

ELECTROMAGNETISME Chapitre 1 : Electrostatique

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Symétries du champs électrique	
Symétries pour le champ électrique, caractère polaire du champ électrique.	Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges pour en déduire des propriétés du champ électrique
4.2. Champ électrique en régime stationnaire	
Équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday.	Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday en régime variable et en régime stationnaire.
Potentiel scalaire électrique.	Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel du champ électrique. Exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrique.
Propriétés topographiques.	Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme du champ électrique en dehors des sources. Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentielles et inversement. Évaluer la valeur d'un champ électrique à partir d'un réseau de surfaces équipotentielles.
Équation de Poisson.	Établir l'équation de Poisson reliant le potentiel à la densité volumique de charge.
Théorème de Gauss.	Énoncer et appliquer le théorème de Gauss. Établir le champ électrique et le potentiel créés par une charge ponctuelle, une distribution de charge à symétrie sphérique, une distribution de charge à symétrie cylindrique. Exploiter le théorème de superposition.
Distribution surfacique de charge.	Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge. Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Énergie potentielle électrique d'une charge ponctuelle dans un champ électrique extérieur.	Établir la relation entre l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle et le potentiel. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à une particule chargée dans un champ électrique.
Champ gravitationnel.	Établir les analogies entre les champs électrique et gravitationnel.
4.3. Condensateur	
Phénomène d'influence électrostatique.	Décrire qualitativement le phénomène d'influence électrostatique.
Capacité d'un condensateur plan.	Déterminer l'expression du champ d'un condensateur plan en négligeant les effets de bord. Déterminer l'expression de la capacité.
Rôle des isolants.	Prendre en compte la permittivité du milieu dans l'expression de la capacité.
Densité volumique d'énergie électrique.	Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur. Citer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.

Rappels de première année : Mouvements et interactions 1

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel	
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel. Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force. Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.

Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
2.4. Mouvement de particules chargées dans un champs électrique uniforme et stationnaire	
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champ électrique. Puissance de la force de Lorentz.	Évaluer l'ordre de grandeur de la force électrique et la comparer à celle de la force gravitationnelle. Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.

Appendice 2 : outils mathématiques

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Géométrie (rappels de 1ère année)	
Vecteurs et système de coordonnées.	Exprimer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
Transformations géométriques.	Utiliser les symétries par rapport à un plan, les translations et les rotations de l'espace. Utiliser leur effet sur l'orientation de l'espace.
Longueurs, aires et volumes classiques.	Citer les expressions du périmètre d'un cercle, de l'aire d'un disque, de l'aire d'une sphère, du volume d'une boule, du volume d'un cylindre.
1. Analyse vectorielle	
Gradient.	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso- f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.

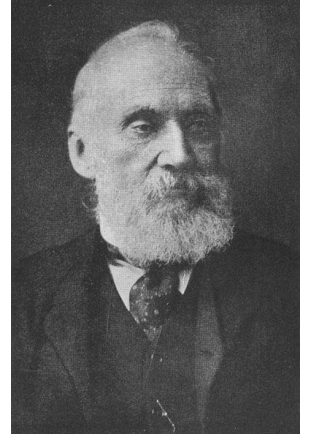
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient.

Les équations de Maxwell (1831 – 1879)



$$\text{Maxwell-Gauss (1777 - 1835)} : \operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Maxwell – Thomson (1824 – 1907)} : \operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$$



$$\text{Maxwell – Faraday (1791-1867)} : \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell – Ampère (1775 – 1836)} : \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left(\vec{j}_{el}(M, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right)$$



$\vec{E}(M, t)$: vecteur champ électrique en V.m^{-1}

$\vec{B}(M, t)$: vecteur champ magnétique en T (Tesla)

$\rho(M, t)$: densité volumique de charge en C.m^{-3} $\vec{j}_{el}(M, t)$: vecteur densité de courant électrique en A.m^{-2}

ε_0 : permittivité du vide en F.m^{-1}

μ_0 : perméabilité du vide en H.m^{-1}

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1 \text{ où } c \text{ est la vitesse de la lumière dans le vide}$$

ELECTROSTATIQUE : 2 équations locales. Les champs sont indépendants du temps.

$$\text{Maxwell-Gauss} : \operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Maxwell – Faraday} : \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}(M) = 0$$

Biographies d'après wikipédia (2009-2010)

James Clerk Maxwell ([13 juin 1831](#) à [Édimbourg](#), en [Écosse](#) - [5 novembre 1879](#)) est un [physicien](#) et [mathématicien écossais](#). Il est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations, les [équations de Maxwell](#), l'[électricité](#), le [magnétisme](#) et l'[induction](#), en incluant une importante modification du [théorème d'Ampère](#). Ce fut à l'époque le modèle le plus unifié de l'[électromagnétisme](#). Il est également célèbre pour avoir interprété, dans un article en quatre parties publié dans *[Philosophical Magazine](#)* intitulé *[On Physical Lines of Force](#)*, la [lumière](#) comme étant un phénomène électromagnétique en s'appuyant sur les travaux de [Michael Faraday](#). Il a notamment démontré que les champs [électriques](#) et [magnétiques](#) se propagent dans l'espace sous la forme d'une onde et à la vitesse de la lumière.

Ces deux découvertes permirent d'importants travaux ultérieurs notamment en [relativité restreinte](#) et en [mécanique quantique](#).

Il a également développé la [distribution de Maxwell](#), une méthode statistique de description de la [théorie cinétique des gaz](#).

Maxwell est considéré par de nombreux physiciens comme le scientifique du [XIX^e siècle](#) ayant eu le plus d'influence au [XX^e siècle](#). Ses contributions à la science sont considérées par certains comme aussi importantes que celles d'[Isaac Newton](#) ou d'[Albert Einstein](#)¹. En 1931, pour le centenaire de la naissance de Maxwell, [Einstein](#) lui-même décrivait les travaux de Maxwell comme les « plus profonds et fructueux que la physique ait connu depuis le temps de Newton »².

Il est également connu pour avoir réalisé [la première photographie en vraie couleur](#) en 1861.

Johann Carl Friedrich Gauss, né le [30 avril 1777](#) à [Brunswick](#) et mort le [23 février 1855](#) à [Göttingen](#), est un [mathématicien](#), [astronome](#) et [physicien allemand](#). Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

La qualité extraordinaire de ses travaux scientifiques était déjà reconnue par ses contemporains. Dès [1856](#), le [roi de Hanovre](#) fit graver des pièces commémoratives avec l'image de Gauss et l'inscription *Mathematicorum Principi* (« au prince des mathématiciens » en [latin](#)). Gauss n'ayant publié qu'une partie de ses découvertes, la postérité découvrit surtout l'étendue de ses travaux lors de la publication de ses *Œuvres*, de [son journal](#) ([en](#)) et d'une partie de ses archives, à la fin du [xix^e siècle](#).

Gauss dirigea l'Observatoire de Göttingen et ne travailla pas comme professeur de mathématiques – d'ailleurs il n'aimait guère enseigner – mais il encouragea plusieurs de ses étudiants, qui devinrent d'importants mathématiciens, notamment [Gotthold Eisenstein](#) et [Bernhard Riemann](#).

William Thomson, mieux connu sous le nom de **Lord Kelvin**, (26 juin [1824](#) en [Irlande](#) - 17 décembre [1907](#)) était un [physicien britannique](#) reconnu pour ses travaux en [thermodynamique](#).

Une des innovations de Kelvin est l'introduction d'un « [zéro absolu](#) » correspondant à l'absence absolue d'agitation thermique et de pression d'un gaz, dont il avait remarqué les variations liées selon un rapport linéaire. Il a laissé son nom à l'[échelle de température](#), dite absolue, ou température « thermodynamique », mesurée en [kelvins](#).

Le [second principe de la thermodynamique](#) possède un énoncé historique, dit de Thomson :
« Soit un cycle monotherme. Il ne peut être moteur. »

Cela interdisait l'hypothèse des [moteurs perpétuels](#) de deuxième espèce, dont l'image classique présentée aux étudiants est la suivante : la mer à 15°C est un réservoir potentiel d'énergie fantastique, si on pouvait en tirer un travail : un navire avancerait ainsi, laissant derrière lui un sillage d'eau plus froide. Mais cela est interdit en vertu de ce deuxième principe.

Michael Faraday ([Newington](#), [22 septembre 1791](#) - Hampton Court, [25 août 1867](#)) est un [physicien](#) et un [chimiste britannique](#), connu pour ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'[électromagnétisme](#) et l'[électrochimie](#)..

