

EC0 Révisions de 1^{ère} année

Programme de 1^{ère} année

Contenus disciplinaires : 1 ^{ère} année 1 ^{er} Semestre	Outils mathématiques	Domaines numériques
Thème 1 : ondes et signaux (1)	1. Equations algébriques	1. Outils graphiques
1.1 Signaux électriques dans l'ARQS	2. Equations différentielles	4. Equations différentielles
1.2 Circuit linéaire du premier ordre	3. Fonctions	
1.3 Oscillateurs libres et forcés	5. Trigonométrie	
1.4 Filtrage linéaire		

Contenus disciplinaires

Les capacités écrites en caractère gras relèvent uniquement du domaine expérimental

Notions et contenus	Capacités exigibles
1.2. Signaux électriques dans l'ARQS	
Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, condensateurs, bobines, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.

Résistance de sortie, résistance d'entrée.	Évaluer une résistance d'entrée ou de sortie à l'aide d'une notice ou d'un appareil afin d'appréhender les conséquences de leurs valeurs sur le fonctionnement d'un circuit. Étudier l'influence des résistances d'entrée ou de sortie sur le signal délivré par un GBF, sur la mesure effectuée par un oscilloscope ou un multimètre.
Caractéristique d'un dipôle. Point de fonctionnement.	Étudier la caractéristique d'un dipôle pouvant être non-linéaire et mettre en œuvre un capteur dans un dispositif expérimental.
1.3. Circuit linéaire du premier ordre	
Régime libre, réponse à un échelon de tension.	Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques. <u>Capacité numérique</u> : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.
1.4. Oscillateurs libres et forces	
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC et de l'oscillateur mécanique.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. Réaliser un bilan énergétique.

Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux.	Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique. Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.
Stockage et dissipation d'énergie.	Réaliser un bilan énergétique.
Impédances complexes.	Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé. Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité. Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase. Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance. Mettre en œuvre une démarche expérimentale visant à caractériser des régimes transitoires du premier ou du second ordre (flash, sismomètre, etc.).
1.5. Filtrage linéaire	
Signaux périodiques.	Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales. Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal. Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.

Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.
Modèles de filtres passifs : passe-bas et passe-haut d'ordre 1, passe-bas et passe-bande d'ordre 2.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur. Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée. Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.). Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale. Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences. <u>Capacité numérique</u> : simuler, à l'aide d'un langage de programmation, l'action d'un filtre sur un signal périodique dont le spectre est fourni. Mettre en évidence l'influence des caractéristiques du filtre sur l'opération de filtrage.
Filtres actifs en électronique. Modèle de l'ALI idéal en régime linéaire.	Identifier la présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse comme un indice de fonctionnement en régime linéaire. Établir la relation entrée-sortie des montages non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur. Déterminer les impédances d'entrée de ces montages. Mettre en œuvre un filtre actif.

Outils mathématiques	Capacités exigibles
1. Équations algébriques	
Systèmes linéaires de n équations à p inconnues.	Identifier les variables (inconnues) nécessaires à la modélisation du problème sous forme d'un système d'équations linéaires. Donner l'expression formelle des solutions dans le seul cas $n = p = 2$.

Équations non linéaires.	Représenter graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$. Interpréter graphiquement la ou les solutions.
2. Équations différentielles	
Équations différentielles linéaires à coefficients constants.	Identifier l'ordre. Mettre l'équation sous forme canonique.
Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$.	Trouver la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A \cdot \cos(\omega x + \varphi)$ (en utilisant la notation complexe).
Équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$.	Utiliser l'équation caractéristique pour trouver la solution générale de l'équation sans second membre. Prévoir le caractère borné ou non de ses solutions (critère de stabilité). Trouver l'expression des solutions lorsque $f(x)$ est constante ou de la forme $A \cdot \exp(\lambda x)$ avec λ complexe. Trouver la solution de l'équation complète correspondant à des conditions initiales données. Représenter graphiquement cette solution.
Autres équations différentielles d'ordre 1 ou 2.	Obtenir une intégrale première d'une équation de Newton $x'' = f(x)$ et l'exploiter graphiquement. Séparer les variables d'une équation du premier ordre à variables séparables. Faire le lien entre les conditions initiales et le graphe de la solution correspondante.
3. Fonctions	
Fonctions usuelles.	Exponentielle, logarithme népérien et décimal, cosinus, sinus, tangente, puissance réelle ($x \rightarrow x^a$).
Dérivée. Notation dx/dt .	Utiliser la formule de Taylor à l'ordre un ou deux ; interpréter graphiquement.
Développements limités.	Connaître et utiliser les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $(1+x)^a$, e^x et $\ln(1+x)$, et à l'ordre 2 des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
Primitive et intégrale.	Interpréter l'intégrale comme une somme de contributions infinitésimales, en lien avec la méthode des rectangles en mathématiques.
Valeur moyenne.	Exprimer la valeur moyenne sous forme d'une intégrale. Connaître la valeur moyenne sur une période des fonctions $\cos$, $\sin$, $\cos^2$ et $\sin^2$.
Représentation graphique d'une fonction.	Déterminer un comportement asymptotique ; rechercher un extremum local. Utiliser des échelles logarithmiques ; identifier un loi de puissance à une droite en échelle log-log.
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique.	Utiliser un développement en série de Fourier fourni par un formulaire.

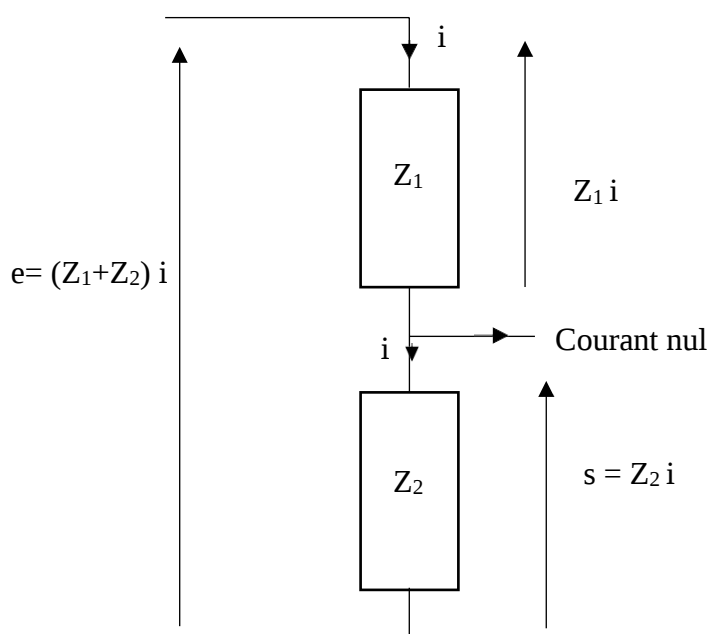
5. Trigonométrie	
Angle orienté.	Définir une convention d'orientation des angles d'un plan (euclidien) et lire des angles orientés. Relier l'orientation d'un axe de rotation à l'orientation positive des angles d'un plan perpendiculaire à cet axe.
Fonctions cosinus, sinus et tangente.	Utiliser le cercle trigonométrique et l'interprétation géométrique des fonctions cosinus, sinus et tangente comme aide-mémoire : relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, relations entre fonctions trigonométriques et toutes relations du type $\cos(\pi \pm x)$ et $\cos(\pi/2 \pm x)$, parités, périodicité, valeurs des fonctions pour les angles usuels. Citer les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus ; utiliser un formulaire dans les autres cas.
Nombres complexes et représentation dans le plan. Somme et produit de nombres complexes.	Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument d'un nombre complexe.

