Ondes chapitre 4 **6.2. Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion**	
6.2.1. Relation de dispersion	
Propagation unidimensionnelle d'une onde harmonique dans un milieu linéaire.	Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles. Établir la relation de dispersion. Relier, pour un signal proportionnel à exp(j(ωt – kx)) la partie réelle de $\underline{k}$ à la vitesse de phase, la partie imaginaire de $\underline{k}$ à une dépendance spatiale de l'amplitude.
6.2.2. Paquet d'ondes	
Superposition de deux ondes de fréquences proches dans un milieu non absorbant et dispersif. Domaine spectral d'un paquet d'onde de durée finie.	Déterminer la vitesse de groupe. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement. Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
6.2.3. Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs	
Conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau. Modèle du conducteur parfait en présence d'un champ électromagnétique variable.	Identifier une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Établir l'expression de la profondeur de peau. Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz. Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le conducteur.
Onde plane transverse électrique harmonique dans un plasma dilué. Conductivité complexe du milieu. Fréquence de coupure. Vitesse de phase, vitesse de groupe Interprétation énergétique. Ondes évanescentes.	Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion. Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère. Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs. Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.

I. Dispersion et absorption dans les milieux régis par une équation de propagation linéaire

1. Propagation dans un câble coaxial avec perte

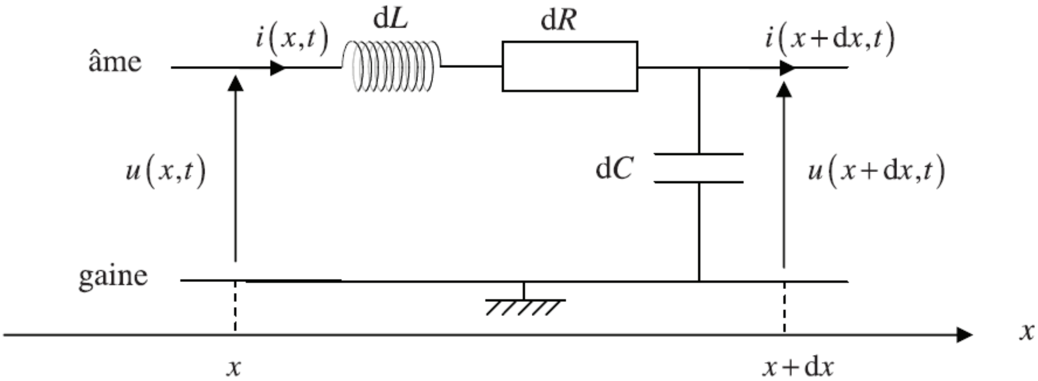


Figure 3 – Schéma électrique d'un tronçon de ligne imparfait de longueur dx

Montrer que l'équation de propagation du courant i(x, t) dans le câble s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{i}}{\partial \mathrm{t}^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathrm{i}}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{r}{\Lambda}\frac{\partial \mathrm{i}}{\partial t}$$

r est la résistance linéique du câble, Λ l'inductance linéique.
Donner l'expression et les unités de c.

2. Autres exemples d'équations linéaires

« Ondes thermiques » (équation de diffusion)	$\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{t}} = D_{th} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \mathrm{x}^2}$
« Ondes de tension sur cellules RC (TP) » (équation de diffusion)	$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = D_{RC} \frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}$
« Conducteur ohmique » (équation de diffusion), γ conductivité	$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{1}{\mu_o \gamma} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{x}^2}$
Fluide visqueux, ν = η/μ coefficient de viscosité dynamique, propagation de la surpression sonore	$\frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{t}^2} = -\nu \frac{\partial^3 \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}^2 \partial t}$
Propagation d'une onde sonore dans un cornet acoustique dont la section $S(x) = S_o.e^{x/a}$ augmente avec la distance	$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{a}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$
Câble coaxial avec pertes, Grandeurs linéiques : r résistance, g conductance, Λ inductance linéïque, Γ capacité linéïque	$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}^2} = -c^2 \left[(r\Gamma + \Lambda g)\frac{\partial u}{\partial t} + rgu \right]$
Plasma, γ conductivité	$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{t}^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \mathrm{x}^2} - c^2 \mu_o \gamma \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial \mathrm{t}}$

3. Solutions de ces équations : retour à l'exemple 1

L'onde mécanique est considérée plane progressive harmonique, de la forme :

$$\underline{i}\,(x,t) = I_o\, exp[j(\omega t - \underline{k}x)].$$

4. Relation de dispersion reliant k(ω)

$$\frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \underline{i}}{\partial x^2} - \frac{r}{\Lambda}\frac{\partial \underline{i}}{\partial t}$$

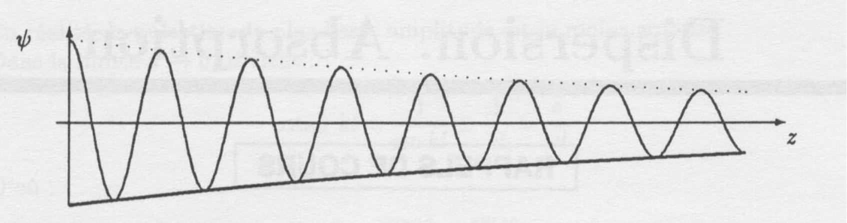
$$(j\omega)^2 = c^2(-j\underline{k})^2 - \frac{r}{\Lambda} j\omega \;soit\; \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{r}{\Lambda} j\omega$$