Ses plus grands travaux concernèrent l'[électricité](#). En [1821](#), après la découverte du phénomène de l'[électromagnétisme](#) par le chimiste danois [Oersted](#), Faraday construit deux appareils pour produire ce qu'il appela une *rotation électromagnétique* : le mouvement circulaire continu d'une force magnétique autour d'un fil, en fait la démonstration d'un [moteur électrique](#).

Dix ans plus tard, en [1831](#), il commença une longue série d'expériences durant lesquelles il découvrit l'[induction électromagnétique](#). Ces expériences forment la base de la technologie électromagnétique moderne. Dans son travail sur le [courant continu](#), Faraday a démontré que la charge se situe seulement à l'extérieur d'un conducteur chargé et que celle-ci n'a aucun effet sur ce qui peut être situé à l'intérieur. Ceci est l'effet de blindage qui est utilisé dans la [cage de Faraday](#).

Il a été l'un des principaux fondateurs de l'[électrochimie](#) en tant que discipline scientifique. En [1833](#), il introduit les termes d'[anode](#), de [cathode](#), d'[anion](#), de [cation](#) et d'[ions](#) (sans pour autant connaître la notion de [courant électrique](#) découvert plus tard par [André Marie Ampère](#)).

Il a donné son nom au [farad](#), une unité de [capacité électrique](#), ainsi qu'à une charge électrique, la [constante de Faraday](#). Son portrait figure aussi sur les billets anglais de 20 [livres](#).

Il a aussi donné son nom à l'[instabilité de Faraday](#), mise en évidence en 1831, déclenchée lorsqu'un bain liquide est vibré verticalement avec une amplitude suffisamment importante. Lorsque cette instabilité est déclenchée, la surface du liquide se réorganise et des ondes de surface sous-harmoniques apparaissent. Faraday réalise ses premières expériences en chimie alors qu'il est assistant de [Humphry Davy](#). En étudiant le [chlore](#) il découvre deux nouveaux [chlorures](#) de carbone. Il conduit des expériences sur l'[effusion](#) des [gaz](#), un phénomène identifié par [John Dalton](#) et dont l'importance sera mise en lumière par [Thomas Graham](#) et [Joseph Loschmidt](#). Il réussit la [liquéfaction](#) de quelques gaz naturels, dont le chlore. Il analyse différents alliages d'[acier](#) et obtient des nouveaux types de [verres](#) à usage optique. L'un d'entre eux deviendra important pour la science puisque c'est grâce à lui que Faraday identifie la rotation du plan de [polarisation](#) de la lumière quand le verre est placé dans un [champ magnétique](#). Il s'attache aussi à la [vulgarisation](#) des méthodes d'analyse en chimie.

On lui doit encore d'avoir mis au point un modèle rudimentaire de brûleur à gaz qui deviendra le [bec Bunsen](#), par la suite universellement utilisé dans les laboratoires^{3,4}.

Faraday découvre, entre autres substances chimiques, le [benzène](#)⁵ et invente le système du [nombre d'oxydation](#). En [1820](#), Faraday réussit la première synthèse des composés de carbone et de chlore, [C₂Cl₆](#) et [C₂Cl₄](#), résultats qu'il publie l'année suivante^{6,7,8}. Faraday définit la composition du [clathrate](#) de chlore qui avait été découvert par Humphry Davy en 1810^{9,10}.

Faraday est le premier à mentionner l'existence de ce qui sera connu sous le vocable de [nanoparticules](#) métalliques. En 1847, il observe que les propriétés optiques du [colloïde](#) d'[or](#) diffèrent de celles du métal pur, observation que l'on pourrait considérer comme la naissance des [nanosciences](#)

André-Marie Ampère, né à [Poleymieux-au-Mont-d'Or](#) le [20 janvier 1775](#) et mort à [Marseille](#) le [10 juin 1836](#), est un mathématicien et physicien français. Il inventa le premier [télégraphe électrique](#) et, avec [François Arago](#), l'[électroaimant](#), et il énonça en [1827](#) la théorie de l'[électromagnétisme](#). Son nom a été donné à l'unité internationale de courant électrique : l'[ampère](#).

En mathématiques, Ampère travaille entre autres sur la [théorie des probabilités](#) et l'intégration des [équations différentielles partielles](#).

En [1820](#), à partir de l'expérience de [Hans Christian Oersted](#)², il étudie la relation entre [magnétisme](#) et [électricité](#).

La loi d'[Ampère](#) la plus connue est celle de l'[électrodynamique](#). Elle décrit les forces que deux conducteurs parallèles parcourus par des courants [électriques](#) exercent l'un sur l'autre. Si la direction du [courant](#) est la même dans les deux conducteurs, ceux-ci s'attirent ; si le courant se déplace dans des directions opposées, les conducteurs se repoussent. Il décrit également la relation qui existe entre la force du courant et celle du champ magnétique correspondant. Ces travaux fondent l'électrodynamique et influencent considérablement la physique du XIX^e [siècle](#).

Ampère interprète le phénomène du magnétisme par la théorie du courant moléculaire, selon laquelle d'innombrables particules minuscules, chargées électriquement, seraient en mouvement dans le conducteur. Cette théorie est rejetée par les scientifiques de l'époque et ne parvient à s'imposer que soixante ans plus tard avec la découverte des [électrons](#).

Outre son travail sur l'[électrodynamique](#), il tente d'expliquer certains phénomènes chimiques par la géométrie des molécules et émet parallèlement à [Avogadro](#) l'hypothèse que le nombre de [molécules](#) contenues dans un gaz est proportionnel à son volume.

I. Propriétés topographiques du champ électrique

1. Lignes de champ électrique créées par une charge ponctuelle

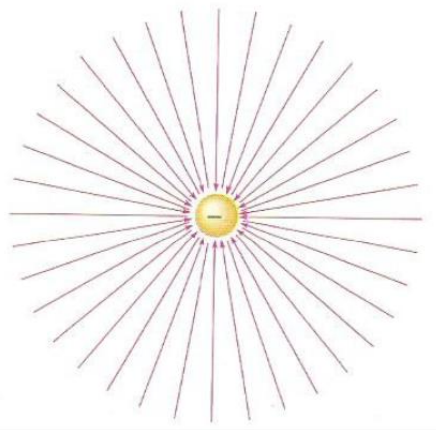
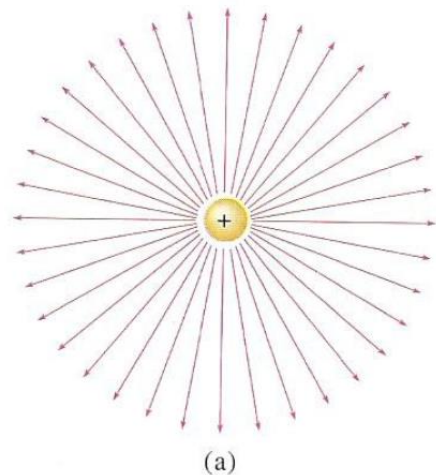
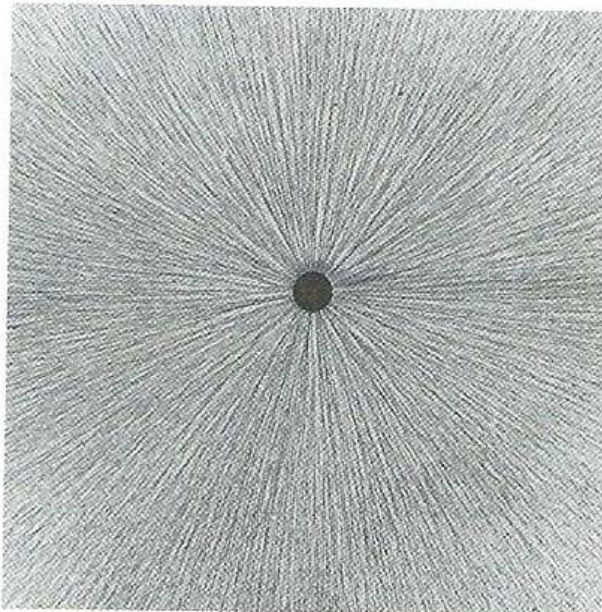
Expression de la force électrostatique entre deux charges,

Définition du champ électrique créé par une charge ponctuelle

Lignes de champ électrique :

Des fibres fines de rayonne suspendues dans l'huile tendent à s'aligner au voisinage d'un objet chargé.

Lignes de champ créées par une charge ponctuelle



L'expression du champ électrique au point M créé par la charge q qui se trouve en O est :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3}$$

Le champ électrique est un vecteur polaire car colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Champs/champE.php> : tracé du vecteur champ électrique

Rappel : coordonnées sphériques $\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{u_r}$ donc $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$

Le champ électrique est radial, il est colinéaire à $\overrightarrow{u_r}$, il décroît en $1/r^2$.

