

MODÉLISATION DE LA CONVERSION D'ÉNERGIE

De nombreux systèmes de récupération d'énergie sont aujourd'hui utilisés pour alimenter des capteurs ou des petits dispositifs électroniques. Ces systèmes récupèrent de l'énergie de l'activité humaine, de la chaleur ambiante, de la lumière ou des vibrations. On étudie dans cette partie un système conçu et mis en œuvre par des ingénieurs néerlandais afin de récupérer de l'énergie issue de la danse, dans le contexte d'une discothèque (voir figure 1). Ce système a fait l'objet d'un brevet, publié en 2010 par l'entreprise Energy Floors®.



FIGURE 1 – Club Watt, Rotterdam (Sustainable Dance Club BV®).

La piste de danse est composée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles, convertissant une partie de l'énergie cinétique des danseurs en énergie électrique. Cette énergie est ensuite utilisée pour éclairer, entre autres, une assemblée de diodes électroluminescentes (LED) multicolores situées sur les dalles et autour de la piste de danse (voir figure 2). Chaque module comprend également un système optique de miroirs permettant d'observer une multitude d'images de chaque LED, simulant un effet de « miroir infini ».

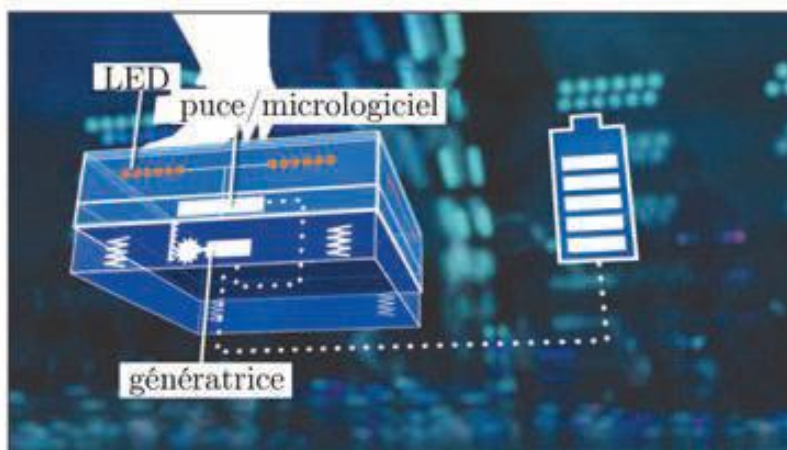


FIGURE 2 – Vue d'artiste du module récupérateur d'énergie (Sustainable Dance Club BV®).

A / Mouvement de la dalle : mise en équation

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on se place à l'échelle d'un module unique, constitué d'une dalle de dimensions $65\text{ cm} \times 65\text{ cm} \times 14,5\text{ cm}$ suspendue par des ressorts mécaniques. Pour simplifier, on la modélise par une masse m reliée à un ressort équivalent de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k , ainsi qu'à un amortisseur mécanique (frottement fluide) de coefficient $D > 0$ (voir figure 3). On note $\vec{g} = -g \vec{e}_x$ le champ de pesanteur supposé uniforme.

La dalle est repérée par sa position x sur un axe vertical ascendant de vecteur unitaire $\vec{e}_x$, l'origine O étant liée au bâti. Son mouvement est étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen ; on note $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x$ son vecteur vitesse dans ce référentiel. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est ensuite converti en mouvement de rotation par un engrenage de type pignon-crémaillère.

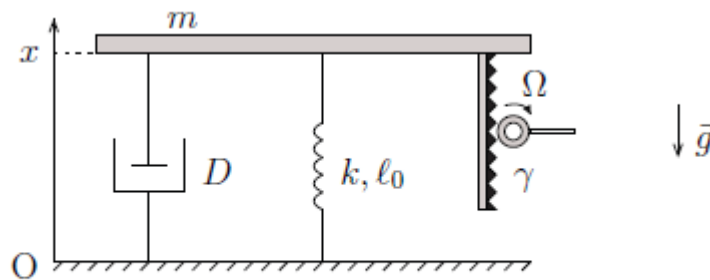


FIGURE 3 – Modèle mécanique de la dalle mobile : schéma et notations.

A1. Exprimer la force de rappel $\vec{F}_r$ exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.

A2. La dalle étant supposée au repos dans un premier temps, déterminer sa position d'équilibre x_{eq} en fonction de ℓ_0 , k , m et g . Vérifier l'homogénéité dimensionnelle et la pertinence physique de l'expression obtenue.