5. Signification physique d'une relation de dispersion complexe :

$\underline{k}$(ω)=k'(ω)+jk''(ω) avec k'(ω) et k''(ω) fonctions réèlles

Exprimer $\underline{i}(x,t) = \underline{I_o}\, exp[j(\omega t - \underline{k}x)]$ en fonction de k' et k'', puis séparer les exponentielles complexes des exponentielles réelles avant de revenir à l'expression réelle de i(x,t).
Interpréter !

k''(ω) : partie imaginaire de $\underline{k}$(ω)

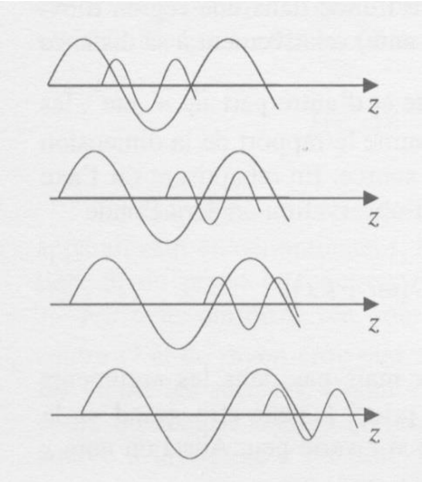


Propagation d'une onde plane progressive dans le sens z croissant dans un milieu **absorbant.**
L'amplitude de l'onde décroît lorsque z augmente,
distance caractéristique d'absorption : δ(ω) = – 1/k''(ω)

Fichier python : onde progressive amortie.py

k'(ω) : partie réelle de $\underline{k}$(ω)

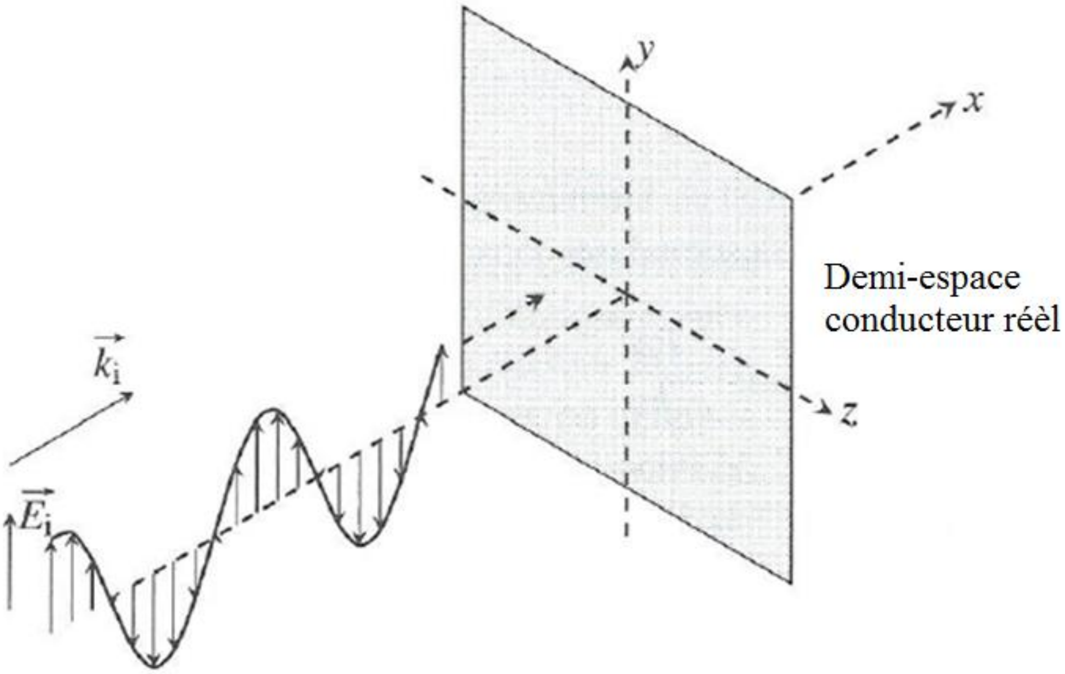
Vitesse de phase : vφ = ω / k'(ω)



Propagation de deux ébranlements à des vitesses différentes dans un **milieu dispersif.**

Dans cet exemple, la vitesse de l'ébranlement de haute fréquence (petite période) est plus importante que celle de l'ébranlement de basse fréquence (grande période)
Si ces deux ébranlements forment initialement un paquet d'ondes, ils vont finir par se séparer et évoluer indépendamment l'un de l'autre.

II. Onde électromagnétique dans un métal réel :



On considère l'onde électromagnétique plane se propageant dans le vide dont on a représenté le champ électrique ci-dessus. En x = 0, cette onde arrive sur un métal conducteur réèl de conductivité électrique γ. On cherche à déterminer l'onde électromagnétique résultant de la pénétration de l'onde électromagnétique incidente dans ce conducteur réèl et déterminer dans quelles conditions le modèle du conducteur parfait peut s'appliquer.

1. Equations de Maxwell dans le conducteur :

Quelle est la valeur de la densité volumique de charges dans un conducteur ?
Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale.