Les points tels que la valeur du champ est constante se trouvent sur une sphère de rayon r.

Pour donner la position d'un point en coordonnées sphériques il faut préciser la valeur de :

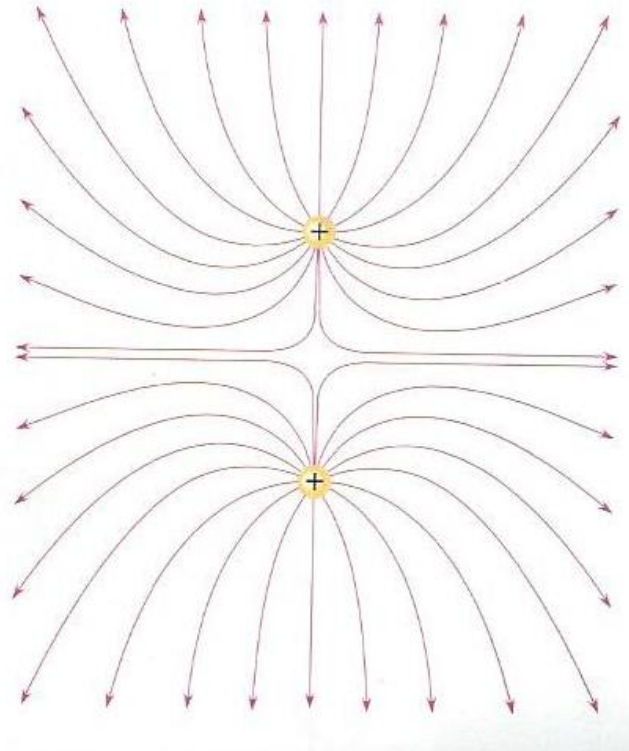
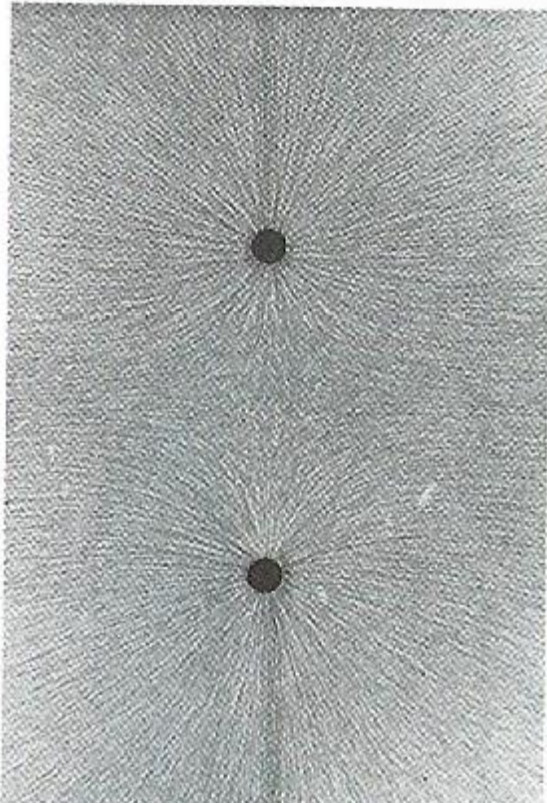
r distance OM ; θ angle entre OM et l'axe z, vertical ; φ angle entre le projeté de M sur le plan horizontal (Oxy) et l'axe Ox.

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2} = E(M) \overrightarrow{u_r} = E(r) \overrightarrow{u_r}$$

Le champ électrique ne dépend que de la coordonnée r de M.

Il ne dépend pas des coordonnées angulaires θ et φ . Le champ électrique est à symétrie sphérique.

2. Lignes de champ électrique créées par deux charges identiques de même signe.



Propriétés de symétrie d'un vecteur polaire $\vec{E}$:

Π_S est un plan de symétrie des charges q_A et q_B si les charges sont à la même distance du plan et si $q_A = q_B$.

Si $M \in \Pi_S$ alors $\vec{E}(M) \in \Pi_S$.

Si $P' = \text{sym}(P) / \Pi_S$ alors $\vec{E}(P') = \text{sym} \vec{E}(P) / \Pi_S$

Théorème de superposition : $\vec{E}(M) = \vec{E}_{q_A}(M) + \vec{E}_{q_B}(M)$

Comme le plan de la feuille est un plan de symétrie des charges $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan, donc

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r + E_z(M) \vec{u}_z$$

$\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire **radial cylindrique** $\neq \vec{u}_r$ le vecteur unitaire **radial sphérique**

Rappel : coordonnées cylindriques

Pour donner la position d'un point en coordonnées cylindriques il faut préciser la valeur de :

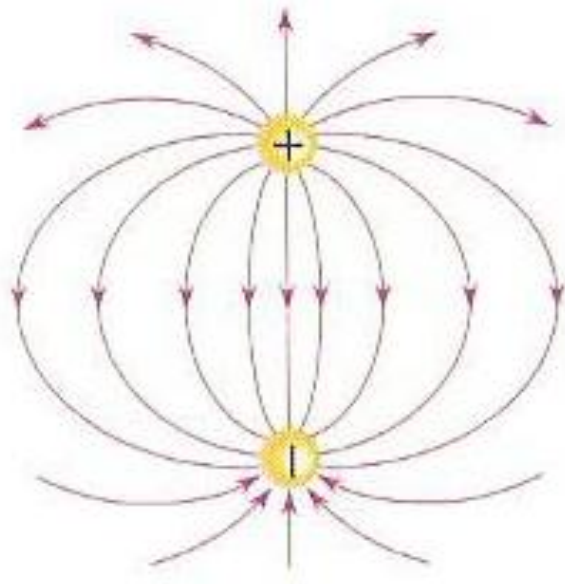
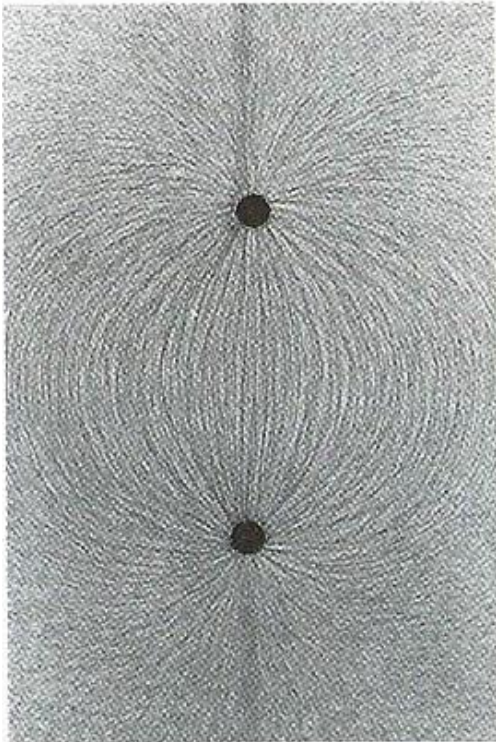
r distance entre le point M et l'axe vertical z ; θ angle entre OM et l'axe z , vertical ; θ angle entre le projeté de M sur le plan horizontal (Oxy) et l'axe Ox ; z valeur algébrique du projeté de M sur l'axe z .

La carte de champ est la même quel que soit θ donc **les composantes $E_r(M)$ et $E_z(M)$ du champ électrique ne dépendent pas de la coordonnée angulaire de M , mais uniquement des coordonnées r et z .**

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r + E_z(M) \vec{u}_z = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_z(r, z) \vec{u}_z$$

La distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ .

3. Lignes de champ électrique créées par deux charges opposées = dipôle électrique



Propriétés d'antisymétrie d'un vecteur polaire $\vec{E}$:

Π_{AS} est un plan d'antisymétrie des charges q_A et q_B si les charges sont à la même distance du plan et si $q_A = -q_B$.

Si $M \in \Pi_{AS}$ alors $\vec{E}(M) \perp \Pi_s$.