Domaines numériques	Capacités exigibles
1. Outils graphiques	
Représentation graphique d'un nuage de points.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour représenter un nuage de points.
Représentation graphique d'une fonction.	Utiliser les fonctions de base de la bibliothèque matplotlib pour tracer la courbe représentative d'une fonction.
4. Équations différentielles	
Équations différentielles d'ordre 1.	Mettre en œuvre la méthode d'Euler explicite afin de résoudre une équation différentielle d'ordre 1.
Équations différentielles d'ordre supérieur ou égal à 2	Transformer une équation différentielle d'ordre n en un système différentiel de n équations d'ordre 1. Utiliser la fonction odeint de la bibliothèque scipy.integrate (sa spécification étant fournie).

ANNEXES

<u>Annexe 1 : démonstration du diviseur de tension</u>	Page 7
<u>Annexe 2 : impédance complexe d'un condensateur</u>	Page 8
<u>Annexe 3 : impédance complexe d'une bobine</u>	Page 9
<u>Annexe 4 : détermination à priori de la nature d'un filtre</u>	Page 10
<u>Annexe 5 : Mesure de déphasage en double trace</u>	Page 11
<u>Annexe 6 : Diagramme de Bode</u>	Page 12
<u>1. Définition</u>	Page 12
<u>2. Etude de la fonction de transfert du passe bas d'ordre 1</u>	Page 13
<u>3. Tracé du diagramme</u>	Page 13
<u>4. Utilisation de la fonction de transfert pour déterminer s(t)</u>	Page 14
<u>Fichier python :</u> Action ordre 1 sur signal sinusoïdal Bode Spectre.py	
<u>5. Passe bande, ordre 2</u>	Page 15
<u>6. Définitions des fréquences de coupure et de la bande passante</u>	Page 16
<u>Annexe 7 : Formes canoniques des fonctions de transfert du 1^{er} et 2^e ordre</u>	Page 17
<u>Fichiers python :</u> diag Bode ordre 1 universel.py ; diag Bode ordre 2 universel.py	
<u>Annexe 8 : Caractères intégrateur et dérivateur d'un filtre en dehors de la bande passante</u>	Page 19
<u>Annexe 9 : Critères de linéarité</u>	Page 20
<u>Annexe 10 : Décomposition spectrale</u>	Page 21
<u>Fichiers python :</u> Action ordre 1 sur spectre carre Bode.py ; Action ordre 2 sur spectre carre Bode.py	
<u>Annexe 11 : Tracé expérimental du spectre de Fourier d'un signal</u>	Page 24

Annexe 1 : démonstration du diviseur de tension :



$s = Z_2 i$ et $e = Z_1 i + Z_2 i$ car Z_1 et Z_2 sont en série donc parcourues par le même courant, donc

$$\frac{s}{e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1} = \frac{1}{Z_1 Y_2 + 1}$$

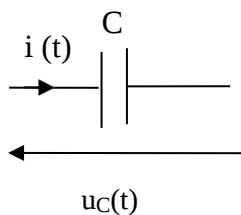
où $Y = 1/Z$ est l'admittance complexe.

Pour une association RC série (exemple 1)
 $Z_1 = R$ et $Z_2 = \frac{1}{jC\omega}$ impédance complexe d'un condensateur donc $Y_2 = jC\omega$

Pour une association RLC série (exemple 2)
 $Z_1 = R + jL\omega$ et $Z_2 = \frac{1}{jC\omega}$

Annexe 2 : impédance complexe d'un condensateur :

Cette grandeur se retrouve à partir de la relation temporelle entre la tension et l'intensité aux bornes d'un condensateur en convention récepteur :



$u_C(t) = q / C$ et $i(t) = dq / dt$; q est la charge portée par l'armature du condensateur où arrive le courant (l'autre armature porte la charge $-q$) donc

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

En régime stationnaire, c'est à dire à fréquence nulle $i(t) = 0$, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

En régime sinusoïdal forcé, comme le condensateur est un dipôle linéaire la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$ est valable en complexe :

$$\underline{i(t)} = C \frac{d\underline{u_C(t)}}{dt} \text{ avec } \underline{i(t)} = \underline{I} e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u_C(t)} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

$\underline{I}$ et $\underline{U}$ sont des amplitudes complexes qui ne dépendent que de ω la pulsation du générateur utilisé pour alimenter le circuit $\frac{d\underline{u_C(t)}}{dt} = j\omega \underline{u_C(t)}$

Dériver $\underline{u_C(t)}$ par rapport au temps revient à multiplier $\underline{u_C(t)}$ par $j\omega$, d'où $\underline{i(t)} = Cj\omega \underline{u_C(t)}$

Par définition, l'impédance complexe est

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u_C(t)}}{\underline{i(t)}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{jC\omega}$$

$\underline{Z} = \frac{-j}{C\omega}$ est un imaginaire pur négatif

Donc $\arg(\underline{Z}) = -\pi/2$

Donc $u_C(t)$ est en retard (signe -) de $\pi/2$ par rapport à $i(t)$.

$u_C(t)$ est en quadrature retard par rapport à $i(t)$.

Si $i(t) = I_M \cos(\omega t)$ alors $\underline{I} = I_M$ et $u_C(t) = |\underline{Z}| I_M \cos(\omega t - \pi/2)$ avec $|\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$ d'où $u_C(t) = \frac{1}{C\omega} I_M \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{1}{C\omega} I_M \sin(\omega t)$

$\underline{Y} = \frac{\underline{i(t)}}{\underline{u_C(t)}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = jC\omega$ est un imaginaire pur positif

Donc $\arg(\underline{Y}) = +\pi/2$

Donc $i(t)$ est en avance (signe +) de $\pi/2$ par rapport à $u_C(t)$.

$i(t)$ est en quadrature avance par rapport à $u_C(t)$.

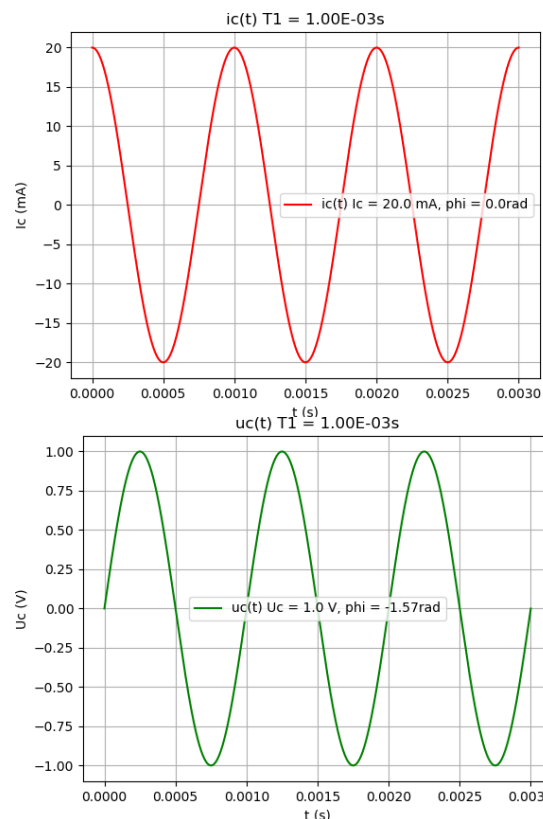
Si $u_C(t) = U_M \cos(\omega t)$ alors

$$i(t) = \frac{U_M}{|\underline{Z}|} \cos(\omega t + \pi/2) = C\omega U_M \cos(\omega t + \pi/2) = -C\omega U_M \sin(\omega t)$$

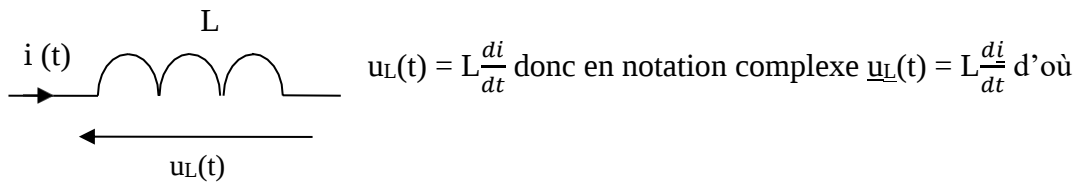
A très haute fréquence $\underline{Z} \rightarrow 0$, donc $\underline{u_C(t)} \rightarrow 0$, le condensateur est équivalent à un fil.