Un danseur de masse M monte sur la dalle : cette dernière se met alors en mouvement, avant de se stabiliser à une nouvelle position d'équilibre x'_{eq} .

A3. Exprimer littéralement x'_{eq} , puis l'affaissement de la dalle $\delta = x_{eq} - x'_{eq}$.

Le constructeur précise ci-dessous un critère de dimensionnement du ressort équivalent :

Document 1. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

Although the dancer is aware that energy is generated from the dance floor, the dancing experience should only be disturbed a little. Therefore, only little movement (several millimeters) of the suspended floor is allowed, and a high spring^a stiffness^b has been selected to achieve this.

a. ressort.

b. raideur.

A4. En choisissant une valeur raisonnable pour M (adulte de corpulence moyenne), proposer une valeur de constante de raideur permettant de répondre en régime quasi-statique à la contrainte imposée.

On cherche à présent à décrire la dynamique du mouvement de la dalle. Outre son poids, la force de rappel du ressort et la force exercée par l'amortisseur mécanique, la dalle subit également :

- une force exercée par le danseur en mouvement, notée $\vec{F}$;
- une force d'amortissement électromagnétique $\vec{F}_a = -\alpha \vec{v}$, avec $\alpha > 0$; on justifiera son expression dans la partie suivante.

A5. Après avoir posé $X = x - x_{eq}$, montrer que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme

$$\ddot{X} + \left(\frac{D + \alpha}{m} \right) \dot{X} + a_0 X = b_0$$

où on donnera les expressions de a_0 et b_0 en fonction de k , m et F .

A6. Pour 5/2 : Le système ainsi modélisé est-il linéaire ? Est-il stable ? Justifier la réponse.

B / Puissance électrique reçue par les LED

Le mouvement de translation de la dalle, de vitesse $\dot{x}(t)$, entraîne la rotation de la roue dentée schématisée sur la figure 3. On admet que sa vitesse angulaire de rotation s'exprime $\Omega = \gamma \dot{x}(t)$, avec γ le rapport de transmission. L'énergie cinétique de la roue dentée est par la suite convertie en énergie électrique au moyen d'une génératrice, servant alors à éclairer un réseau de LED disposées sur la partie supérieure des dalles.

On modélise dans un premier temps la génératrice par l'association série d'une force électromotrice (fem) $u = K_t \Omega$, d'une résistance R et d'une inductance propre L . On s'intéresse à la puissance débitée par ce dipôle dans le réseau de LED, assimilé à une résistance de charge RL (voir figure 4).

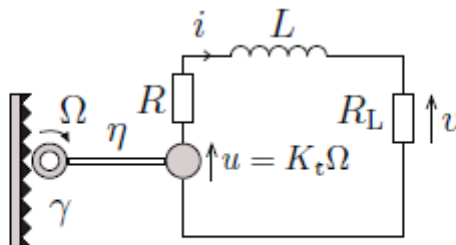


FIGURE 4 – Circuit électrique équivalent : schéma et notations.

B1. Donner sans démonstration l'expression de l'impédance complexe d'un conducteur ohmique de résistance R , puis d'une bobine idéale d'inductance propre L en fonction de la pulsation d'excitation du circuit ω .

B2. La pulsation ω étant celle imposée par les pas du danseur, estimer son ordre de grandeur.

B3. Sachant que $R = 19,2 \, \Omega$ justifier l'approximation proposée ci-dessous par le constructeur :

Document 2. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :
As such, the armature winding inductance ($L = 1,67 \, \text{mH}$) has been neglected because of the low excitation frequency of the system.

B4. Dans le cadre de l'approximation précédente, exprimer la tension v aux bornes de la résistance R_L en fonction de u , R et R_L .

B5. Dédurre de la question précédente que la puissance électrique instantanée $P_L(t)$ reçue par le réseau de LED peut s'écrire

$$P_L(t) = A[K_t \gamma \dot{x}(t)]^2$$

avec A un facteur à exprimer en fonction de R et R_L uniquement.

La génératrice concède des pertes au cours de son fonctionnement. Son rendement est défini par

$$\eta = P_u(t) / P_p(t) \quad (0 < \eta < 1)$$

où $P_u(t)$ et $P_p(t)$ désignent respectivement la puissance instantanée fournie par la fem et la puissance instantanée prélevée par la génératrice à la dalle mobile.