Si $P' = \text{sym}(P) / \Pi_{AS}$ alors $\vec{E}(P') = -\text{sym } \vec{E}(P) / \Pi_{AS}$

4. Lignes de champ électrique créées par des charges quelconques

Site permettant de tracer des lignes de champ électriques :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/

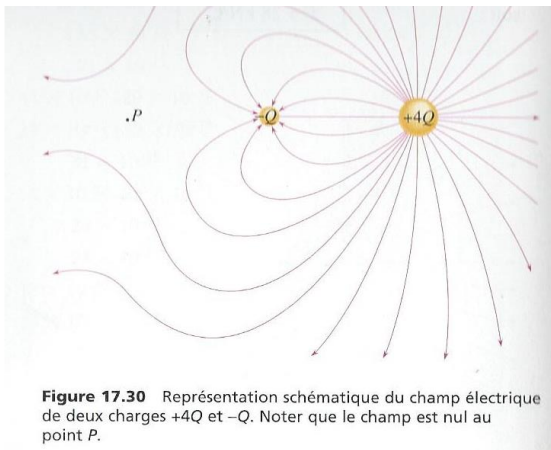
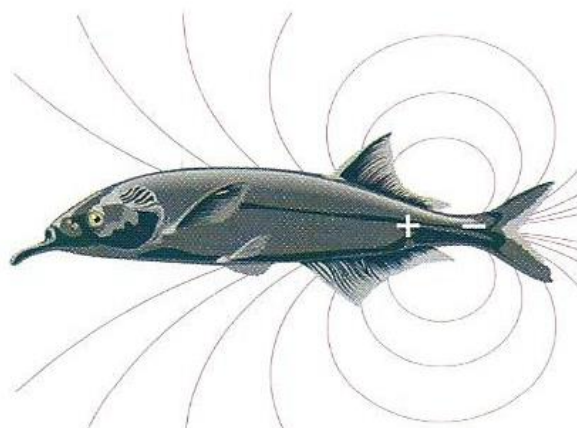
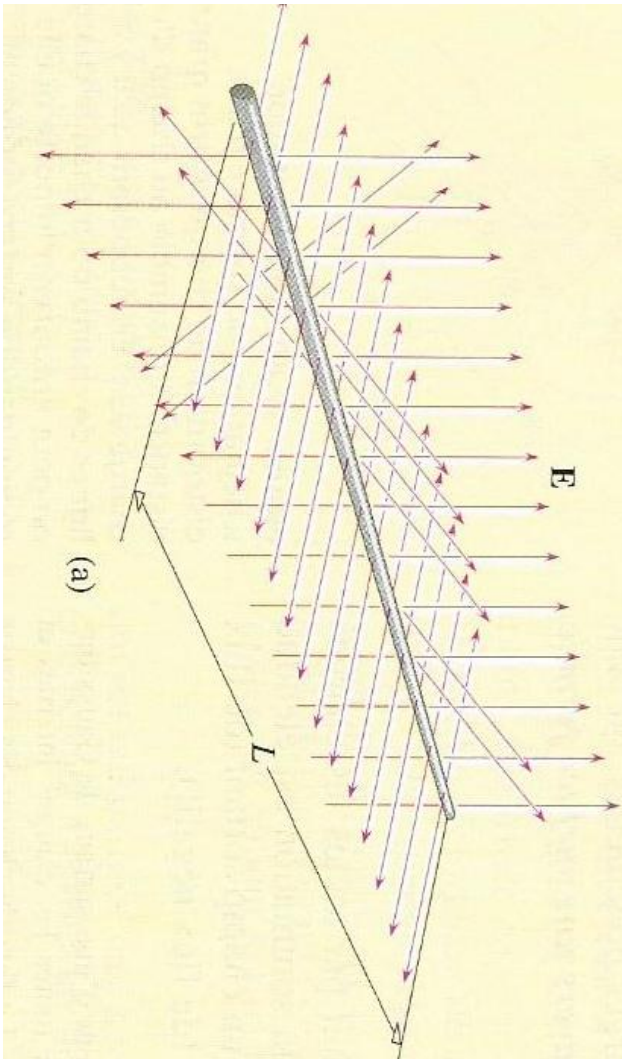


Figure 17.30 Représentation schématique du champ électrique de deux charges $+4Q$ et $-Q$. Noter que le champ est nul au point P .

Le poisson éléphant produit un champ dipolaire et détecte les objets proches par leurs effets sur ce champ



5. Lignes de champ créées par un fil infini uniformément chargé :



Tige rigide de plexiglas frottée par une peau de chat

Observation : le champ électrique est radial
cylindrique $\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r$

Coordonnées adaptées : cylindriques.

Recherche des plans de symétrie des charges passant par le point M :

Seuls 3 plans passent par M

$$\Pi_1 (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) = \Pi_s$$

$$\Pi_2 (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \Pi_s$$

$\Pi_3 (M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z) \neq \Pi_s$ ne coupe pas les charges

$\vec{E}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2)$ donc $\vec{E}(M)$ est colinéaire à $\vec{u}_r$

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r$$

Le champ électrique est radial cylindrique
conformément à l'observation.

L'étude des **plans de symétrie des charges** permet de déterminer la direction du champ électrique.

La distribution de charges étant invariante par rotation d'angle θ et par translation selon z , la carte

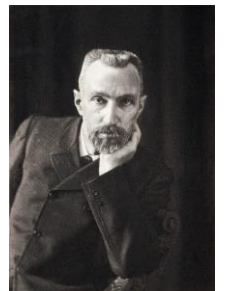
de champ est la même quel que soit θ et quel que soit z donc la **composante radiale du champ électrique** $E_r(M)$ ne dépend ni θ , ni de z mais uniquement de r .

$$\vec{E}(M) = E_r(M) \vec{u}_r = E_r(r) \vec{u}_r$$

L'étude des **invariances de la distribution des charges** permet de déterminer de quelles coordonnées spatiales dépendent les composantes du champ électrique.

Principe de Curie : « les conséquences ont au moins les symétries des causes »

Pierre Curie (15 mai 1859 à Paris - 19 avril 1906 à Paris) est un [physicien français](#). Il est principalement connu pour ses travaux en [radioactivité](#), en [magnétisme](#) et en [piézoélectricité](#). Lui et son épouse, [Marie Curie](#), pionniers de l'étude des [radiations](#), reçurent une moitié du [prix Nobel de physique](#) de 1903 (l'autre moitié a été remise à [Henri Becquerel](#)) « en reconnaissance des services extraordinaires qu'ils ont rendus par leur effort conjoint de recherches sur les phénomènes des radiations découvertes par le professeur Henri Becquerel¹ »



II. Théorème de Gauss

1. Notion de flux à travers une surface
2. Flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle
3. Enoncé du théorème de Gauss
4. Interprétation géométrique

Dans un tube de champ, en l'absence de charges, lorsque le tube s'évase la valeur du champ diminue.

5. Lien entre l'équation de Maxwell-Gauss et le théorème de Gauss

a) THEOREME FONDAMENTAL Définition, Théorème d'Ostrogradski (admis)



Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradski (24 septembre 1801, Ukraine, 1^{er} janvier 1862, Ukraine) est un [physicien](#) et [mathématicien russe](#). Il commença ses études de mathématiques à l'Université de [Kharkov](#), et les continua ensuite à [Paris](#) où il fut en contact étroit et se lia d'amitié et d'estime avec les célèbres mathématiciens français [Cauchy](#), [Binet](#), [Fourier](#) et [Poisson](#). De retour dans sa patrie, il enseigna à l'école des cadets de la Marine, à l'Institut des Ingénieurs et à l'école d'Artillerie de [Saint-Pétersbourg](#).

Les travaux scientifiques d'Ostrogradski sont dans le droit fil des principes professés à cette époque à l' [École polytechnique](#) dans les domaines de l'[analyse](#), et des [mathématiques appliquées](#). En physiques mathématiques, il imagina une synthèse grandiose qui embrasserait l'[hydromécanique](#), la [théorie de l'élasticité](#), la théorie de la chaleur, et la théorie de l'électricité dans le cadre d'une seule méthode homogène. La réalisation de ce plan

était au-dessus des possibilités d'un seul homme, et au-dessus des ressources du XIX^e [siècle](#) et reste à compléter aujourd'hui.

Enoncé du théorème

Soit $\vec{A}(\vec{r}, t)$ un champ de vecteur défini sur tout l'espace.

Il existe un unique champ scalaire appelé divergence de $\vec{A}$ et noté $\text{div} \vec{A}$, tel que le flux de $\vec{A}$ à travers S fermée, orientée par sa normale extérieure, est égal à l'intégrale de $\text{div} \vec{A}$ sur le volume V délimité par S.

$$\Phi(\vec{A}) = \oint_S \vec{A} d\vec{S} = \iiint_{V(S)} \text{div} \vec{A} d\tau.$$

à travers S fermée

Remarque: $\text{div} \vec{A}$ est un champ de scalaires.

$$\boxed{\text{div}(\text{vecteur}) = \text{scalaire}}$$

Remarque: on note aussi: $\text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ (où $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla).

b) Application à l'équation de Maxwell-Gauss

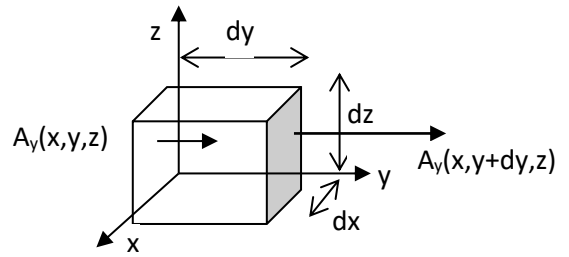
On retrouve le théorème de Gauss

c) Expressions de l'opérateur divergent

Coordonnées cartésiennes

On pose: $\vec{A} = A_x(x,y,z) \vec{u}_x + A_y(x,y,z) \vec{u}_y + A_z(x,y,z) \vec{u}_z$.

