

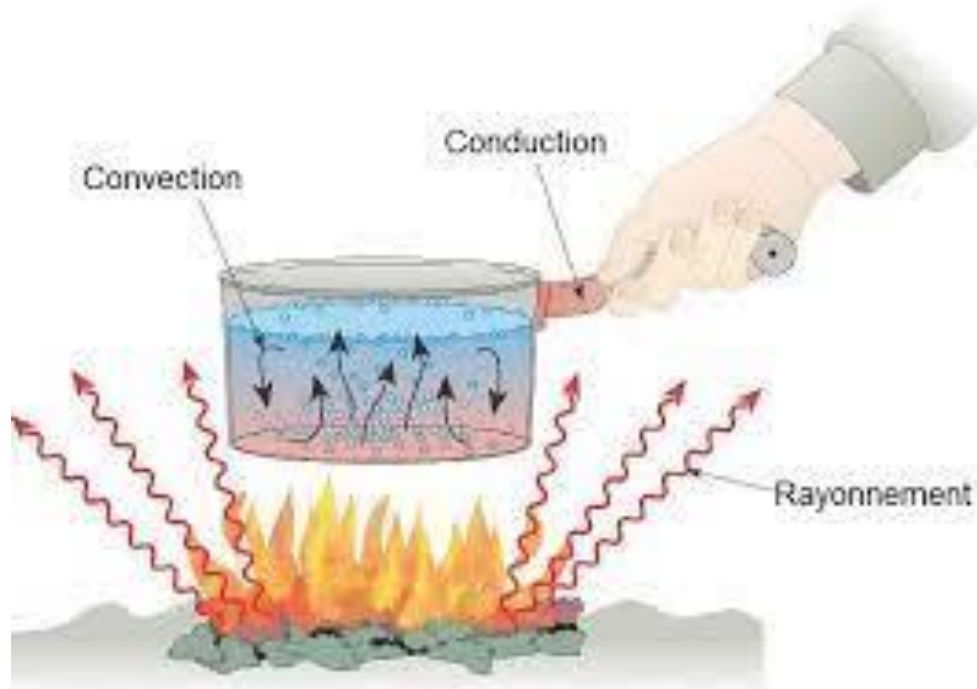
PHÉNOMENES DE TRANSPORT

Chapitre 1 : conduction thermique

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. 2. Transfert thermique par conduction	
2.2.2. Équation de la diffusion thermique	
Les différents modes de transfert thermique : diffusion, convection et rayonnement.	Décrire les 3 modes de transfert thermique
Flux thermique. Vecteur densité de courant thermique $\vec{J}_Q$.	Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\vec{J}_Q$ à travers une surface orientée.
Équilibre thermodynamique local.	Enoncer l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local. Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
Loi de Fourier.	Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Bilan d'énergie.	Etablir, pour un milieu évoluant à volume constant, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de diffusion thermique, avec ou sans terme source. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.
Conditions aux limites.	Exploiter la continuité du flux thermique. Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait. Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.
2.2.3. Régime stationnaire, ARQS	
Résistance ou conductance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique et énoncer les conditions d'application de l'analogie. Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement. Exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.

ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC.	Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
2.2.4. Ondes thermiques	
Relation de dispersion.	Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
Effet de peau thermique.	Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation. Établir une distance caractéristique d'atténuation.

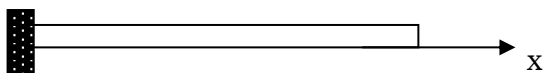
I. Modes de transfert thermique



1. Conduction ou diffusion thermique

Il s'agit d'un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile.

Soit une barre chauffée à son extrémité :



La chaleur se propage de proche en proche dans la barre.

La température de la barre dépend à priori de

l'abscisse x et du temps t , $T(x, t)$. La barre, qui présente une inhomogénéité de température, est un système hors équilibre thermodynamique. On va étudier l'évolution de ce système.

La conduction thermique s'effectue de proche en proche dans des régions où existent un gradient de température. La chaleur se propage des zones de température élevée vers les zones de faible de température.