B6. Exprimer $P_u(t)$, puis $P_p(t)$ en fonction de K_t , γ , R , R_L , $\dot{x}(t)$ et η .

B7. Justifier de manière argumentée que cette puissance prélevée se traduit, d'un point de vue de la dalle, par une force de frottement de la forme $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$ (voir partie A), avec

$$\alpha = (K_t \gamma)^2 / [\eta(R + R_L)]$$

B8. On donne $\eta = 50\%$, $K_t = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ N.m.A}^{-1}$. En prenant $R_L = 150 \Omega$ et $\gamma = 2,2 \cdot 10^4 \text{ rad.m}^{-1}$, calculer la valeur de α . Sachant que $D = 10 \text{ N.s.m}^{-1}$, justifier le commentaire du constructeur reporté ci-dessous :

Document 3. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

When energy is generated for lighting, the damping^a of the system is determined by the dc generator and its electrical load. In that case, the mechanical damping may be neglected.

^a. amortissement.

C / Pour 5/2 et PSI* Alimentation électrique des LED

On cherche ici à modéliser plus finement le circuit réel d'alimentation des LED. Dans le but d'obtenir une régulation linéaire de l'intensité lumineuse, on insère les LED, assimilées à une résistance de charge R_L , dans le montage représenté sur la figure 5 (à gauche), commandé par la tension u aux bornes de la génératrice. Les quatre diodes D_1 , D_2 , D_3 et D_4 sont supposées idéales (sans seuil). On cherche à déterminer la tension v aux bornes de la résistance R_L .

On donne ci-dessous le schéma ainsi que la caractéristique courant-tension d'une diode idéale :



Ce dipôle n'est pas symétrique et vérifie les égalités conditionnelles :

Si $u < 0$ alors $i = 0$, la diode peut être représentée par un interrupteur ouvert, elle est dite bloquée,

Si $i > 0$ alors $u = 0$, la diode peut être représentée par un interrupteur fermé, elle est dite passante.

On appelle maintenant u la tension délivrée par le générateur et u_i la tension aux bornes de D_i orientée comme sur le schéma ci-dessus, $i \in [1 ; 4]$

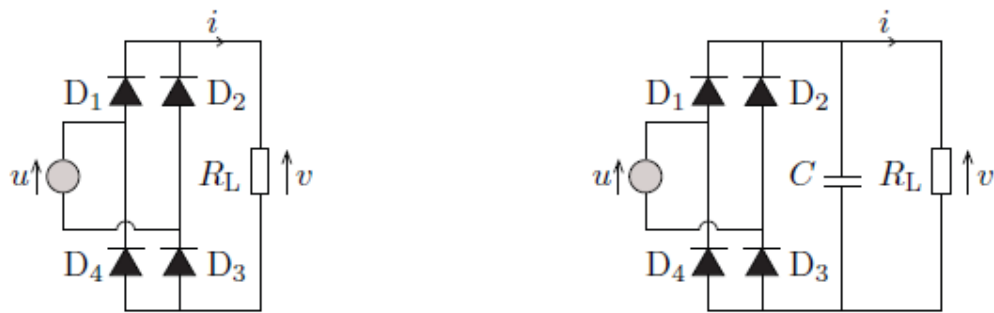


FIGURE 5 – Circuits électriques d'alimentation des LED : schémas et notations.

C1. Exprimer u en fonction de u_1 et u_4 , puis en fonction de u_2 et u_4 .

C2. Montrer que la tension u positive est compatible avec D_1 et D_3 passantes et D_2 et D_4 bloquées. En déduire la relation entre v et u . Traiter de même le cas d'une tension u négative.

On considère une tension d'entrée du type $u(t) = a \cos(\omega t)$.

C3. Représenter sur un même graphe l'évolution temporelle des tensions u et v . Quelle est la valeur moyenne de $u(t)$? Celle de $v(t)$?

C4. En notant $f_0 = \omega/(2\pi)$ la fréquence du signal $u(t)$, quelles fréquences sont susceptibles d'être présentes dans le signal $v(t)$? Aucun calcul n'est attendu : on pourra répondre en schématisant l'allure du spectre des deux tensions.

C5. Sachant que la luminosité des LED est directement reliée au courant qui les traverse, quel pourrait être l'inconvénient visuel (voire médical) de ce montage ?