On considère le cube élémentaire de volume $d\tau = dx dy dz$ ci-contre entourant le point M . Le flux de $\vec{A}$ à travers la surface de ce cube est :



$\delta\Phi =$

$$[A_x(x+dx,y,z) - A_x(x,y,z)] dy dz + [A_y(x,y+dy,z) - A_y(x,y,z)] dx dz + [A_z(x,y,z+dz) - A_z(x,y,z)] dx dy$$

$$\text{donc: } \delta\Phi = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Or $\delta\Phi = \text{div } \vec{A} d\tau$, avec: $d\tau = dx dy dz$, donc:

$$\boxed{\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .}$$

Coordonnées cylindriques

On pose: $\vec{A} = A_r(r,\theta,z) \vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,z) \vec{u}_\theta + A_z(r,\theta,z) \vec{u}_z$. Alors: $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Coordonnées sphériques

On pose: $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi) \vec{u}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi) \vec{u}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi) \vec{u}_\varphi$.

Alors: $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi)$.

III. Applications du théorème de Gauss :

1. Définition d'une distribution continue de charges

Détermination des champs électriques créés par des distributions continues de charges.

2. Champ électrique créé par une sphère uniformément chargée en volume

Méthodologie :

- La forme de la distribution permet de choisir le repère d'étude (cylindrique ou sphérique)
- La détermination des plans de symétrie des charges donne la direction de champ électrique
- La détermination des opérations de translation et de rotation laissant les charges invariantes permet de déterminer de quelles coordonnées spatiales dépendent les composantes du champ électrique.
- Choisir une surface de Gauss adaptée qui passe par le point M où on veut déterminer le champ. La surface de Gauss est fermée, sphérique ou cylindrique en fonction de la géométrie de la distribution des charges.
- Appliquer le théorème de Gauss

3. Champ électrique créé par un cylindre infini uniformément chargé en surface

4. Champ électrique créé par des charges uniformément réparties sur un plan infini

Définition de la densité surfacique de charge σ en C.m^{-2}

IV. Potentiel électrique

Forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday

1. Circulation d'un champ de vecteurs

La circulation élémentaire dC du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ entre deux points voisins M et M' tels que $\overrightarrow{MM'} = d\vec{\ell}$ est :

$$dC = \vec{A}(M,t) \cdot d\vec{\ell}.$$

Le travail élémentaire est la circulation élémentaire de la force : $\delta W = \vec{F}(M,t) \cdot d\vec{\ell}$

La circulation du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ entre les points α et β le long de la courbe (I) est :

$$C_{\alpha}^{\beta}(\Gamma) = \int_{\alpha(\Gamma)}^{\beta} \vec{A}(M,t) \cdot d\vec{\ell}.$$

Le travail est la circulation de la force entre α et β : $W_{\alpha}^{\beta}(\Gamma) = \int_{\alpha(\Gamma)}^{\beta} \vec{F}(M,t) \cdot d\vec{\ell}.$

La circulation du champ vectoriel $\vec{A}(M,t)$ le long la courbe fermée (Γ) est :

$$C_{\alpha}^{\alpha}(\vec{A}) = C_{\Gamma_{fermé orienté}}(\vec{A}) = \oint_{\Gamma} \vec{A}(M,t) \cdot d\vec{\ell}.$$

Le travail le long de la courbe fermée est la circulation de la force entre α et α :

$$W_{\alpha}^{\alpha}(\Gamma) = \oint_{\Gamma} \vec{F}(M,t) \cdot d\vec{\ell}$$

$W_{\alpha}^{\alpha}(\Gamma) = 0$ si la force est conservative, c'est-à-dire que son travail ne dépend pas du chemin suivi.

Exemples de forces conservatives :

force de pesanteur, force de gravitation, force électrostatique, force élastique du ressort

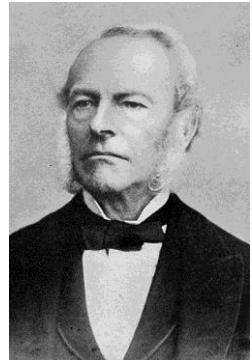
Exemples de forces non conservatives :

Forces de frottements

2. Théorème de Stokes (1849, admis) : définition de l'opérateur rotationnel

George Gabriel Stokes ([13 août 1819](#) - [1^{er} février 1903](#)) est un [mathématicien](#) et [physicien britannique](#). Ses contributions majeures concernent la [mécanique des fluides](#), l'[optique](#) et la [géodésie](#).

il se consacre à l'étude des fluides visqueux. L'ensemble de ses recherches est synthétisé par son traité *Report on recent research in Hydrodynamics*, paru en [1846](#), texte fondateur de l'[hydrodynamique](#). Il exploite ses expériences sur le mouvement d'un [pendule](#) dans un fluide pour étudier le champ de gravité terrestre et publie *On the variation of gravity at the surface of the earth* publié en [1849](#). En [1852](#), il explique le phénomène de la [fluorescence](#).



Soit $\vec{A}(M,t)$ un champ de vecteur défini sur tout l'espace. Il existe un unique champ de vecteurs appelé rotationnel de $\vec{A}$, noté $\overrightarrow{\text{rot } A}$ tel que pour toute surface S s'appuyant sur un contour Γ **fermé** et **orienté** la circulation de $\vec{A}$ le long de Γ est égale au flux de $\overrightarrow{\text{rot } A}$ à travers S

$$C_{\text{sur } \Gamma \text{ fermé orienté}}(\vec{A}) = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{S(\Gamma)} \left(\overrightarrow{\text{rot } A} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S(\Gamma)} \left(\overrightarrow{\text{rot } A} \right) \cdot \vec{n} dS = \Phi_{\text{à travers } S(\Gamma) \text{ ouverte}}(\overrightarrow{\text{rot } A})$$

Schémas Γ et S

Remarque: $\overrightarrow{\text{rot } A}$ est un champ de vecteurs.

$$\overrightarrow{\text{rot}(\text{vecteur})} = \text{vecteur}$$

3. Application en électrostatique, définition du potentiel

A partir de MF en régime stationnaire $\overrightarrow{\text{rot } E} = \vec{0}$ $C_{\text{sur } \Gamma \text{ fermé, orienté}}(\vec{E}) = 0$,

$\vec{E}$ est un vecteur à circulation conservative.

Comme les forces conservatives.

Si une force est conservative, il existe une fonction scalaire appelée énergie potentielle telle que

$$W_{\alpha}^{\beta}(\Gamma) = \int_{\alpha(\Gamma)}^{\beta} \vec{F}(M,t) \cdot d\vec{\ell} = - (Ep(\beta) - Ep(\alpha))$$

$$\delta W = \vec{F}(M,t) \cdot d\vec{\ell} = - dEp$$

Par analogie, on définit la fonction scalaire V , appelée potentiel électrique, telle que

$$dC(\vec{E}) = \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = - dV$$

$$C_{\alpha}^{\beta}(\vec{E}) = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha}^{\beta} -dV = - (V(\beta) - V(\alpha)) = V(\alpha) - V(\beta) = V_{\alpha\beta}$$

On retient que la tension $U_{AB} = C_A^B(\vec{E}) = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$

4. Relation locale entre le champ et le potentiel, opérateur gradient

Le potentiel $V(M)$ est une fonction de l'espace.