Les graphes $i_C(t)$ et $u_C(t)$ sont tracés en concordance de temps.

(On ne peut pas mettre $i_C(t)$ et $u_C(t)$ sur le même graphe car ces deux grandeurs ne sont pas homogènes)



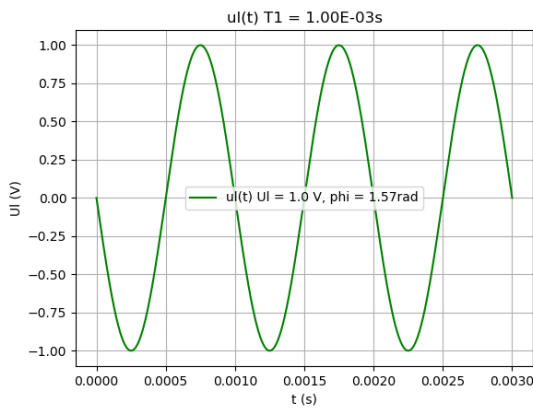
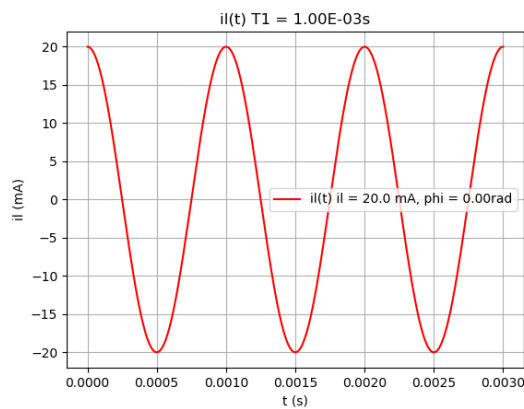
Annexe 3 : impédance complexe d'une bobine :



$$\underline{Z} = \frac{\underline{u_L(t)}}{\underline{i(t)}} = \frac{U}{I} = jL\omega$$

comme $\underline{Z}$ est un imaginaire pur positif $u_L(t)$ est en quadrature avance sur $i(t)$

Tracé en concordance de temps $u_L(t)$ et $i(t)$



En régime stationnaire, c'est à dire à fréquence nulle $u_L(t) = 0$, la bobine est équivalente à un interrupteur fermé.

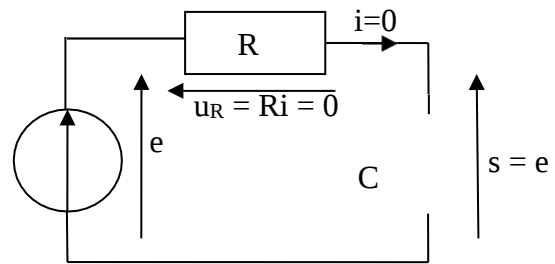
A très haute fréquence $\underline{Z} \rightarrow \infty$, donc $\underline{i(t)} \rightarrow 0$, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

Annexe 4 : détermination à priori de la nature d'un filtre :

Retour exemple 1 :

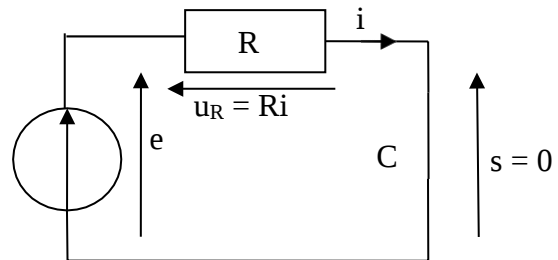
A basse fréquence le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, le circuit équivalent est :

La loi des mailles est valable à chaque instant donc $e(t) = u_R(t) + s(t) = s(t)$.
Les signaux basses fréquences passent.



A haute fréquence le condensateur est équivalent à un fil, le circuit équivalent est :

La tension aux bornes d'un fil étant toujours nulle $s(t) = 0$ quelle que soit la valeur de $e(t)$.
Les signaux hautes fréquences sont coupés.



Un filtre qui laisse passer les signaux de basse fréquence et coupe les signaux de haute fréquence est appelé un **filtre passe-bas**.

Justifier par la même méthode que le filtre RLC série, la sortie aux bornes de R est un filtre passe-bande

Annexe 5 : Mesure de déphasage en double trace

On considère deux tensions sinusoïdales de même fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$u_1 = U_1 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ et } u_2 = U_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2) .$$

La grandeur sans dimension $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est l'avance de phase de u_2 sur u_1 (déphasage de u_2 par rapport à u_1).

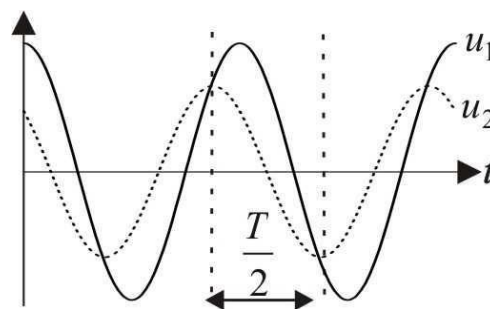
Pour $0 < \varphi < 180^\circ$ ($0 < \varphi < \pi$) : u_2 est en avance sur u_1 .

Pour $-180^\circ < \varphi < 0$ ($-\pi < \varphi < 0$) : u_2 est en retard sur u_1 .

Pour $\varphi = 0$ les deux signaux sont en phase.

Pour $\varphi = 180^\circ$ ($\varphi = \pi$) les deux signaux sont en opposition de phase.

Pour $\varphi = \pm 90^\circ$ ($\varphi = \pm \pi/2$) les deux signaux sont en quadrature de phase. Sur le schéma u_2 est en avance sur u_1 puisque sur une demi-période u_2 passe par un maximum **avant** u_1 .



Représenter à l'oscilloscope les signaux $e(t)$ et $u(t)$ en double trace.

Se placer en mode AC pour les deux voies de manière à bien avoir des signaux symétriques.

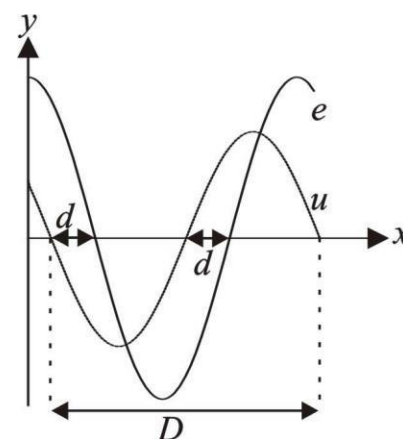
Mesurer la distance d à l'écran entre les passages consécutifs par $y = 0$ pour $u(t)$ et $e(t)$ par valeurs croissantes (ou décroissantes) ainsi que la distance D à l'écran correspondant à une période.

Si Δt est la durée correspondante à d , on a $\frac{\Delta t}{T} = \frac{d}{D}$

Si φ est l'avance de phase de $u(t)$ sur $e(t)$, on a :

$$e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

$$\text{et } u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \bar{U} \cos[\omega(t + \frac{\varphi}{\omega})] = U\sqrt{2} \cos[\omega(t + \Delta t)]$$



$$\text{donc } \varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 2\pi \frac{d}{D} \text{ (en radian) ou } \varphi = 360 \frac{d}{D} \text{ (en degré)}$$

Variante : méthode des 9 carreaux.

Toujours en double trace, choisir les sensibilités verticales permettant d'observer les signaux les plus amples possibles.

