\,\mathbf{u_x} + a_2x\,\mathbf{u_y}$.

Mêmes questions pour le champ de vitesse $\mathbf{v_3} = -a_3y\,\mathbf{u_x} + a_3x\,\mathbf{u_y}$