En coordonnées cartésiennes $V(M) = V(x, y, z)$

La différentielle de $V(x, y, z)$ est notée $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$ par définition d'une fonction de 3 variables

$$\text{Or } dV = - \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

$$\text{Avec } \vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{u}_x + E_y(x, y, z) \vec{u}_y + E_z(x, y, z) \vec{u}_z \text{ et } d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$\text{Soit } \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = - (E_x(x, y, z) \cdot dx + E_y(x, y, z) \cdot dy + E_z(x, y, z) \cdot dz)$$

$$\text{Par identification } \frac{\partial V}{\partial x} = -E_x(x, y, z) ; \frac{\partial V}{\partial y} = -E_y(x, y, z) ; \frac{\partial V}{\partial z} = -E_z(x, y, z)$$

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} V(x, y, z) = - \overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

$$\text{Ce qui définit l'opérateur gradient, uniquement en coordonnées cartésiennes } \overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Relation entre le champ électrique et le potentiel électrique :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M) \text{ et } dV = - \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

En coordonnées cylindriques

$$U(\rho, \theta, z) \text{ et } \boxed{\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z} \quad \overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En coordonnées sphériques

$$U(r, \theta, \phi) \text{ et } \boxed{\overrightarrow{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \vec{u}_\phi} \quad \overrightarrow{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

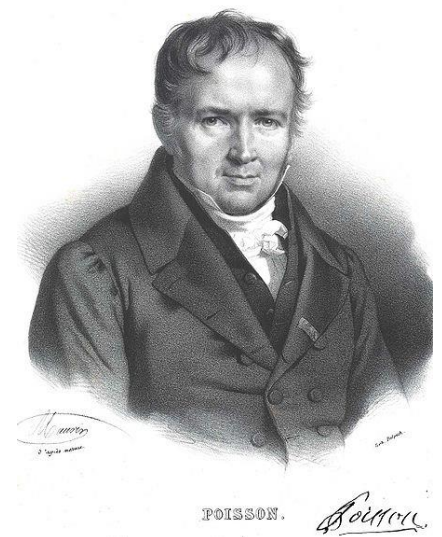
5. Equations de Poisson et de Laplace

Siméon Denis Poisson ([21 juin 1781](#) à [Pithiviers](#) - [25 avril 1840](#) à [Sceaux](#))

est un [mathématicien](#), [géomètre](#) et physicien [français](#).

En 1798 il entra à l'[École polytechnique](#) à [Paris](#). Deux ans plus tard il publia deux mémoires, l'un sur la méthode d'élimination d'[Étienne Bézout](#), l'autre sur le nombre des [intégrales](#) d'une [équation de différences finies](#). Ce dernier fut examiné par [Sylvestre-François Lacroix](#) et [Adrien-Marie Legendre](#), qui recommandèrent qu'il soit publié dans le *Recueil des savants étrangers*, un honneur exceptionnel pour un jeune de dix-huit ans. Ce succès procura instantanément à Poisson une entrée dans les cercles scientifiques. [Joseph-Louis Lagrange](#), dont il assista aux lectures sur la théorie des fonctions, reconnut son talent et devint son ami ; tandis que [Laplace](#) le considérait presque son fils.

Il faut retenir néanmoins, qu'en tant que membre de l'[Académie des sciences](#), il fut chargé en [1830](#) d'examiner le mémoire d'un jeune mathématicien [Evariste Galois](#) *Conditions pour qu'une équation soit résoluble par radicaux*. Poisson rendra un rapport négatif le 4 juillet, jugeant le travail incompréhensible.¹



Pierre-Simon Laplace, né le [23 mars 1749](#) à [Beaumont-en-Auge](#) et mort le [5 mars 1827](#) à [Paris](#), est un [mathématicien](#), [astronome](#) et [physicien français](#).

Laplace est l'un des principaux scientifiques de la période [napoléonienne](#) ; en effet, il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des [mathématiques](#), de l'[astronomie](#) et de la [théorie des probabilités](#) ; il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du [déterminisme](#) ; il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'[astronomie mathématique](#) reprenant et étendant le travail de ses prédécesseurs dans son traité intitulé [Mécanique Céleste](#) (1799-1825). Ce chef-d'œuvre, en cinq volumes, a transformé l'approche géométrique de la [mécanique](#) développée par [Newton](#) en une approche fondée sur l'[analyse mathématique](#).

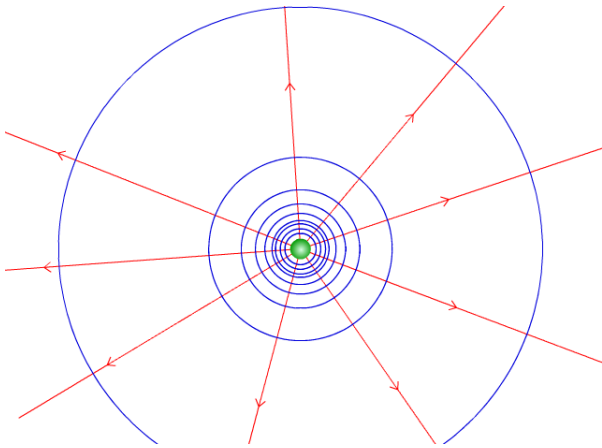
En [1814](#) il publie son *Essai philosophique sur les probabilités*. Il est le premier à publier la valeur de l'[intégrale de Gauss](#). Il étudie la [transformée de Laplace](#), étude plus tard complétée par [Oliver Heaviside](#).

Il adhère à la théorie d'[Antoine Lavoisier](#), avec qui il détermine les températures spécifiques de plusieurs substances à l'aide d'un [calorimètre](#) de sa propre fabrication.

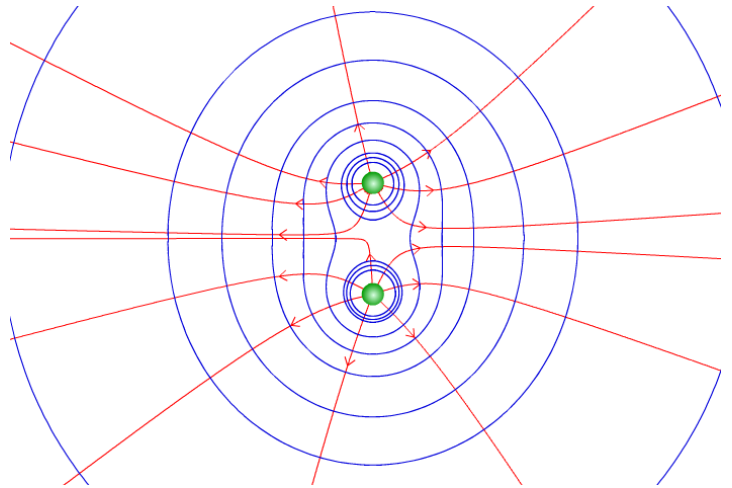
En [1799](#) il est nommé ministre de l'intérieur sous le [Consulat](#). [Napoléon Ier](#), en [1806](#) lui confère le titre de comte de l'[Empire](#). Il est nommé [marquis](#) en [1817](#), après la [restauration](#) des [Bourbons](#)¹.



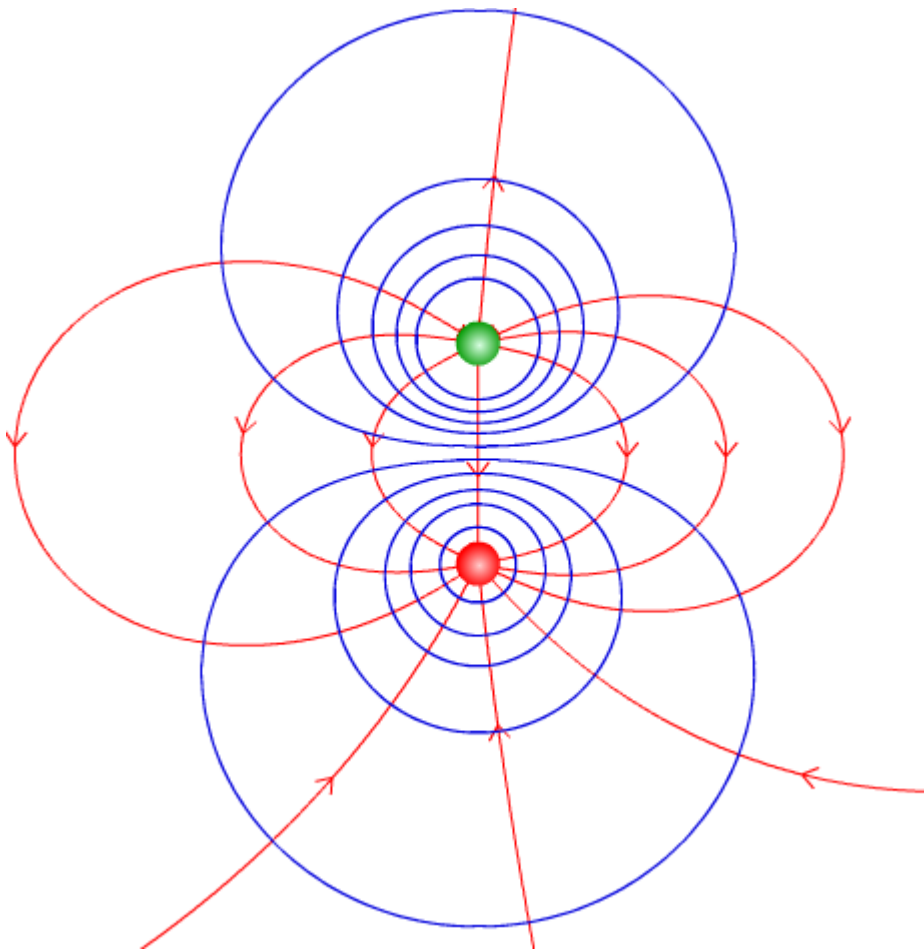
6. Surfaces équipotentielle et lignes de champ