En comparant, en ordre de grandeur la valeur de la densité de courant électrique $\overrightarrow{j_{él}}$ et celle du courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer jusqu'à quelle fréquence on peut négliger la densité de courant de déplacement devant celle de conduction.
Ecrire les 4 équations de Maxwell dans un milieu conducteur en négligeant la densité de courant de déplacement devant celle de conduction.

2. Equation différentielle en $\overrightarrow{j_{él}}$

En appliquant la formule du double rotationnel à une équation de Maxwell qu'on précisera, montrer que $\vec{E}$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\Delta \vec{E} = \mu_o \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Justifier que cette équation n'est pas une équation d'onde.
Dans quels autres domaines a-t-on rencontré ce type d'équation ? Quel nom lui donne-t-on ?

3. Condition à l'interface en x=0

Donner l'expression complexe du champ électrique incident : $\underline{\vec{E_i}}\,(x,t)$. On appelle E_o son amplitude.
Le champ électrique est-il tangent ou normal à la surface du conducteur ?

On rappelle la relation de passage du champ électrique à l'interface de normale $\overrightarrow{u_x}$ entre deux milieux :

$$\vec{E}(x=0^+) - \vec{E}(x=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\overrightarrow{u_x}$$

où σ est la densité surfacique de charge au niveau de l'interface.
Dans le cas présent, il n'y a aucune charge au niveau de l'interface, et on néglige la présence d'une onde réfléchie. En déduire l'expression de $\vec{E}\,(x=0^+,t)$.

4. Solution de l'équation différentielle

Justifier qu'il est judicieux de chercher une solution de l'équation différentielle de la question précédente sous la forme $\underline{\vec{E}}\,(x,t) = \underline{E_o}e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\,\overrightarrow{u_y}$.
Déterminer la relation de dispersion et montrer que $\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_o \gamma \omega}}$ est la seule solution possible sachant que l'onde se propage dans le sens x croissant.

En déduire que le conducteur ohmique est un milieu absorbant.
Déterminer la vitesse de phase de l'onde et montrer que le conducteur est un milieu dispersif.
Exprimer la longueur d'onde λ en fonction de δ.
Montrer que l'expression réelle de $\underline{\vec{E}}\,(x,t)$ est :

$$\boxed{\vec{E}\,(x,t) = E_o e^{-x/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\overrightarrow{u_y}}$$

5. Profondeur de peau et modèle du conducteur parfait

δ est appelé profondeur de peau ou distance caractéristique de pénétration de l'onde électromagnétique dans le métal.

AN : calculer δ pour du cuivre à 50 Hz.

A quelle condition peut-on supposer que le conducteur est parfait ?

Dans un conducteur parfait $\overrightarrow{j_{él}} = \vec{0}$, $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$

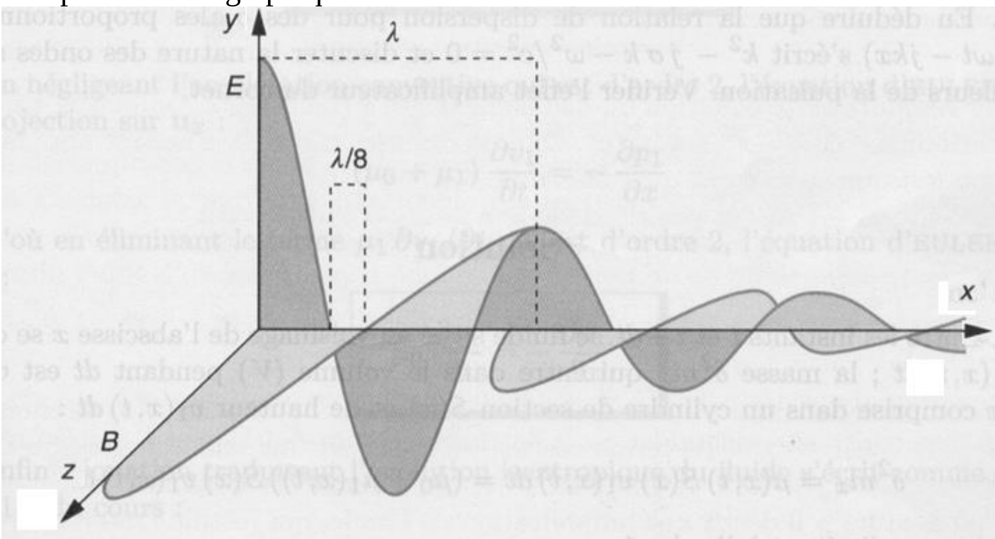
6. Champ électromagnétique dans le métal

Même si $\underline{k}$ est complexe $\underline{\vec{E}}\,(x,t)$ peut être qualifié d'OPPH.
Ecrire la relation de Maxwell Faraday, puis la relation de dérivation formelle et montrer que

$$\underline{\vec{B}}\,(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega}E_o e^{i\left(\omega t - \underline{k}x - \frac{\pi}{4}\right)}\overrightarrow{u_z}$$

Vérifier l'homogénéïté de cette relation. Quel déphasage a-t-on entre $\vec{B}\ (x,t)$ et $\vec{E}\ (x,t)$?
Montrer que $\vec{B}\ (x,t) = \frac{\sqrt{2}}{\delta\omega} E_o e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)\vec{u_z}$.