Choisir la vitesse de balayage permettant d'observer au moins une demi-période de u_1 , régler alors en la décalibrant la base de temps pour que cette demi-période corresponde à 9 cm exactement. $D = 2 \times 9$ cm. Mesurer la distance d (en cm) séparant le passage de u_2 par sa valeur zéro, et celui de u_1 , avec une pente de même signe lors de ces passages par zéro.

$$\text{D'où } \varphi = 360 \frac{d}{2 \times 9} = 20 \cdot d \text{ (en degré).}$$

Si la mesure s'avère impossible (déphasage négatif), on peut introduire un déphasage supplémentaire de 180° en inversant la voie II.

Pour mesurer de faibles déphasages, on peut utiliser pour la base de temps l'expansion $\times 10$ 1cm représente alors 2° .

Annexe 6 : Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode est le tracé du gain en décibel $G_{dB}(\omega/\omega_0)$ et de la phase $\varphi(\omega/\omega_0)$ d'une fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ en fonction du logarithme décimal de ω/ω_0 afin de déterminer l'amplitude S de $s(t)$ et la phase φ de $s(t)$ connaissant l'amplitude E et la pulsation ω de $e(t)$.

1. Définition

Deux graphes à tracer : $G_{dB}(\omega/\omega_0) = f(\log(\omega/\omega_0))$ et $\varphi(\omega/\omega_0) = g(\log(\omega/\omega_0))$.

ω_0 est une pulsation caractéristique du circuit.

Pour un filtre passe-haut ou passe-bas, ce sera la pulsation de coupure, pour un filtre passe- ce sera la pulsation de résonance, on pourra aussi prendre $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$.

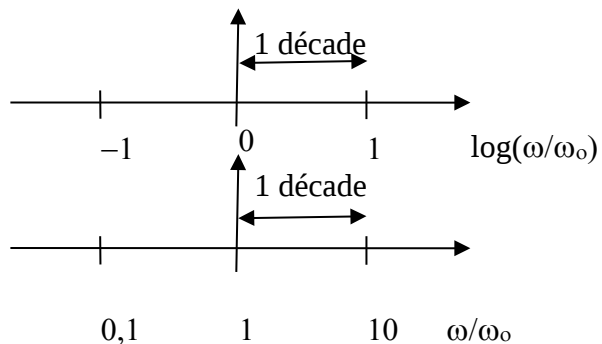
Remarque sur l'abscisse :

Pour un diagramme théorique on peut choisir $\log(\omega/\omega_0)$: la graduation sera alors linéaire

Ou ω/ω_0 : la graduation sera alors logarithmique

Pour un diagramme expérimental on choisira f/f_0

utilisera une graduation logarithmique de l'abscisse. On prendra $f_0 = 1 \text{ Hz}$



et on

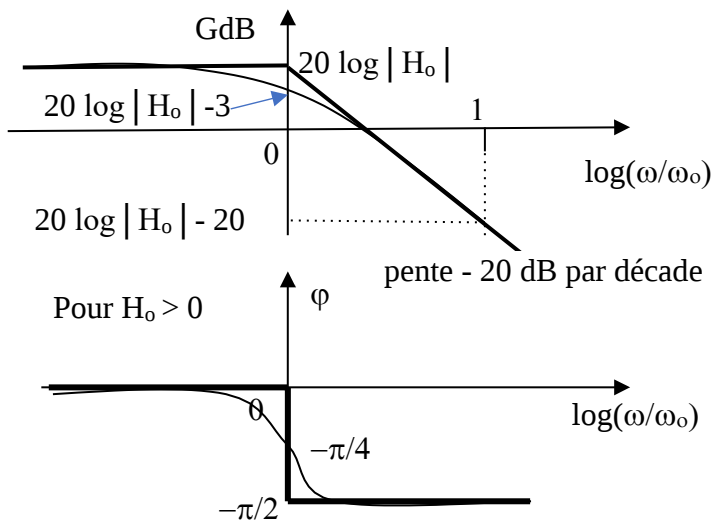
On s'intéresse au diagramme asymptotique, à partir duquel on détermine l'allure du diagramme réel. Pour cela il suffit de connaître la fonction de **transfert complexe équivalente** pour seulement trois valeurs de pulsations : $\omega \gg \omega_0$; $\omega = \omega_0$; $\omega \ll \omega_0$

On déterminera l'expression du gain et de la phase **uniquement à partir de la fonction de transfert COMPLEXE équivalente.**

2. Etude de la fonction de transfert du passe bas d'ordre 1 $H = \frac{H_o}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}$

	Basse fréquence $\omega \rightarrow 0$	Haute fréquence $\omega \rightarrow \infty$
Fonction de transfert équivalente $\underline{H}$	H_o	$\frac{H_o}{j\frac{\omega}{\omega_o}}$
$G = \underline{H} $	$ H_o $	$\frac{ H_o }{\frac{\omega}{\omega_o}}$
$G_{dB} = 20\log G$	$20\log H_o $	$20\log H_o - 20\log(\omega/\omega_o)$
$\varphi = \arg \underline{H}$	0 si $H_o > 0$ e et s en phase π si $H_o < 0$ e et s en opposition de phase	$H_o > 0$; $-\pi/2$ s en quadrature retard sur e $H_o < 0$; $\pi - \pi/2 = \pi/2$ s en quadrature avance sur e
intersection des asymptotes $\omega = \omega_o$ $G_{dB} = 20\log H_o $	$[0 ; \omega_o]$	$[\omega_o ; \infty[$
$\log(\omega/\omega_o)$	$\omega < \omega_o$ négatif	$\omega > \omega_o$ positif

2. Tracé du diagramme asymptotique, en gras :



Tracé du diagramme réel : il suffit de

rechercher $\underline{H}(\omega=\omega_o) = \frac{H_o}{1+j}$

Donc $G(\omega=\omega_o) = \frac{H_o}{\sqrt{2}}$

soit $G_{dB}(\omega=\omega_o) = 20\log |H_o| - 3$

$\varphi(\omega=\omega_o) = -\pi/4$ si $H_o > 0$

$\varphi(\omega=\omega_o) = \pi/4$ si $H_o < 0$

Et faire passer le diagramme réel par ces points.

3. Utilisation de la fonction de transfert pour déterminer $s(t) = S \cdot \cos(\omega t + \varphi)$:

Dans l'approximation basse fréquence $\omega \ll \omega_0$: $\underline{S} = H_0 \cdot E$ donc $S = H_0 E = E$ si $H_0 = 1$ et $\varphi = 0$

Donc $s(t) = E \cdot \cos(\omega t) = e(t)$.

Dans l'approximation haute fréquence $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{S} = \frac{H_0}{j \frac{\omega}{\omega_0}} \cdot E \text{ donc } S = \frac{H_0}{\frac{\omega}{\omega_0}} \cdot E \text{ et } \varphi = -\pi/2$$

Donc, pour $H_0 = 1$,

$$s(t) = \frac{\omega_0}{\omega} E \cdot \cos(\omega t - \pi/2) \text{ avec } \frac{\omega_0}{\omega} \ll 1,$$

le signal de sortie est atténué, en quadrature de phase retard car le déphasage est négatif.