Afin de corriger ce problème, on rajoute dans le circuit un convertisseur, assimilé à un condensateur de capacité C connecté en parallèle avec la résistance R_L (voir figure 5, à droite). Ce condensateur de « découplage » permet de diminuer les variations de la tension de sortie v , à condition que son temps caractéristique τ de décharge dans la résistance R_L soit grand devant la période du signal d'entrée. Cette opération s'appelle un lissage de tension.

C6. En notant $\tau = R_L^\alpha C^\beta$, déterminer soigneusement les exposants α et β à l'aide d'une analyse dimensionnelle.

C7. On donne $R_L = 150 \, \Omega$. En considérant l'ordre de grandeur de ω obtenu à la question **B2**, en déduire une condition numérique sur C permettant d'assurer un lissage satisfaisant de la tension v , et donc du courant i circulant dans le réseau de LED. Cette condition est-elle réalisable avec une boîte à décades de capacité habituellement utilisée en TP ?

D / Réponse indicielle

Dans cette partie, on impose à la dalle, initialement à sa position d'équilibre et immobile, un échelon de force $F = F_0$ à partir de l'instant $t = 0$, et on cherche à quantifier la puissance fournie au réseau de LED. En utilisant les parties précédentes, l'équation du mouvement de la dalle peut être approchée par

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F_0}{m}$$

où $X = x - x_{eq}$ (voir partie A). Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \frac{F_0}{k}$$

On donne la valeur des paramètres mécaniques : $m = 35 \text{ kg}$, $k = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N.m}^{-1}$. On prendra numériquement $\alpha = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N.s.m}^{-1}$.

D1. Exprimer ω_0 en fonction de k et m et Q en fonction de k , m et α . Préciser la dimension et la signification physique des quantités ω_0 et Q . Comment les nomme-t-on habituellement ? calculer numériquement les valeurs de ω_0 et Q .

D2. Exprimer la solution particulière de l'équation différentielle précédente.

Compte tenu des ordres de grandeur, on admet que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire de façon approchée

$$X(t) \simeq \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{1}{1-Q^2} (e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\omega_0 t/Q}) \right]$$

D3. Déterminer, en le justifiant, le type de régime transitoire d'évolution de $X(t)$ parmi les adjectifs suivants : pseudo-périodique, critique, apériodique. Vérifier que cette solution satisfait aux conditions initiales précisées en début de partie.

D4. En déduire la loi d'évolution de la vitesse $\dot{x}(t)$ de la dalle.

D5. Montrer finalement que dans le cadre du modèle développé à la question **B5**, la puissance électrique instantanée reçue par les LED s'écrit sous la forme

$$P_L(t) = K F_0^2 (e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\omega_0 t/Q})^2$$

avec K un facteur constant qu'on ne cherchera pas à déterminer.

D6. Dans l'expression de $P_L(t)$, une exponentielle converge beaucoup plus vite que l'autre : déterminer laquelle. Montrer alors qu'aux « temps longs », $P_L(t)$ décroît exponentiellement, selon un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de ω_0 et Q .

La figure 6, adaptée de la notice constructeur, représente l'évolution de la puissance électrique prédite (signal de sortie) sous l'effet de plusieurs échelons de force successifs d'intensité différente (signal d'entrée).