Charge ponctuelle positive, la différence de potentiel est de 10 V entre chaque équipotentielle



Deux charges positives identiques, la différence de potentiel est de 5 V entre chaque équipotentielle

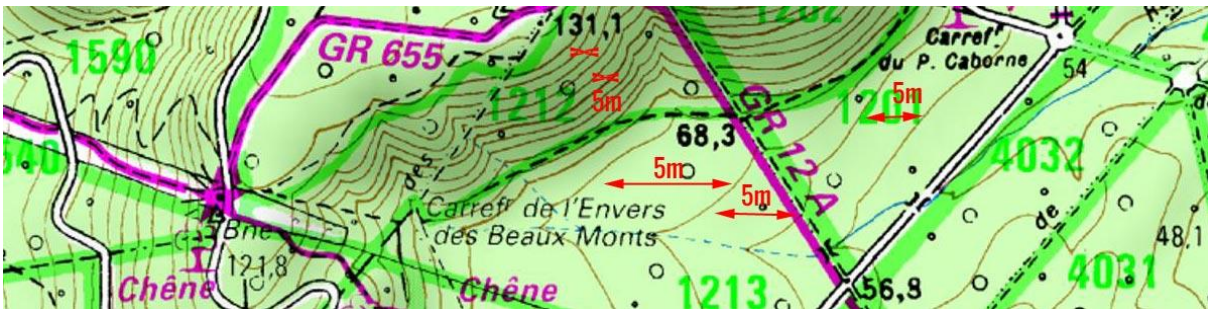


Dipôle électrostatique : la différence de potentiel entre chaque équipotentielle est de 5 V

Les courbes de niveaux : ce sont des courbes à altitude constante.

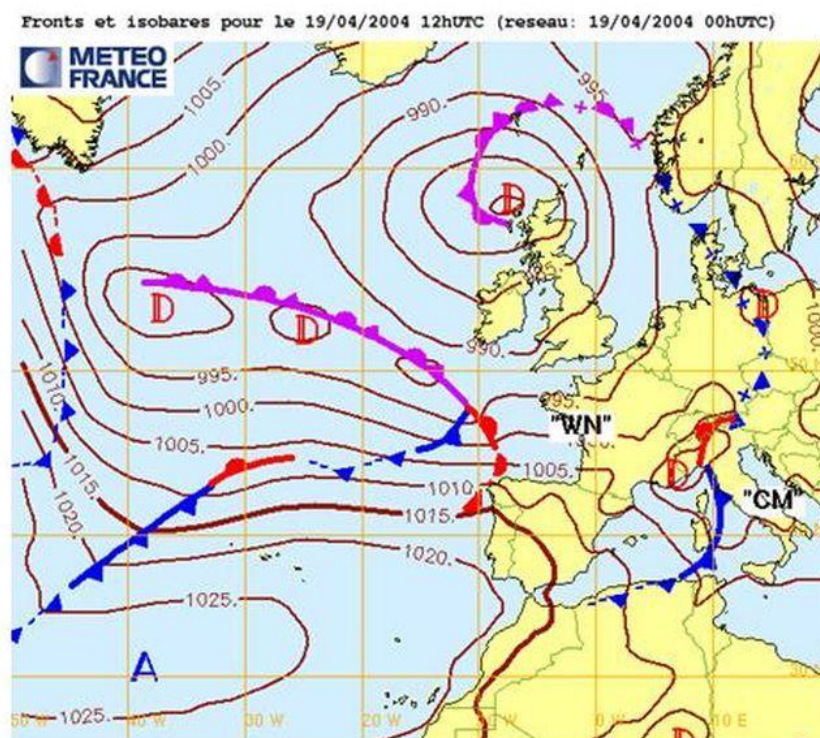
La différence d'altitude entre deux courbes de niveau est toujours la même, ici $\Delta z = 5\text{m}$.

Plus les courbes de niveaux sont resserrées plus le gradient d'altitude est important et donc plus la pente est forte.



Courbes isobares : ce sont des courbes de pression constante

La différence de pression entre deux courbes est toujours la même ici 5 mbar. Lorsque les courbes se resserrent la valeur du gradient de pression devient plus importante.



Faire une analogie avec les équipotentiels.

Plus les équipotentiels sont rapprochées pour une même différence de potentiel, plus la valeur du champ est importante.

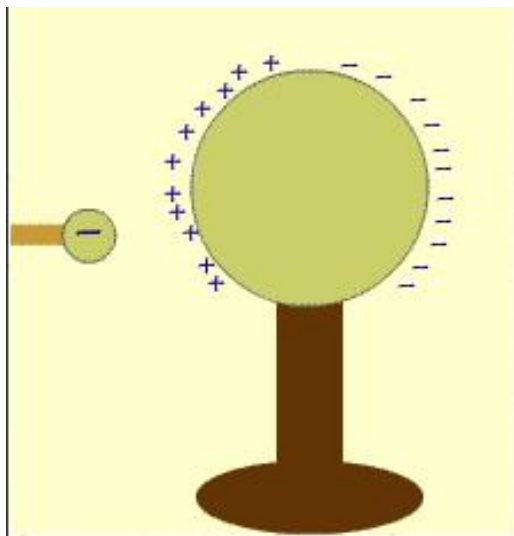
7. Expressions du potentiel

Créé par : une charge ponctuelle,
 deux charges ponctuelles : théorème de superposition,
 une distribution sphérique de charges
 une distribution cylindrique de charges
 un champ uniforme

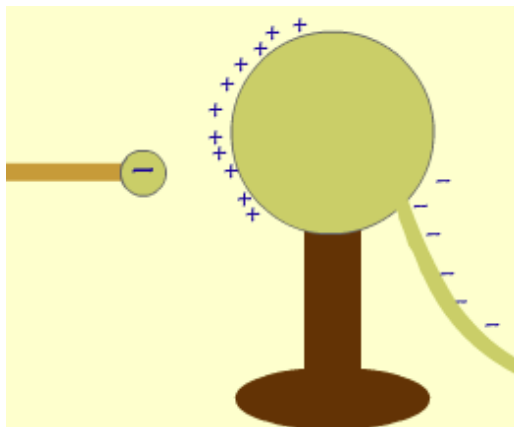
IV. Les condensateurs

1. Phénomène d'influence électrique

<https://www.youtube.com/watch?v=My0Sa0q5MeI> ou vidéo Influence électrostatique

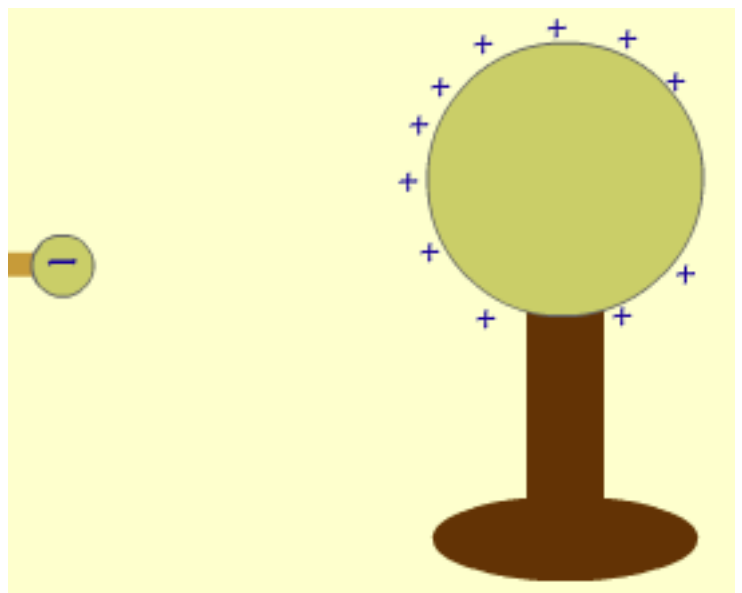
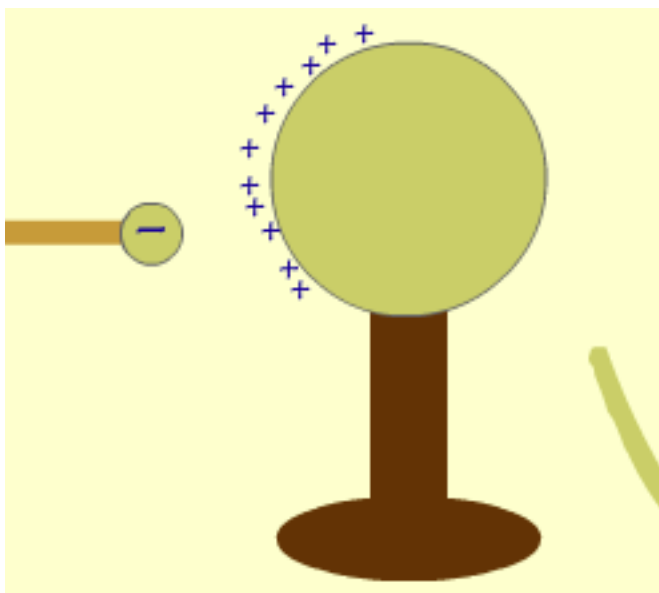


On constate que, lorsque l'on approche une charge d'un conducteur, on modifie la répartition des charges à la surface de celui-ci. On exerce une influence sur le conducteur sans qu'aucun contact ne soit nécessaire.