Justifier la représentation graphique ci-dessous :



7. **Puissance dissipée par effet Joule**

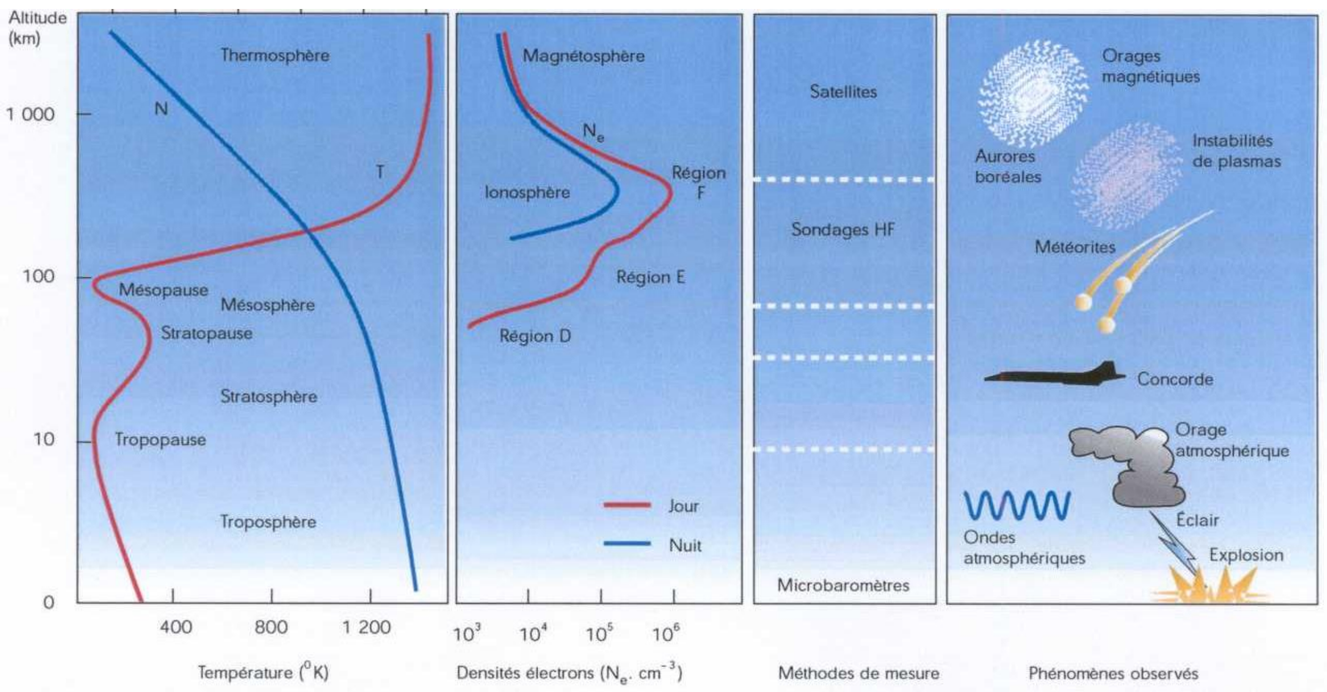
Montrer que la puissance volumique moyenne dissipée par effet joule est $\gamma \frac{{E_o}^2}{2} e^{-2x/\delta}$.
On considère que le conducteur est de hauteur h selon y, de largeur L selon z et de longueur très supérieure à δ, soit « infini » selon x.
Montrer que la puissance moyenne dissipée par effet joule dans ce conducteur est $\frac{\gamma {E_o}^2 h L \delta}{4}$.

L'atténuation de l'onde dans le conducteur correspond à une dissipation d'énergie.

III. Propagation d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement dans un plasma

Un plasma est un milieu où les atomes sont partiellement ou totalement ionisés, les électrons et les ions se mouvant librement. Avant ionisation, le plasma est un gaz neutre, donc au repos, les densités volumiques d'électrons et d'ions ont même valeur n_0.

C'est par exemple le cas de la ionosphère, qui est une partie de l'atmosphère terrestre, où les molécules sont ionisées par les rayons ultraviolets. La ionosphère se situe entre 80 et 500 km d'altitude.



On supposera la masse des ions très grande devant celle des électrons, de sorte que l'on peut considérer les ions comme fixes.
On étudie la propagation dans ce plasma d'une onde électromagnétique progressive plane monochromatique, de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant y, se propageant suivant x dans le sens croissant.
Exprimer le champ électromagnétique $\underline{\vec{E}}\,(M,t)$ associé à cette onde.

1. Modélisation du plasma

Cette onde met en mouvement les charges du plasma : on note $\vec{v_e}\,(M,t)$ la vitesse de l'électron passant au point M à l'instant t et on suppose que la valeur moyenne temporelle $\langle v_e \rangle$ est nulle en tout point M.

a. Rappeler l'expression de la force électrique et de la force magnétique exercées par un champ électromagnétique sur une particule de charge q. À quelle condition sur v peut-on négliger la force magnétique devant la force électrique ? Ce que l'on fait par la suite.

b. Définir la densité volumique de courant $\underline{\overrightarrow{j_{el}}}(M,t)$ due aux électrons en fonction de n_0, la charge élémentaire et $\vec{v_e}\,(M,t)$

c. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron, exprimer $\underline{\overrightarrow{v_e}}\,(M,t)$ en fonction de $\underline{\vec{E}}\,(M,t)$, puis $\underline{\overrightarrow{j_{el}}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\vec{E}}\,(M,t)$.