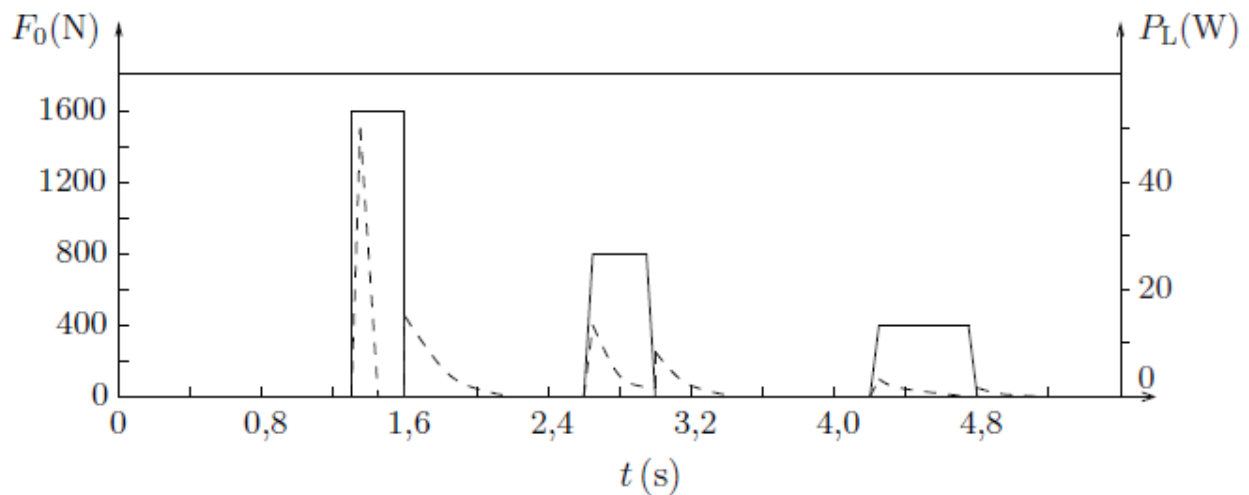


FIGURE 6 – Évolutions temporelles de la force et de la puissance électrique : simulations numériques (adapté de *Energy Floors*[®]).

D7. Associer chaque courbe (en trait plein, en pointillés) à la grandeur correspondante : F_0 , P_L . Indiquer les intervalles temporels pendant lesquels sont appliqués des échelons de force, ainsi que les valeurs de F_0 associées.

Le constructeur précise :

Document 4. *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011 :

Energy is both generated when the tile ^a moves downward due to the force applied by the dancer and when the tile moves upward due to the spring even when there is no contact with the dancer.

^a. dalle.

D8. Ce commentaire est-il en cohérence avec la figure 6 ? Comment justifier que la puissance électrique tende vers zéro au bout d'un temps suffisamment long, même en présence d'une force appliquée non nulle ?

D9. Analyser l'influence de l'échelon de force F_0 sur l'allure de $PL(t)$, en lien avec la question **D5**.

D10. Le temps typique de décroissance τ de la puissance électrique lors de l'application d'un échelon de force semble-t-il dépendre de F_0 ? Estimer son ordre de grandeur, puis le comparer à la prédiction obtenue à la question **D6**.

E / Forçage sinusoïdal

On teste à présent le système au plus proche de ses conditions réelles d'utilisation. Un expérimentateur danse sur la dalle et exerce sur elle une force $\vec{F}$, dont la norme est mesurée au moyen d'un capteur de force placé sur celle-ci (voir figure 7). Le signal obtenu montre qu'en dansant, l'expérimentateur reste à tout instant en contact avec la dalle. On modélise ce signal de manière approximative par l'équation

$$F(t) = F_0 + F_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

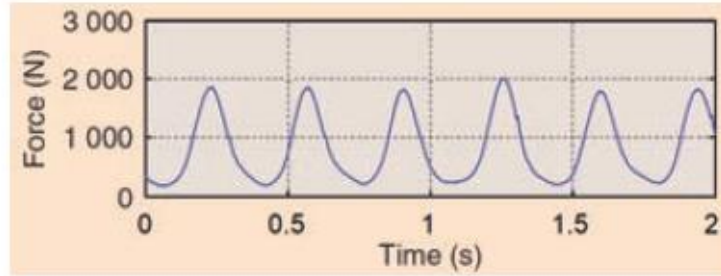


FIGURE 7 – Évolution expérimentale de la force F exercée par le danseur (de masse 83 kg) sur la dalle au cours du temps (*Energy Floors*®).

E1. Estimer la valeur des coefficients de modélisation F_0 , F_1 et ω pour le signal représenté sur la figure 7.

En redéfinissant X comme l'écart entre la position de la dalle et sa position d'équilibre atteinte lorsque le danseur est immobile, l'équation du mouvement de la dalle peut s'écrire

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_1}{m} \cos(\omega t + \varphi)$$

ω_0 a la même expression que dans la question **D1** et $Q = \frac{\eta(R + R_L)\sqrt{km}}{(K_t\gamma)^2}$ avec les mêmes valeurs numériques que dans la partie D.

En régime établi, la solution de cette équation différentielle est de la forme

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \psi)$$

On lui associe la grandeur complexe $\underline{X}(t) = X_0 e^{i(\omega t + \psi)}$ telle que $X(t) = \text{Re}(\underline{X}(t))$.

E2. Déterminer l'expression de l'amplitude X_0 des oscillations de la dalle en fonction de ω_0 , Q , m , ω et F_1 .