Interprétation microscopique de la diffusion thermique :

Dans un métal, on interprète le phénomène de conduction thermique par une augmentation locale de l'agitation thermique des atomes par chauffage. Cette augmentation de l'agitation

thermique est transférée de proche en proche par un mécanisme faisant intervenir les électrons libres du métal. Les métaux, bons conducteurs d'électricité, sont aussi bons conducteurs de chaleur.

Les solides non métalliques (bois, verre...) sont des isolants électriques et thermiques, l'interprétation de la diffusion thermique dans ce cas est une théorie complexe qui nécessite l'utilisation de la mécanique quantique.

Les liquides et les gaz ont une conductivité thermique faible dont l'interprétation microscopique ressort du domaine de la physique statistique.

2. Convection

Il s'agit d'un transfert thermique avec un mouvement macroscopique d'un fluide hors équilibre.

Comme la masse volumique d'un gaz dépend de la température, ($\rho = \frac{m}{V} = \frac{Mn}{V} = \frac{PM}{RT}$ dans le modèle du gaz parfait), les gaz chauds sont moins denses que les gaz froids, ce qui explique les mouvements convectifs de l'air dans une pièce fermée, où l'air chaud a tendance à monter. Ainsi, à proximité d'un radiateur l'air chaud a tendance à monter et il est remplacé par de l'air froid. C'est ce mouvement convectif de l'air qui finira par uniformiser la température de la pièce.

La convection forcée est utilisée pour réchauffer ou refroidir des fluides, dans des échangeurs thermiques. Dans ce cas, on parle d'échanges conducto-convectifs, car il existe un phénomène de conduction à travers les parois de l'échangeur.

3. Rayonnement thermique

Le soleil émet un rayonnement électromagnétique, appelé rayonnement thermique qui ne nécessite pas de milieu matériel pour se propager. Tous les corps émettent un tel rayonnement.

L'étude du rayonnement thermique a occupé une place centrale dans l'évolution de la physique théorique.

La théorie du rayonnement électromagnétique élaborée formellement au cours du XIX^e Siècle par Maxwell, suppose que les échanges énergétiques réalisés entre matière et onde électromagnétique peuvent prendre toutes les valeurs, de manière continue, sans limite inférieure, or cette hypothèse ne permettait pas d'expliquer les caractéristiques spectrales du rayonnement thermique.

Afin de lever cette ambiguïté, Max Planck introduit en 1900 une « quantification » des échanges énergétiques entre la matière et le rayonnement. Ce quantum d'énergie est l'énergie du photon $E = h\nu$, où ν est la fréquence de l'onde électromagnétique, et h la constante de Planck.

C'est la naissance de la physique quantique.

Planck a étudié l'absorption du rayonnement par la matière via un absorbeur intégral, le corps noir.

II. Hypothèses et modélisation des transferts thermiques

1. Equilibre thermodynamique local

D'une manière générale les phénomènes de transfert mettent en jeu des systèmes hors équilibre, par exemple de température non uniforme, on supposera cependant toujours que l'équilibre thermodynamique est réalisé localement, c'est à dire qu'en chaque point M du système, à chaque instant t , on peut définir localement les grandeurs intensives de température $T(M, t)$, de pression $P(M, t)$, de masse volumique $\mu(M, t)$.

2. Notions de flux et de vecteur densité de flux thermique

3. Enoncé de la loi de Fourier

Quelques ordres de grandeur

	Conductivité thermique λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	Capacité thermique massique c_p (J.K ⁻¹ .kg ⁻¹)	Masse volumique μ (kg.m ⁻³)	Diffusivité thermique $\kappa = \frac{\lambda}{\mu c_p}$ (m ² .s ⁻¹)
métaux liquides	1 à 10 ²	10 ³	2.10 ³ à 2.10 ⁴	10 ⁻⁶ à 10 ⁻⁴
liquides organiques	0,15	8.10 ² à 3.10 ³	10 ³	10 ⁻⁸ à 10 ⁻⁷
sels fondus	10 ⁻⁷ à 10 ⁻⁶	10 ⁻³ à 4.10 ⁻³	2.10 ³	10 ⁻⁷
huiles silicones	10 ⁻⁷ à 10 ⁻³	1,5 à 10 ³	10 ³	10 ⁻¹¹
eau	0,4	4.10 ³	10 ³	10 ⁻⁷
verre fondu	10 ⁻²	0,8.10 ³	2,8.10 ³	10 ⁻⁶
air (à 300 K sous 1 bar)	2,6.10 ⁻²	10 ³	1,29	2,24.10 ⁻⁵