Définir, puis exprimer la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ du plasma.

Quel déphasage a-t-on entre le vecteur densité de courant et le vecteur champ électrique ? En déduire la valeur moyenne de la puissance volumique cédée aux charges.

Le champ électrique ne cède pas de puissance aux porteurs de charges du plasma

2. Equations de Maxwell dans le plasma

Ecrire les équations de Maxwell dans le plasma électriquement neutre. Ici on ne peut pas négliger la densité de courant de conduction devant la densité de courant de déplacement. On conservera $\overrightarrow{j_{él}}\,(M,t)$

3. Equation de propagation du champ électrique dans le plasma

Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le plasma, avec $\overrightarrow{j_{él}}\,(M,t)$. Exprimer cette relation avec les grandeurs complexes et exprimer $\underline{\overrightarrow{j_{el}}}(M,t)$ en fonction de $\underline{\vec{E}}\,(M,t)$ et de $\underline{\gamma}$.

4. Relation de dispersion

Etablir la relation de dispersion des ondes et la mettre sous la forme : $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2-\omega_P{}^2}{c^2}$.
En déduire qu'une onde ne peut se propager que si sa pulsation est supérieure à une pulsation critique ω_P appelée pulsation plasma qu'on exprimera en fonction de n_o, e, m et ε_o.

Pour qu'une onde puisse se propager il faut que <u>k</u> ait une partie réelle non nulle

5. Propagation dans le plasma $\omega > \omega_P$

Pourquoi le milieu n'est-il pas absorbant ?

Exprimer, dans ce cas, la vitesse de phase v_φ. Le milieu est-il dispersif ?

Exprimer la vitesse de groupe v_g, vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'onde définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ de cette onde, pour ce faire, il est intéressant de différencier k^2.

Tracer v_φ et v_g en fonction de ω. Est-il contradictoire que la vitesse de phase soit supérieure à la célérité de la lumière ?

6. Onde évanescente dans le plasma $\omega < \omega_P$: domaine réactif

Montrer que si $\omega < \omega_p$, $\underline{k} = ik''$ est un imaginaire pur avec $k'' < 0$. En déduire l'expression de $\underline{\vec{E}}\,(M,t)$ dans le plasma.

En utilisant le modèle de l'onde plane déterminer $\underline{\vec{B}}\,(M,t)$ puis les expressions réelles des deux champs.

Ces formes d'ondes stationnaires, dont l'amplitude est décroissante, sont appelées des ondes **évanescentes**

Exprimer le vecteur de Poynting et déterminer sa valeur moyenne.

L'onde évanescente ne transporte pas d'énergie dans le plasma.

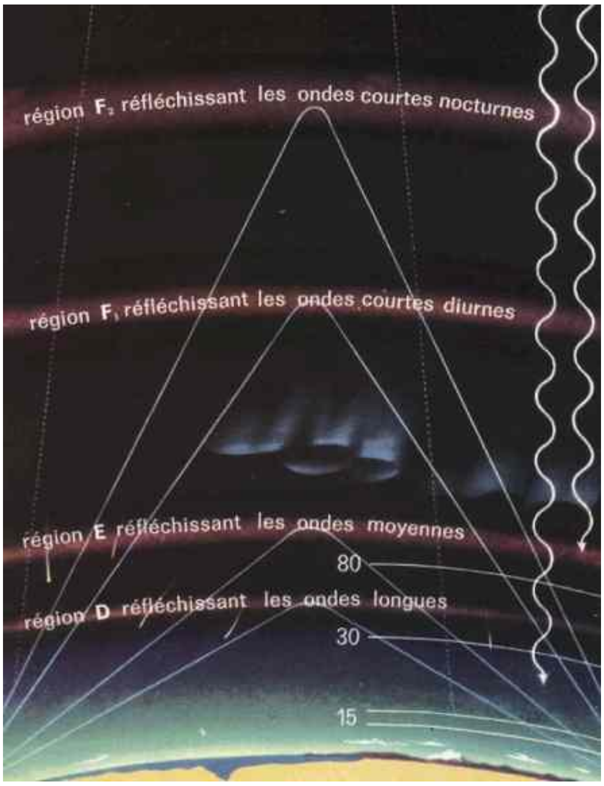
Quelle est alors la puissance transmise à une interface vide-plasma ?

Justifier que le plasma a un comportement de filtre passe-haut.

Si $\omega < \omega_p$, l'onde est réfléchie en arrivant sur la ionosphère :

La réflexion des ondes hertziennes sur l'ionosphère est utilisée pour propager ces ondes en des points non reliés en ligne droite à l'émetteur, ce qui augmente considérablement sa portée. C'est ainsi qu'on été réalisée les premières communications transatlantiques.

Sachant que le procédé est utilisé pour des ondes longues (λ = 1 km) et n'est pas utilisable pour des ondes de la bande FM (f = 100 MHz), donner un encadrement de la pulsation plasma ω_P.



En déduire un encadrement de n_o et comparer avec les données du graphique.