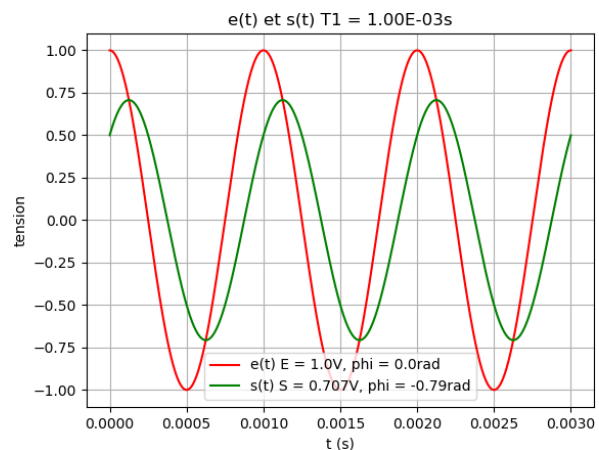
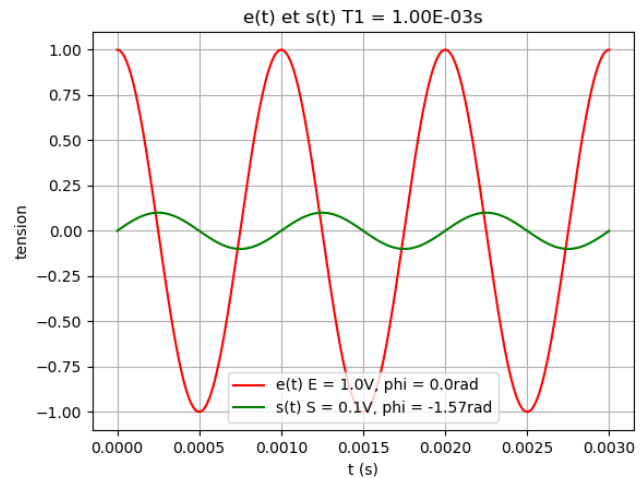
Lorsque deux sinusoïdes sont en **quadrature**, le maximum de l'une correspond au zéro de l'autre.

La 1^{ère} sinusoïde qui atteint son maximum est **en avance** par rapport à l'autre.

Pour $\omega = \omega_0$ $S = \frac{E}{\sqrt{2}}$ et $\varphi = -\pi/4$ donc pour $H_0 = 1$

$$s(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \pi/4)$$

La sortie est en retard de $\pi/4$ par rapport à l'entrée.



Fichier python : Action ordre 1 sur signal sinusoïdal Bode Spectre.py

4. Passe bande :

La forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_o}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right)}$$

H_o est un réel.

Pour trouver la fonction de transfert équivalente, on ne conserve que le terme le plus grand du dénominateur :

	Basse fréquence $\omega \rightarrow 0$	Haute fréquence $\omega \rightarrow \infty$
Fonction de transfert équivalente $\underline{H}$	$\frac{H_o}{-jQ \frac{\omega_o}{\omega}}$	$\frac{H_o}{jQ \frac{\omega}{\omega_o}}$
$G = \underline{H} $	$\frac{ H_o }{Q \frac{\omega_o}{\omega}}$	$\frac{ H_o }{Q \frac{\omega}{\omega_o}}$
$G_{dB} = 20\log G$	$20\log(H_o /Q) - 20\log(\frac{\omega_o}{\omega})$ $= 20\log(H_o /Q) + 20\log(\frac{\omega}{\omega_o})$	$20\log(H_o /Q) - 20\log(\frac{\omega}{\omega_o})$
$\varphi = \arg \underline{H}$	$\pi/2$ si $H_o > 0$ s est en quadrature avance sur e $\pi + \pi/2 = 3\pi/2$ si $H_o < 0$	$H_o > 0$; $-\pi/2$ s est en quadrature retard sur e $H_o < 0$; $\pi - \pi/2 = \pi/2$ s est en quadrature avance sur e
intersection des asymptotes $\omega = \omega_o$; $G_{dB} = 20\log(H_o /Q)$	$[0 ; \omega_o]$	$[\omega_o ; \infty[$
$\log(\omega/\omega_o)$	$\omega < \omega_o$ négatif	$\omega > \omega_o$ positif

On trace alors le diagramme asymptotique, en gras :

intersection des asymptotes $\omega = \omega_o$;
 $G_{dB} = 20\log(|H_o|/Q)$

Tracé du diagramme réel : il suffit de rechercher

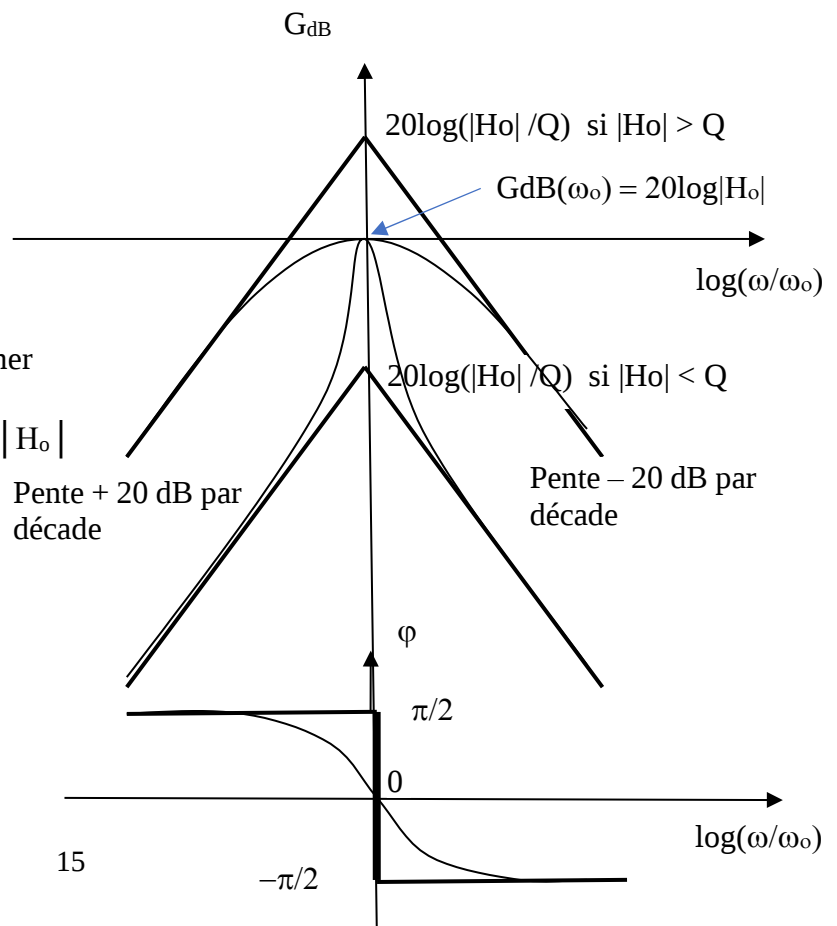
$$\underline{H}(\omega = \omega_o) = H_o$$

$$\text{Donc } G(\omega = \omega_o) = |H_o| \text{ soit } G_{dB}(\omega = \omega_o) = 20\log |H_o|$$

$$\varphi(\omega = \omega_o) = 0 \text{ si } H_o > 0$$

$$\varphi(\omega = \omega_o) = \pi \text{ si } H_o < 0$$

Et faire passer le diagramme réel par ces points.



6. Définitions des fréquences de coupure et de la bande passante

Pulsations de coupure

Il existe deux définitions équivalentes dont l'utilisation dépend de la situation dans laquelle on se trouve.

1^{ère} situation : Le diagramme de Bode du filtre est tracé, les pulsations de coupure, en général à -3dB sont définies par $G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dBmax}} - 3$

G_{dBmax} est la valeur maximale du gain en décibel lue sur le graphique, qui n'est pas forcément nulle.

2^{ème} situation : On connaît la fonction de transfert et sa valeur maximale G_{max} , alors $G(\omega_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$.