E3. Déterminer l'expression de la vitesse complexe $\underline{V}(t)$ en fonction de $\underline{X}(t)$. Exprimer l'amplitude de vitesse V_0 de la dalle en fonction de X_0 et ω .

En utilisant les résultats des parties précédentes, il est possible de montrer (non demandé) que la moyenne temporelle de la puissance fournie aux LED s'exprime

$$\langle P_L \rangle = \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2K_t^4 \gamma^4 + 2\eta^2 km (R + R_L)^2 [(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega)]^2}$$

Dans la suite, on s'intéresse à l'influence de l'un des paramètres suivants, ω , γ ou R_L , sur la puissance moyenne récupérée $\langle P_L \rangle$, les autres paramètres étant maintenus constants.

E4. Analyser les comportements asymptotiques de $\langle P_L \rangle$ aux basses et aux hautes fréquences.

Déterminer, littéralement puis numériquement, la pulsation ω pour laquelle $\langle P_L \rangle$ est maximale, ainsi que l'expression littérale de la puissance moyenne récupérée maximale notée $\langle P_L \rangle_{\max}$. Tracer alors l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de ω .

Ce système a été testé en 2015 dans l'émission scientifique télévisée *On n'est pas que des cobayes*, à l'occasion de la Fête de la Science. Deux équipes, composées chacune de deux danseurs et deux danseuses, s'affrontent sur la piste de danse, avec pour objectif de générer le maximum d'énergie électrique pendant une durée fixée (30 secondes environ) :

- l'équipe 1 danse sur un morceau de salsa, de tempo 115 battements.min⁻¹ ;
- l'équipe 2 danse sur un morceau de disco, de tempo 125 battements.min⁻¹.

E5. En faisant l'hypothèse que les deux équipes ont même masse totale et dansent de la même façon, quelle équipe a selon vous gagné ce duel, en vous fiant aux résultats établis à la question précédente ?

Dans les questions suivantes, on considère que la pulsation ω imposée par le danseur est fixée.

E6. En exploitant l'expression de la puissance moyenne donnée à la page précédente, tracer, en la justifiant, l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de γ , les paramètres ω et R_L étant fixés.

E7. De la même manière, tracer, en la justifiant, l'allure qualitative de $\langle P_L \rangle$ en fonction de R_L , les paramètres ω et γ étant fixés.

Le graphique 3D ci-dessous, fourni par le constructeur, montre que la puissance de sortie dépend fortement du rapport de transmission γ et de la résistance de charge R_L .

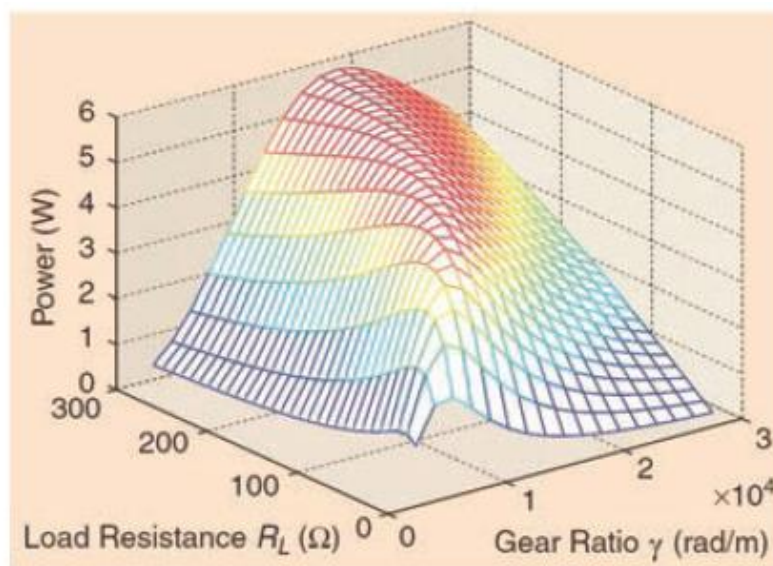


FIGURE 8 – Évolution de la puissance électrique de sortie en fonction du rapport de transmission et de la résistance de charge (*Energy Floors*®).

E8. Confronter vos prédictions d'évolution de $\langle P_L \rangle$ en fonction de γ (question E6), puis en fonction de R_L (question E7) à la figure 8.

E9. Quel jeu de valeurs (γ, R_L) proposeriez-vous pour dimensionner ce système ? Justifier.