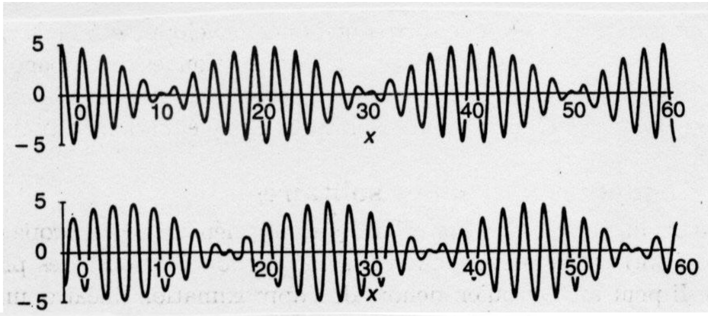
masse d'un électron $0{,}9.10^{-30}$ kg,

$1/\,4\pi\varepsilon_o = 9.10^{9}$ SI.

A quelle condition sur la fréquence peut-on communiquer avec un satellite ?

IV. Propagation d'un paquet d'ondes

Superposition de deux ondes monochromatiques : on obtient des battements. Le signal est périodique, localisés entre deux nœuds.

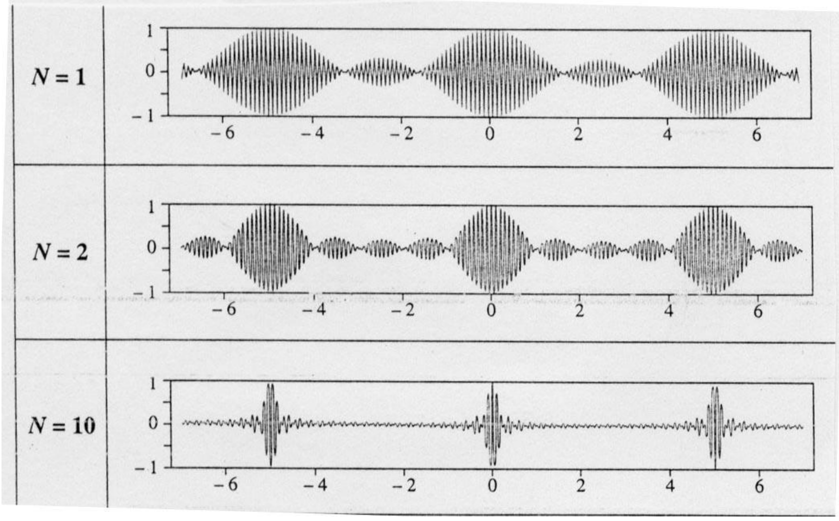


Superposition de 2N+1 ondes monochromatiques en fonction de t, en x = 0.

On a tracé f(t) = $\frac{s(x=0,t)}{2N+1}$

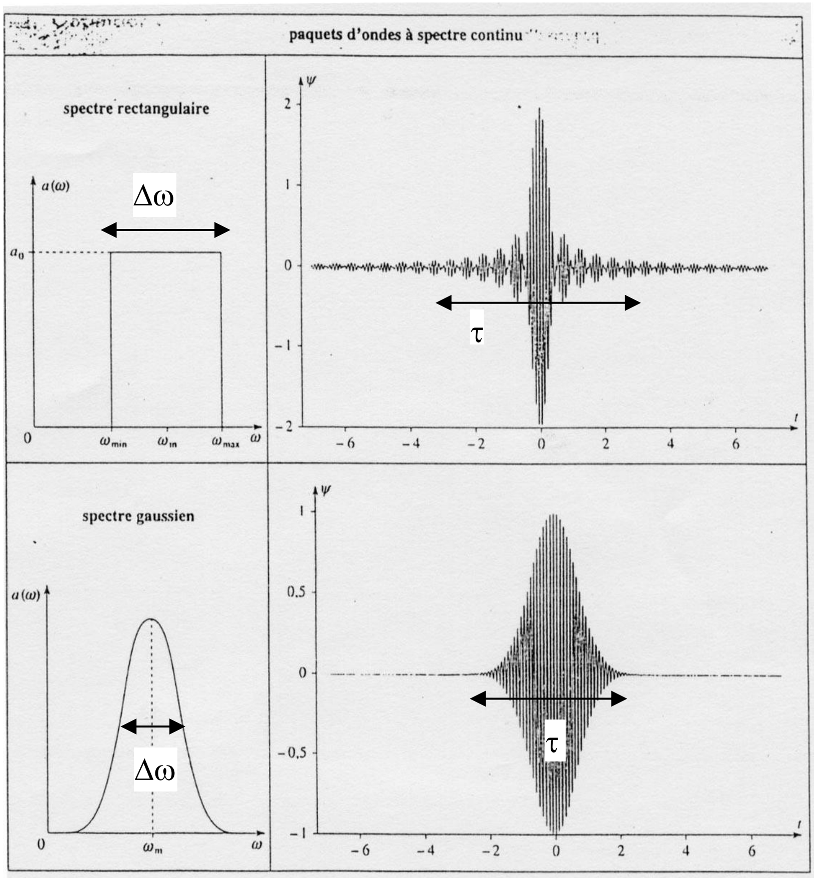
avec s(x,t) = $\sum_{i=0}^{N} S_o \, cos(\,\omega_i t - k_i x)$

et $\Delta\omega = \omega_o/50$



On obtient un signal périodique mais d'extension spatiale finie.
L'extension temporelle τ diminue lorsque N augmente.
On obtient des représentations analogues si on se place à t fixé.