On retiendra que la conductivité thermique est plus basse dans les gaz que dans les liquides. Pour les corps condensés, elle varie de 0,15 pour le caoutchouc à 400 pour les métaux

Métaux à 273 K	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	Gaz sous 1 bar à 300K	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	Matériaux à 20°C	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹	Liquides à 20°C	λ W.m ⁻¹ .K ⁻¹
Ag	418	H ₂	18,2.10 ⁻²	Verre	≈ 1	eau	0,60
Cu	390	He	15,1.10 ⁻²	Bois	0,25 à 0,12	Alcool éthylique	0,17
Al	238	O ₂	2,68.10 ⁻²	Plâtre	0,46	Huile minérale	0,13
Fe	82	N ₂	2,61.10 ⁻²	Laine de verre	0,04		
Acier	60	Ne	4,9.10 ⁻²	Mousse de polyuréthane	0,030		
Pb	35	Ar	1,77.10 ⁻²	Polystyrène expansé	0,0039		
Pt	69	Kr	0,94.10 ⁻²	Béton brut	1,75		
Ti	20	CO ₂	1,66.10 ⁻²				
Inox	14						
laiton	120						

Coefficient de transfert conducto - convectif

Convection naturelle		h (W.m ⁻² .K ⁻¹)
	Gaz	5 à 30
	Eau	100 à 1 000
Convection forcée		h (W.m ⁻² .K ⁻¹)
	Gaz	10 à 300
	eau	300 à 12 000
	huile	50 à 1 700
	Métal liquide	6 000 à 110 000

III. Bilan énergétique

1. Conduction unidirectionnelle axiale
2. Conduction unidirectionnelle radiale cylindrique
3. Conduction unidirectionnelle radiale sphérique
4. Généralisation à 3D

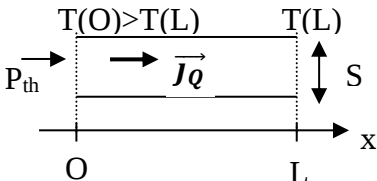
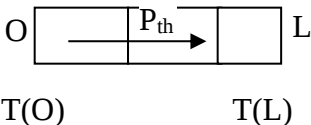
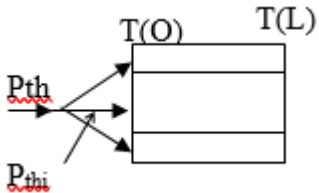
Pour un écoulement tridimensionnel : équation locale de conservation de la masse

$$\mu(M, t) \text{ et } \vec{v}(M, t) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

IV. Equation de la diffusion thermique

V. Résolutions de l'équation de diffusion

1. Résistance thermique en régime stationnaire

Conduction thermique unidirectionnelle	
Loi de Fourier	$\vec{J}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$
Définition de la résistance thermique $R_{th} = \frac{T(O) - T(L)}{P_{th}}$ en $K.W^{-1}$	Définition de la conductance thermique $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$ en $W.K^{-1}$
	Cas du conducteur de longueur L et de section S $R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S}$
	<u>Association en série</u> , tous les éléments sont tous parcourus par la même puissance thermique P_{th} . $R_{eq} = \sum_i R_i$
	<u>Association en parallèle</u> , tous les éléments sont soumis à la même différence de température $P_{th} = \sum_i P_{thi}$ d'où $G_{eq} = \sum_i G_i = \sum_i \frac{1}{R_i}$