Remarque : $G_{\text{dB}}(\omega_c) = 20\log G(\omega_c) = 20\log G_{\text{max}} - 20\log\sqrt{2} \approx G_{\text{dBmax}} - 3$

Exemple 2 : passe-bande, RLC série, sortie aux bornes de R $H(j\omega) = \frac{H_o}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$

$G_{\text{max}} = H_o$ pour $\omega = \omega_o$ $H(\omega_c) = \frac{H_o}{\sqrt{2}} = \frac{H_o}{\sqrt{1+\left(Q\left(\frac{\omega_c}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_c}\right)\right)^2}}$ par identification on en déduit que ω_c est

solution de l'équation bicarrée suivante : $Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_c}\right)^2 = 1$ soit $Q \left(\frac{\omega_c}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_c}\right) = \pm 1$
 $\omega_c^2 \pm \frac{\omega_o}{Q} \omega_c - \omega_o^2 = 0$

Equation du second degré en ω_c dont vous vérifierez que les seules racines qui conviennent car $\omega_c > 0$ sont

$$\omega_{c1} = \omega_o \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right) \text{ et } \omega_{c2} = \omega_o \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \right)$$

Exemple 1 : passe-bas ordre 1, RC série, sortie aux bornes de C $H(j\omega) = \frac{H_o}{1+j\frac{\omega}{\omega_o}}$

$G_{\text{max}} = H_o$ pour $\omega = 0$ $H(\omega_c) = \frac{H_o}{\sqrt{2}} = \frac{H_o}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_o}\right)^2}}$ donc $\omega_c = \omega_o$

Bande passante

Il s'agit de l'intervalle de fréquences ou de pulsation tel que $H(\omega)$ soit compris entre $H(\omega_c)$ et H_{max}

Exemple 2 : passe-bande, RLC série, sortie aux bornes de R

Bande passante $[\omega_{c1} ; \omega_{c2}]$

Largeur de la bande passante : $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \omega_o / Q$

C'est cette expression qui permet de définir le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}$

Plus la résonance est aigue, plus le facteur de qualité est grand et la bande passante étroite.

Plus la résonance est floue, plus le facteur de qualité est petit et la bande passante large.

Exemple 1 : passe-bas ordre 1, RC série, sortie aux bornes de C

Pour ce filtre, la bande passante est l'intervalle $[0 ; \omega_c]$

Annexe 7 : Formes canoniques des fonctions de transfert du 1^{er} et 2^e ordre $x = \omega/\omega_0$

Il est intéressant de noter le comportement asymptotique du module du gain en décibels lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini. Il est habituel de l'exprimer en dB/décade : par exemple, si le comportement vers les hautes fréquences est en $1/x$ (passe-bas du premier ordre) ou en $1/x^2$ (passe-bas du 2^e ordre), la transmittance est divisée par 10 ou par 100 lorsque la fréquence est multipliée par 10. Cela correspond respectivement à -20 dB/décade ou -40 dB/décade. Sur le diagramme de Bode représenté en coordonnées semi-logarithmiques [$\log(f)$ en abscisse, G_{dB} en ordonnées], les asymptotes sont des droites décroissantes.

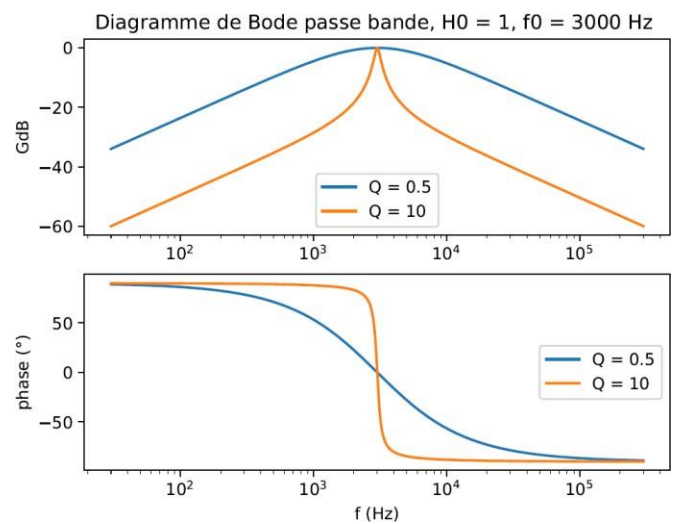
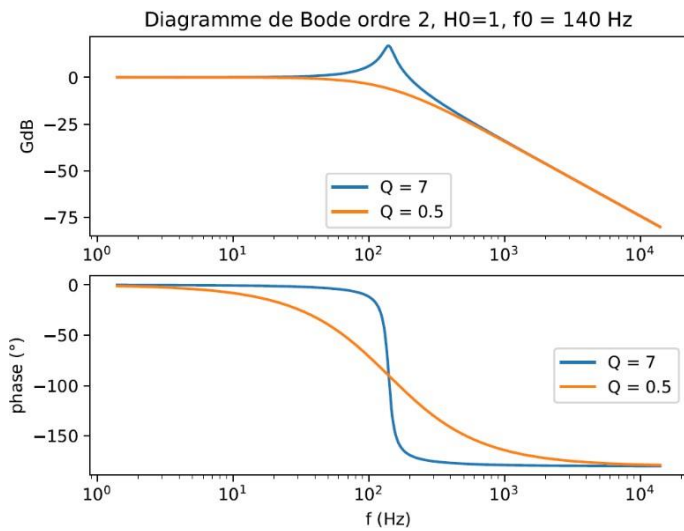
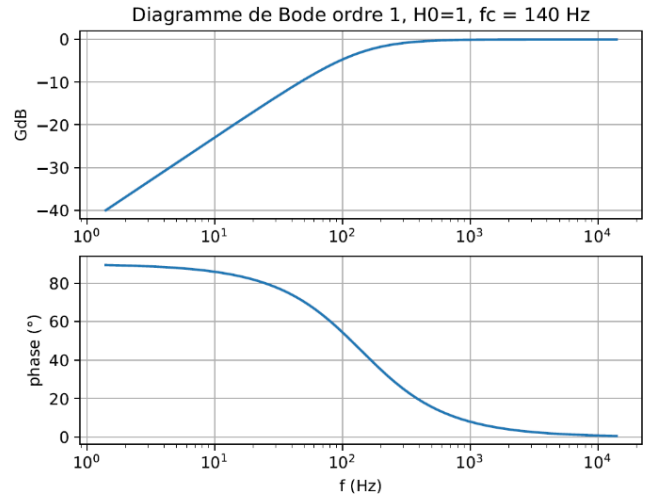
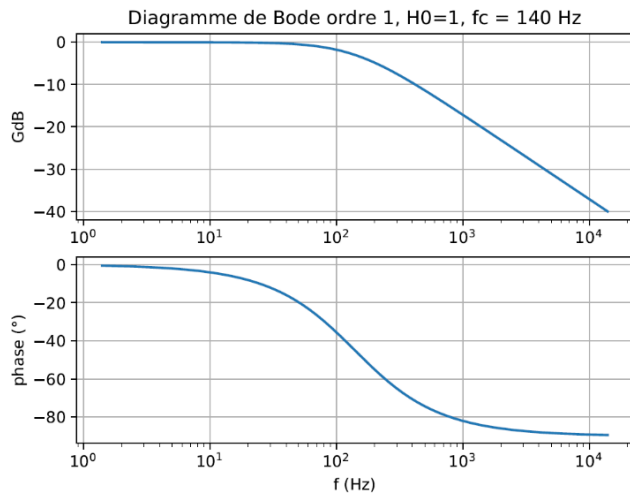
Fonction de transfert	montage	propriétés
$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$ Déphasage de $\pi/2$ entre HF et BF	Passe-bas du 1 ^{er} ordre : RC	Asymptote haute fréquence en -20 dB/décade Asymptote basse fréquence horizontale
$\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$ Déphasage de $\pi/2$ entre HF et BF	Passe-haut du 1 ^{er} ordre : CR	Asymptote basse fréquence en $+20$ dB/décade Asymptote haute fréquence horizontale
$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$ Déphasage de π entre HF et BF	Passe-bas du 2 ^e ordre : RLC	Asymptote haute fréquence en -40 dB/décade Asymptote basse fréquence horizontale
Non exigible $\underline{H} = \frac{H_0(jx)^2}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$ Déphasage de π entre HF et BF	Passe-haut du 2 ^e ordre : RCL	Asymptote basse fréquence en $+40$ dB/décade Asymptote haute fréquence horizontale
$\underline{H} = \frac{H_0 j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ Déphasage de π entre HF et BF	Passe-bande du 2 ^e ordre : LCR Q : facteur de qualité	Asymptotes basse et haute fréquence en ± 20 dB/décade
Non exigible $\underline{H} = \frac{H_0(1 + (jx)^2)}{1 + j\frac{x}{Q} + (jx)^2}$ Déphasage de π entre HF et BF	Réjecteur de bande	Asymptotes basse et haute fréquences horizontales

Remarques : Cette liste ne contient pas toutes les tractions rationnelles possibles. En particulier les fonctions $\frac{1-jx}{1+jx}$ et $\frac{1-j2x+(jx)^2}{1+j2x+(jx)^2}$ introduisent seulement un déphasage du signal de sortie par rapport à l'entrée.