Pour s'affranchir du phénomène de périodicité, il faut sommer une infinité d'ondes monochromatiques et donc transformer la somme discrète sur les pulsations en une somme continue.



Doc. 3 Paquets d'ondes à spectre rectangulaire ou gaussien.

Le paquet d'onde sera d'autant plus localisé que le nombre d'ondes superposé est grand et donc Δω grand.

s(t) est la transformée de Fourier de a(ω).

L'extension temporelle de s(t) est la durée τ pendant laquelle s(t) prend des valeurs non négligeables.
τ est de durée finie, c'est la localisation temporelle.

La largeur spectrale Δω de a(ω) est l'intervalle de pulsations où a(ω) prend des valeurs non négligeables.

On montre que

$$\tau.\Delta\omega \approx 2\pi$$

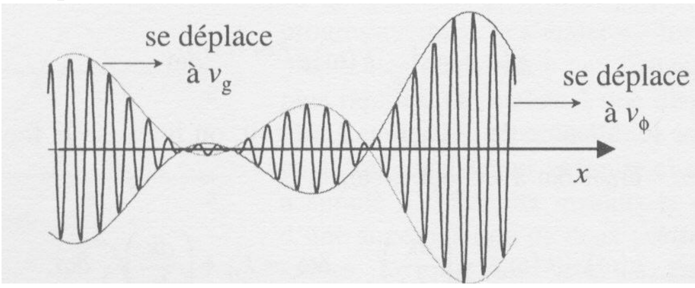
De même pour le couple de variables conjuguées (k,x).

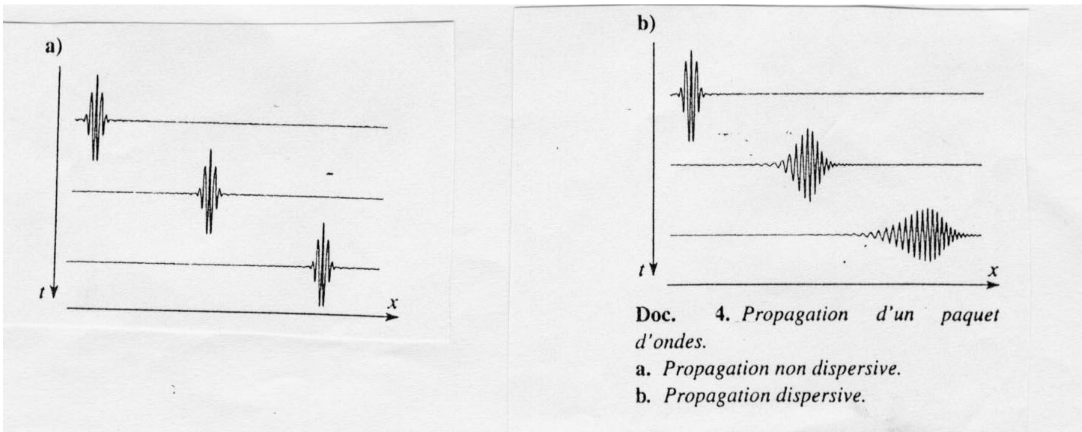
De la transformée de Fourier de b(k), on obtient la fonction ϕ(x).
Δx, la longueur d'un train d'ondes est une distance finie, c'est la localisation spatiale.

$$\Delta x.\Delta k \approx 2\pi$$

L'enveloppe du signal se déplace à la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk'(\omega)}$, c'est la vitesse à laquelle se déplace l'énergie, elle est toujours inférieure à la vitesse de la lumière.

A l'intérieur de l'enveloppe, les variations rapides du signal se déplacent à la vitesse de phase vφ, elle peut être supérieure à la vitesse de la lumière.