La terre est un réservoir de charges électriques.

Elle va évacuer le surplus de charges négatives, pour que l'ensemble reste neutre.



On déconnecte le conducteur de la terre puis on retire la charge négative, le conducteur reste chargé positivement. Le conducteur a été chargé par influence.

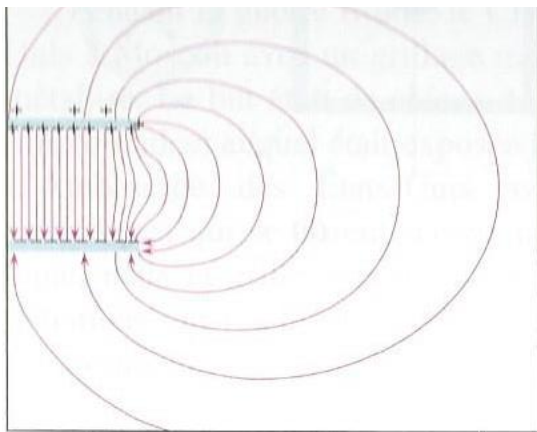
Le show du palais de la découverte de Paris :
https://www.canal-u.tv/video_en_cours_electrostatique_2003.98



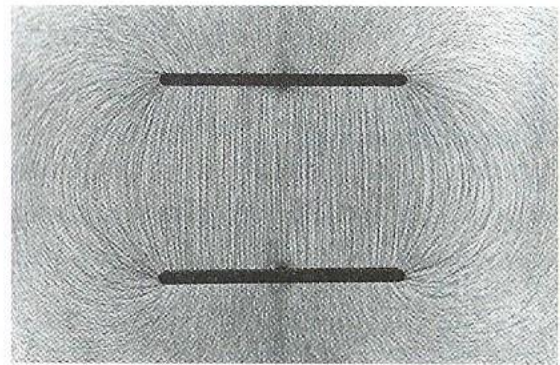
2. Application au condensateur plan

Lignes de champ

Expression de la capacité du condensateur



(b)



(c)

Figure 17.31 (a) Le champ électrique d'un condensateur plan (b) Vue rapprochée de l'effet de bord. (c) Le champ révélé par des fibres de rayonne suspendues dans l'huile.

3. Energie stockée dans un condensateur

Permittivité relative

Substance	vide	air sec	eau	verre	nylon	huile	Plexiglas
ϵ_r	1	1.0006	78.5	5 - 7	3.5	2.2	2-4

Densité d'énergie électrique

V. Particule dans un champ

1. Analogie formelle entre champ électrique et champ de gravitation

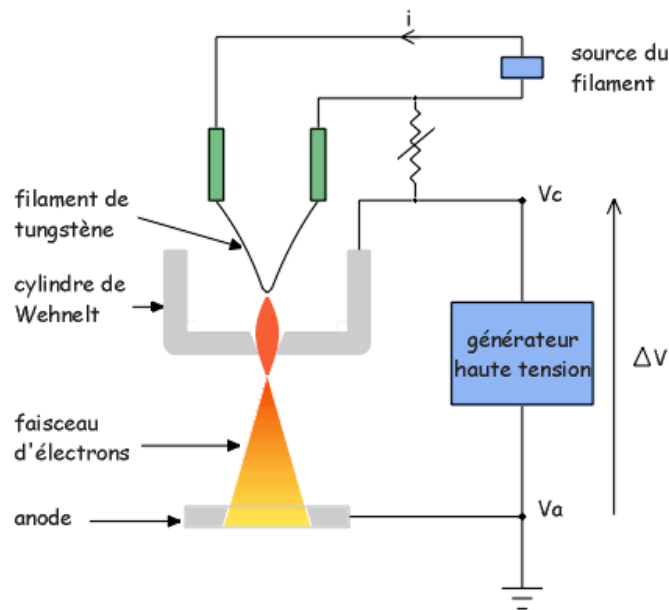
2. Energie d'une particule dans un champ

Les accélérateurs de particules

Le diagramme de Livingston : progrès exponentiels de l'énergie des faisceaux de particules accélérées

Accélérateurs linéaires

Le **canon à électrons** est un des composants essentiels d'un [tube cathodique](#) ou d'instruments comme les [microscopes électroniques](#). Ces appareils mettent en jeu un faisceau d'électrons et le canon à électrons constitue la source en électrons de ce faisceau.



Fonctionnement

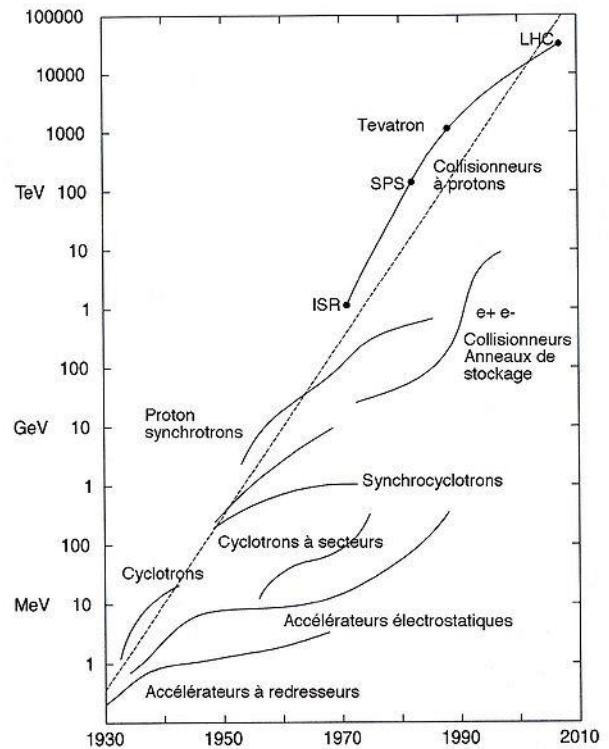
Le filament de tungstène (en forme d'épingle à cheveux, de diamètre de quelques dizaines de mm) est chauffé à une température voisine de 2700°C. Ainsi, les électrons sont extraits du métal et forment un nuage entourant le filament (principe de l'émission thermoélectronique). L'électrode de Wehnelt est portée à un potentiel négatif de quelques centaines de Volts par rapport au filament, pour réunir les électrons en un point finement focalisé, le cross-over. Les électrons sont ensuite accélérés en direction de l'anode par la haute tension (plusieurs centaines de milliers de volts).

En effet, le champ électrique existant entre l'anode et le filament permet d'accélérer les électrons libérés et définit la tension de fonctionnement du microscope.

Le faisceau d'électrons accélérés à une vitesse de plusieurs centaines de milliers de km à la seconde émerge de l'autre côté de l'anode percée d'un trou.

Le [microscope électronique](#) est le plus connu des accélérateurs électrostatiques. L'accélération sous quelques centaines de keV fournit des longueurs d'ondes adaptées aux dimensions des cellules, des virus, des microcristaux et des plus grosses molécules.

Questions : expliquer le principe de fonctionnement d'un canon à électrons, quel est le lien quantitatif entre vitesse et tension ? Justifier un ordre de grandeur donné au choix. Pourquoi exprime-t-on des énergies en MeV, GeV, TeV ?



constitution d'un canon à électrons

- ⇒ Un filament de tungstène ou en LaB6 (rôle d'émettrice)
- ⇒ Un cylindre de Wehnelt (rôle de focalisation)
- ⇒ Une anode (rôle d'accélération)

On notera $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position d'un point M et t la date.

FORMULAIRE OPERATEURS VECTORIELS

GRADIENT

Coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi.$$

DIVERGENCE

Coordonnées cylindriques

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Coordonnées sphériques

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\varphi).$$

ROTATIONNEL

Coordonnées cylindriques

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

LAPLACIEN

coordonnées cylindriques:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

coordonnées sphériques:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Le Laplacien d'un vecteur est le Laplacien de ses coordonnées