Tracé des diagrammes de Bode. fichiers python :

diag Bode ordre 1 universel.py

diag Bode ordre 2 universel.py



Annexe 8 : Caractères intégrateur et dérivateur d'un filtre en dehors de la bande passante :

Passe-bas d'ordre 1 :

En dehors de la bande passante, pour $\omega \gg \omega_c$, la pente du diagramme de Bode est de -20 dB/décade.

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \approx \frac{H_o}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ donc } \underline{S} = \frac{H_o}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \underline{E}$$

En repassant à la notation réelle $s(t) = H_o \cdot \omega_c \cdot \int e(t) \cdot dt$ car diviser par $j\omega$ est équivalent à intégrer par rapport au temps.

On dira que le filtre est **intégrateur en dehors de la bande passante**.

Montrer que le passe-bas d'ordre 2 est un double intégrateur en dehors de sa bande passante.

Passe-haut d'ordre 1 :

En dehors de la bande passante, pour $\omega \ll \omega_c$, la pente du diagramme de Bode est de -20 dB/décade.

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \approx \frac{H_o j \frac{\omega}{\omega_c}}{1} \text{ donc } \underline{S} = H_o j \frac{\omega}{\omega_c} \underline{E}$$

En repassant à la notation réelle $s(t) = H_o \cdot \frac{\omega}{\omega_c} \frac{de}{dt}$ car multiplier par $j\omega$ est équivalent à dériver par rapport au temps.

On dira que le filtre est **dérivateur en dehors de la bande passante**.

Montrer que le passe-haut d'ordre 2 est un double dérivateur en dehors de sa bande passante.

Montrer que le passe-bande est dérivateur pour les fréquences inférieures à sa plus petite fréquence de coupure et intégrateur pour les fréquences supérieures à sa plus grande fréquence de coupure.

Annexe 9 : Critères de linéarité :

a) Composition du système :

Un système linéaire est composé d'éléments qui le sont eux-mêmes.

En électricité les dipôles idéaux suivants sont linéaires :

- * sources de tension ou de courant libres ou liées avec un coefficient de proportionnalité constant ;
- * Résistor: $u(t) = Ri(t)$;
- * Condensateur: $q = Cu$ donne $i(t) = C \cdot du/dt$;
- * Bobine: $u = L \cdot di/dt$

b) Réponse à une excitation sinusoïdale :

Pour un système linéaire de transfert $H(j\omega)$ attaqué par un signal d'entrée : $e(t) = E \cdot \cos(\omega t)$,

le signal de sortie s'écrit : $s(t) = G(\omega) \cdot E \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))$.

Critère de linéarité : si $e(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, alors $s(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de même fréquence.

c) Aspect spectral :

Contrairement à un système linéaire, un système non-linéaire enrichit le spectre d'un signal sinusoïdal pur en faisant apparaître, en plus de la pulsation ω du signal d'entrée, des harmoniques de pulsation 2ω , 3ω , etc...

On a alors $s(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$

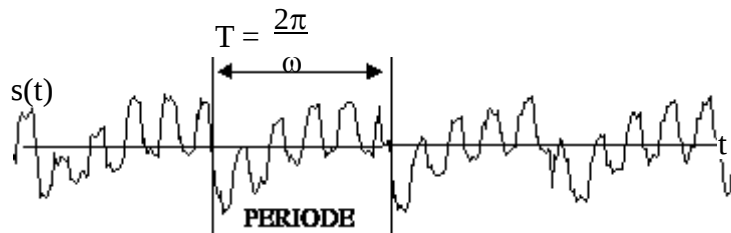
L'analyse spectrale de $s(t)$ permet donc de caractériser la non-linéarité par l'apparition de composantes spectrales dans le signal de sortie, absentes dans le signal d'entrée.

Remarque : il existe d'autres définitions équivalentes.

Exemple d'opérations non-linéaires : redressement par diodes, multiplication de signaux.

Annexe 10 : Décomposition spectrale

Le signal périodique non sinusoïdal :



a) Théorème

Toute fonction périodique $s(t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, définie sur $\mathbb{R}$, ne présentant par période qu'un nombre fini de discontinuités, est égale à la somme d'une série trigonométrique appelée **série de Fourier**:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)].$$

a_n et b_n sont les **coefficients de Fourier** que l'on peut calculer à partir de la donnée de $s(t)$.

Les différents termes de pulsation ω , 2ω , etc, sont appelés **harmoniques** de rang 1, 2, etc.

L'**harmonique de rang 1** est le **fondamental** du signal. $s_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t)$

$s_n(t)$ est l'harmonique de rang n , sa pulsation vaut n fois celle du fondamental.

$$s_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

b) Propriétés :

- Montrer que la valeur moyenne de $s_n(t)$ est nulle. En déduire la valeur moyenne de $s(t)$ ainsi que la définition de a_0 .

- Justifier que si $s(t)$ est une fonction **paire** : $b_n = 0$ pour tout n

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

- Justifier que si $s(t)$ est une fonction **impaire** : $a_n = 0$ pour tout n et $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$.

- Montrer que $s_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$, avec: $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$.

c_n est l'**amplitude** de l'harmonique de rang n et φ_n sa **phase** à l'origine des dates.

On a alors : $s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$.

- Pour un signal physique : $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

• **Formule de Parseval**

On a souvent besoin de la moyenne quadratique S_e d'une grandeur $s(t)$, définie par : $S_e^2 = \langle s(t)^2 \rangle$. S_e est la **valeur efficace** de la grandeur $s(t)$ (tension, intensité, ..).

La formule de Parseval donne $S_e^2 = \langle s(t)^2 \rangle = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$

Remarque : Ceci peut servir à calculer une puissance moyenne reçue par une impédance $\underline{Z} = R + jX$. En effet $P_{\text{moy}} = R I_e^2 (= U_e I_e \cos \varphi)$.

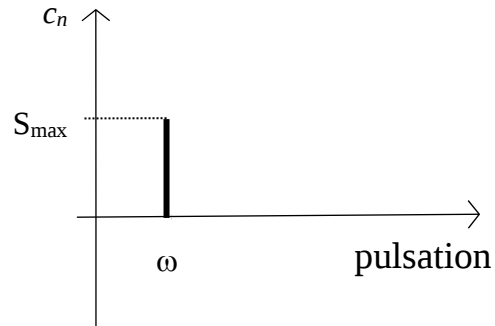
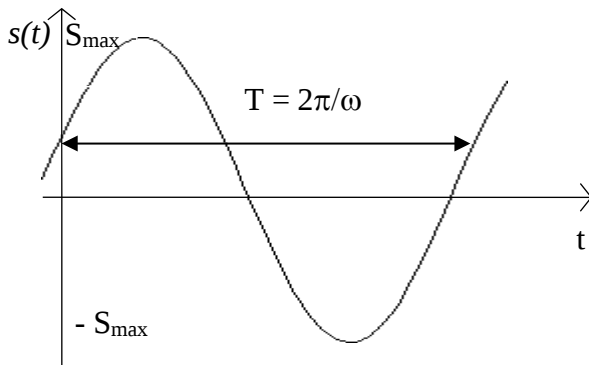
La puissance moyenne d'un signal est la somme des puissances moyennes de chacun des termes

c) Spectre de Fourier

- L'ensemble des c_n forme le **spectre de fréquence** du signal $s(t)$. C'est un diagramme en bâtons (spectre de « raies ») représentant les amplitudes c_n en fonction des pulsations $n\omega$, ou des fréquences nf .
- On peut, pour compléter l'étude, tracer les phases φ_n en fonction de n .