2. Résolution numérique de l'équation de la chaleur

Fichiers : Chaleur-reseau_t_dt_impose.py ; Chaleur2_modif2_anim_Willy.py

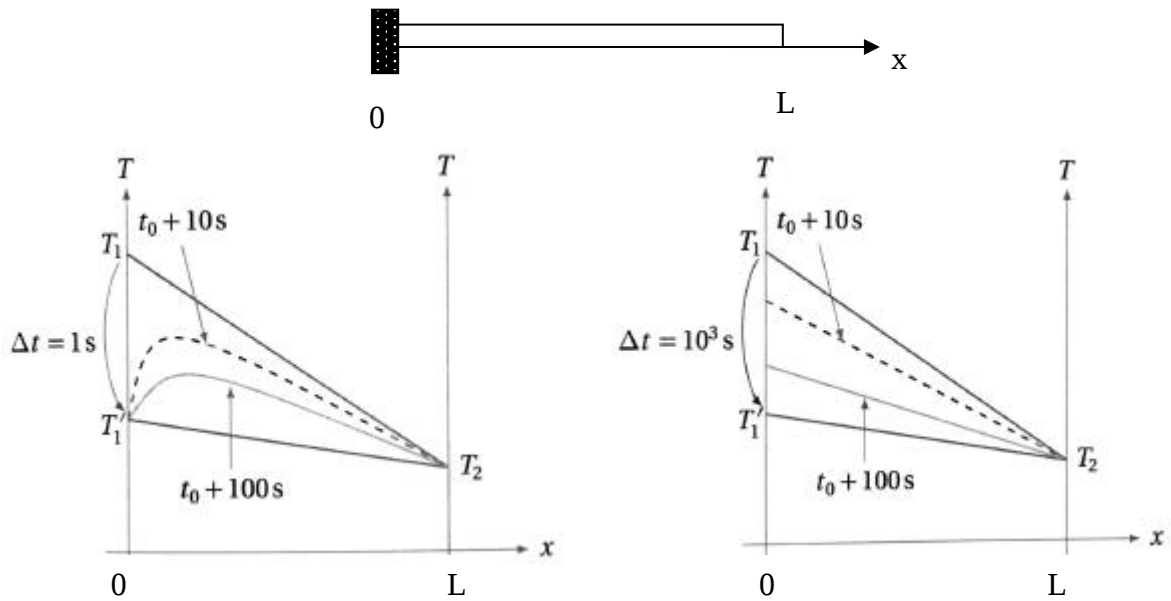
3. **ARQS :** $P_{th}(x,t) = P_{th}(x + dx, t)$

On considère la réponse à un échelon de température de l'extrémité en $x = 0$ et on observe l'évolution de $T(x,t)$ en fonction du temps

$$T_1 \text{ à } t < t_0$$

$$T'_1 < T_1 \text{ à } t > t_0 + \Delta t$$

$$T_2$$



VI. Onde thermique

Pour un vieillissement optimal le vin doit être conservé dans des caves dont la température optimale doit se situer tout au long de l'année entre 10°C et 14°C, alors que les variations de la température de l'air en surface sont bien plus importantes au cours de l'année. L'objectif de cette partie est de modéliser la variation de la température d'une cave, conséquence aux variations de la température de l'air en surface.

1. Quelques ordres de grandeurs :

Rechercher à Mulhouse la valeur moyenne de la température annuelle, la valeur maximale ainsi que la valeur minimale.

Mêmes questions pour une belle journée d'été, sans canicule, puis pour une froide journée d'hiver.

On reportera les valeurs numériques dans le tableau ci-dessous.

Justifier qu'on peut modéliser la température de l'air $\theta_{\text{air}}(t)$ par la fonction

$$\theta_{\text{air}}(t) = \theta_{\text{moy}} + \frac{\theta_{\text{Max}} - \theta_{\text{min}}}{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \theta_{\text{moy}} + \theta_o \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Que représente ω ?

Quelle valeur de φ prend-on, si on suppose qu'à $t = 0$, la température de l'air est maximale ?

Remplir le tableau ci-dessous avec les valeurs numériques :

Mulhouse	θ_{moy} (°C)	θ_{Max} (°C)	θ_{min} (°C)	θ_o (°C)	Période τ	ω (s ⁻¹)
année						
Belle journée d'été						
Froide journée d'hiver						

2. Equation de la chaleur dans le sol :

A la date $t = 0$, la température de l'air étant supérieure à la température du sol, montrer que, la température du sol, $\theta_{\text{sol}}(x, t)$ est solution de l'équation de la chaleur.