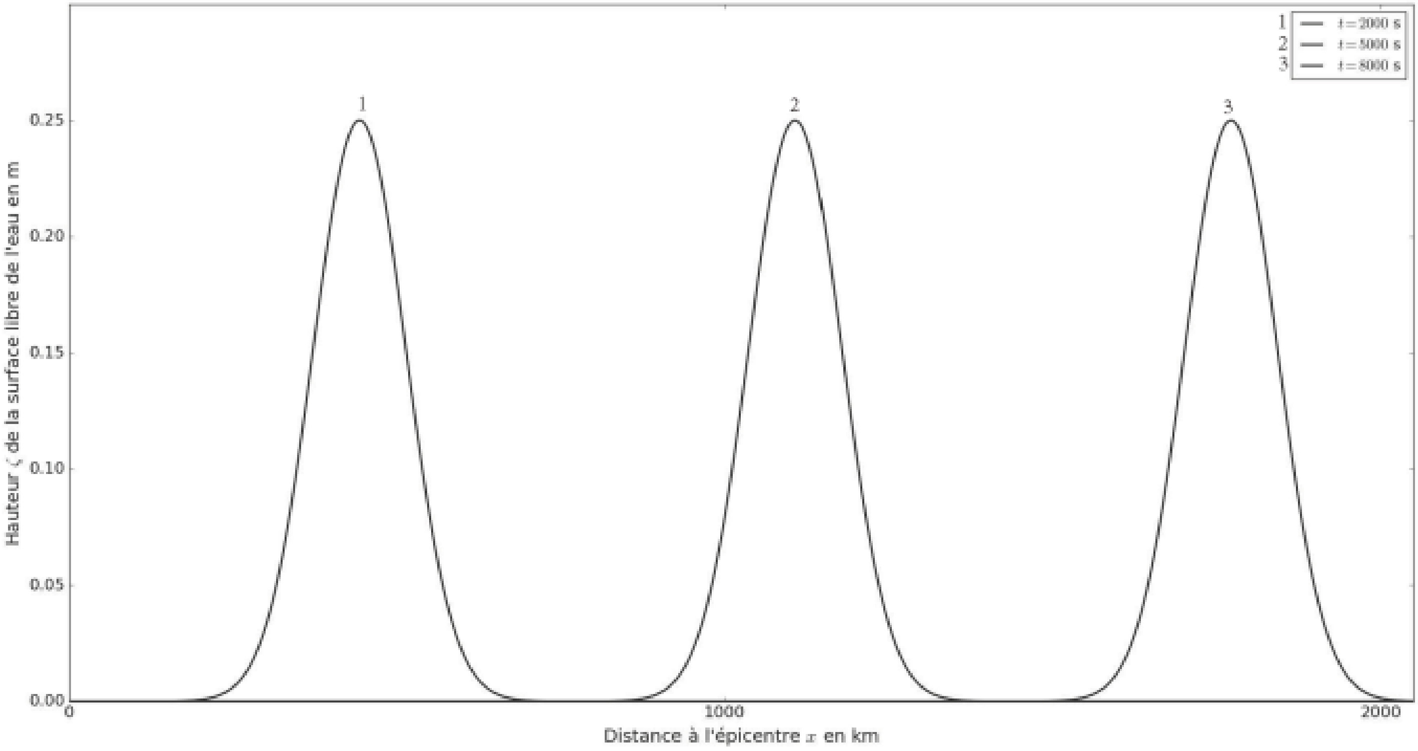




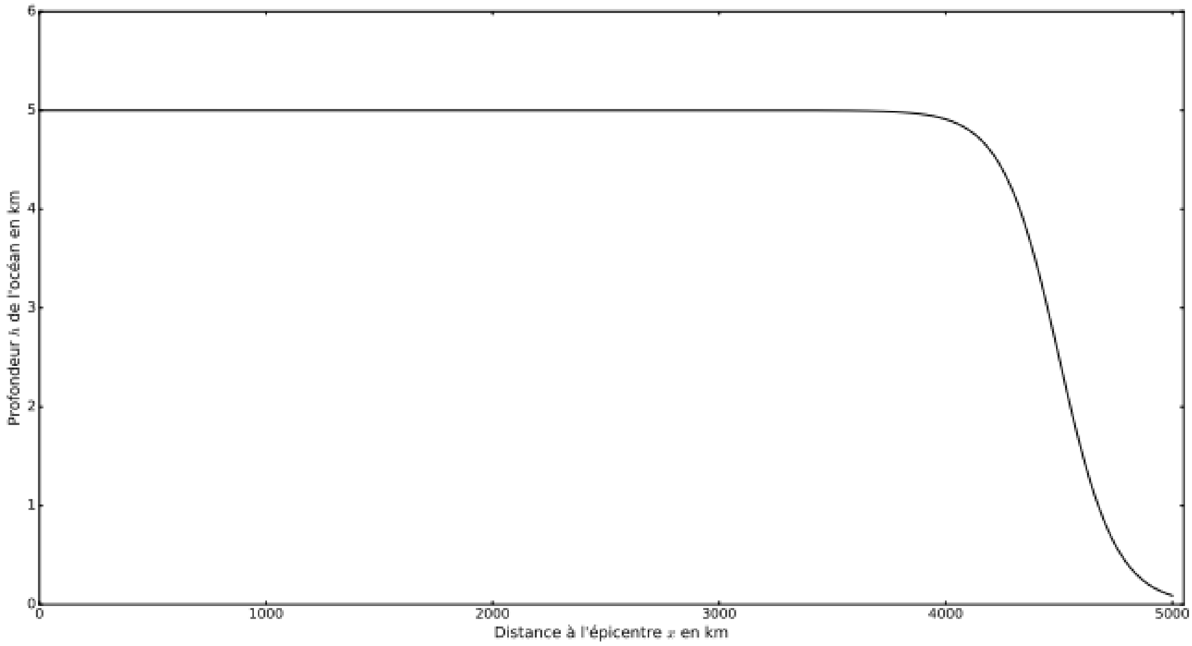
Doc. 4. *Propagation d'un paquet d'ondes.*
a. *Propagation non dispersive.*
b. *Propagation dispersive.*

CCINP Modélisation PSI 2022

Paquet d'onde d'une vague solitaire à la surface de la mer créé en haute mer par un séisme représenté à 3 instants différents, à 3 absisses différentes.
La profondeur de l'océan est constante, la vitesse de groupe est la même pour tous les paquets, l'amplitude des paquets est constante.
La haute mer est un milieu non dispersif, non absorbant.



A l'approche des côtes la profondeur de l'océan diminue



La forme du paquet d’onde se modifie, son amplitude augmente le milieu est amplificateur
La vitesse de groupe diminue.
Le milieu est dispersif.