Signal sinusoïdal : Si $s(t) = S_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$

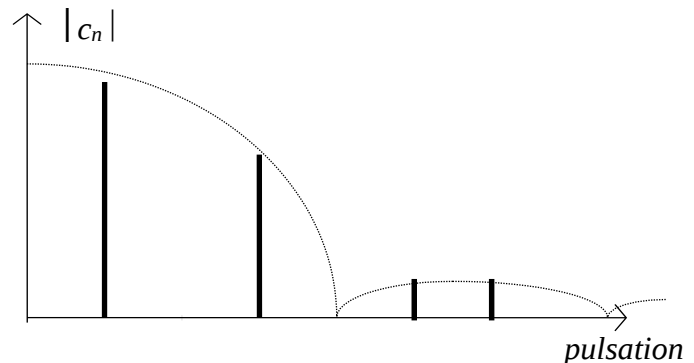
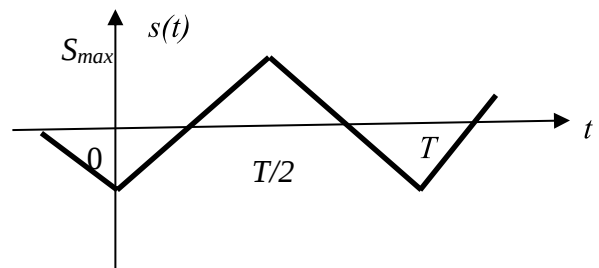
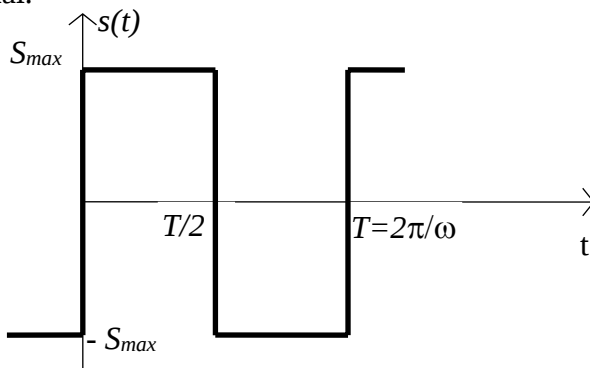
Que vaut a_0 ? c_1 ? $c_{n>1}$?



Créneaux symétriques : La fonction $s(t)$ est impaire : justifier $a_0=0$, $a_n=0$.

A l'aide de la définition de b_n on peut calculer $b_n = \frac{2S_{\max}}{n\pi} [1 - (-1)^n]$, $b_n = c_n$.

Ecrire explicitement le développement en série de Fourier pour $n \leq 5$. Tracer le spectre de Fourier de ce signal.

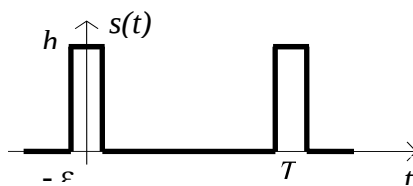


Dents de scie (primitive de la précédente)

Ecrire explicitement le développement en série de Fourier pour $n \leq 3$. Tracer le spectre de Fourier de ce signal.

Impulsion périodique : On

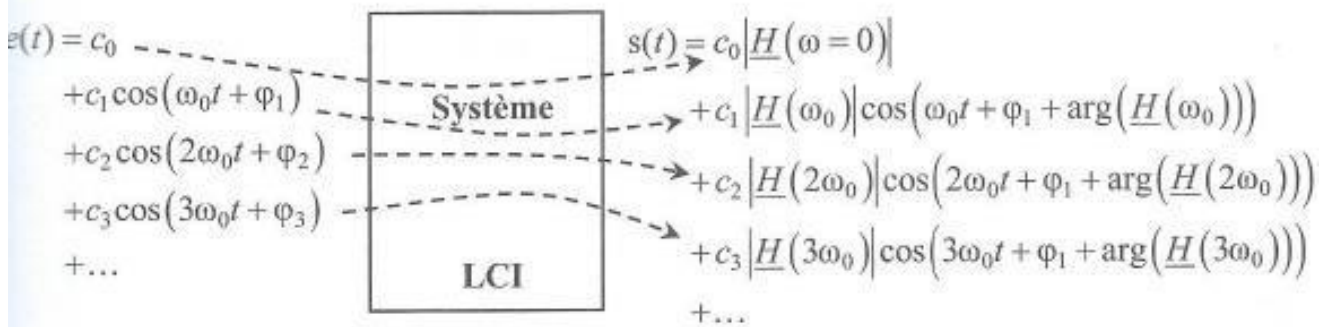
donne $c_n = \frac{2h\epsilon \sin(n\omega\epsilon)}{T n\omega\epsilon}$



Calculer a_0 et le représenter sur le spectre. Grader les axes des abscisses et des ordonnées du spectre

d) Détermination du signal de sortie et notion de filtrage :

La série de Fourier du signal de sortie $s(t)$ est la somme des réponses correspondant à chaque terme de la série $e(t)$



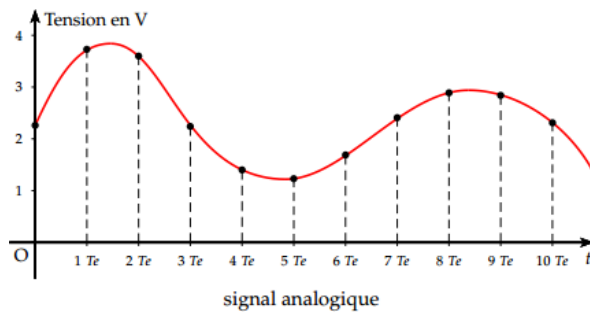
Fichiers python :

Action ordre 1 sur spectre carre Bode.py

Action ordre 2 sur spectre carre Bode.py

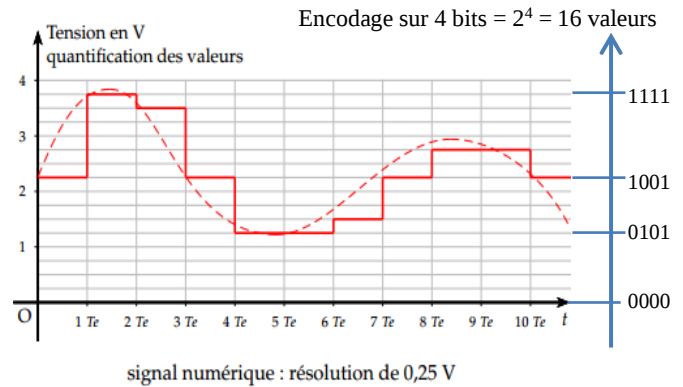
Annexe 11 : Tracé expérimental du spectre de Fourier d'un signal

- On utilise un logiciel de calcul numérique FFT (Fast Fourier Transform) qui calcule les coefficients de la série de Fourier à partir d'un signal numérique, puis trace en suite le spectre du signal en fonction de la fréquence.
- Si le signal initial est analogique, il doit tout d'abord être numérisé : échantillonné, quantifié, puis codé en nombre binaire par un Convertisseur Analogique Numérique (CAN)



T_e = période d'échantillonnage

$f_e = 1/T_e$ = fréquence d'échantillonnage



Plage d'un convertisseur = largeur du calibre utilisé (ici 4 V)

pas d'un convertisseur p de n bits

$p = \text{plage} / 2^n$

$$0,25 = 4 / 16 = 4 / 2^4$$

On a un convertisseur de 4 bits

Le **théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon** énonce que l'**échantillonnage d'un signal** exige une **fréquence d'échantillonnage** supérieure au double de la **fréquence** maximale présente dans ce signal.