L'axe x est descendant et à pour origine le point de contact entre l'air et le sol.

On pose D , le coefficient de diffusivité du sol. Rappeler ses unités, ainsi que son expression en fonction de la masse volumique du sol, sa capacité thermique massique et son coefficient de diffusion.

3. Résolution de l'équation de la chaleur :

Quelle est la valeur de $\theta_{\text{sol}}(x=0, t)$?

Les variations de température dans le sol étant causées par les variations de température sinusoïdales de l'air, on va chercher pour $\theta_{\text{sol}}(x, t)$ une solution en régime sinusoïdal forcé de la forme :

$$\theta_{\text{sol}}(x, t) = \theta_{\text{solMoy}} + \theta_{\text{so}}(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi(x))$$

On pose $T_{\text{sol}}(x, t) = \theta_{\text{sol}}(x, t) - \theta_{\text{solMoy}} = \theta_{\text{so}}(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi(x))$

Montrer que $T_{\text{sol}}(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur.

Cette équation étant linéaire, le régime étant sinusoïdal forcé, on peut chercher une solution complexe à cette équation, en posant $T_{\text{sol}}(x,t) = \underline{T}_o(x).e^{j\omega t}$.

Montrer que $\underline{T}_o(x)$ est solution de $\frac{d^2 \underline{T}_o(x)}{dx^2} - \frac{j\omega}{D} \underline{T}_o(x) = 0$.

Résoudre cette équation différentielle complexe ou vérifier que

$$\underline{T}_o(x) = A.\exp\left((1+j)\frac{x}{\delta}\right) + B.\exp\left(-(1+j)\frac{x}{\delta}\right)$$

est une solution qui convient.

Exprimer la valeur de δ en fonction des données et préciser son unité.

Justifier que le problème physique à la limite lorsque x tend vers l'infini nécessite de prendre $A = 0$.

Exprimer $T_{\text{sol}}(x,t) = \underline{T}_o(x).e^{j\omega t}$.

Préciser le module et la phase de $\underline{T}_{\text{sol}}(x,t)$, puis revenir à son expression réelle et en déduire l'expression de $\theta_{\text{sol}}(x, t) = \theta_{\text{solMoy}} + \theta_{\text{so}}(x). \cos(\omega t + \varphi(x))$

Donner les expressions de θ_{solMoy} , $\theta_{\text{so}}(x)$ et $\varphi(x)$ en fonction des données.

4. Onde thermique

Quelle est l'amplitude de $\theta_{\text{sol}}(x,t)$? Est-elle constante ? Si l'amplitude décroît avec la distance, le milieu est dit absorbant, est-ce le cas ? Qu'appelle-t-on distance caractéristique d'absorption ou profondeur de peau ?

Justifier que la quantité $\cos(\omega t - x/\delta)$ représente une onde progressive. Quelle est sa direction ? Quelle est sa vitesse v ? L'exprimer en fonction de δ et ω , puis en fonction de D et ω . Si la vitesse dépend de la fréquence, le milieu est dit dispersif, est-ce le cas ?

Une onde sinusoïdale progressive est proportionnelle à $\cos(\omega t - kx)$ où k est le nombre d'onde.

Par définition, la relation **$k(\omega)$ est appelée relation de dispersion**
Donner la relation de dispersion de l'onde thermique.

5. Application numérique

Pour le sol $D = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, calculer δ , v ainsi que la longueur d'onde, pour les cas évoqués précédemment.

Dans une cave à 2m de profondeur, calculer le temps caractéristique de diffusion et le comparer aux périodes des phénomènes envisagés. Justifier que ce problème ne peut pas se traiter dans la cadre de l'ARQS.

Si le minimum de la température de l'air est perçu le 1^{er} janvier, à quelle date ce minimum est-il perçu dans la cave ? Comparer l'amplitude de la température dans la cave à celle de l'air.

Mêmes questions si le minimum de température est perçu à minuit.