

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le devoir se compose de deux parties qui peuvent être traitées de manière totalement indépendantes. Dans chaque partie, les sections sont en partie indépendantes les unes des autres.

**Première partie**

**Micro-systèmes électrostatiques**

Dans cette partie, on s'intéresse aux phénomènes électrostatiques mis en jeu entre des micro-structures conductrices.

**1 - Énergie électrostatique**

Dans un premier temps, on cherche à établir l'expression de l'énergie électrostatique pour une distribution continue surfacique de charge.

On considère deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$ , isolées dans le vide, situées en deux points  $P_1$  et  $P_2$  séparés d'une distance  $r_{12}$  (cf. figure 1). On note  $V_1$  (resp.  $V_2$ ) le potentiel électrostatique produit par  $q_2$  (resp.  $q_1$ ) en  $P_1$  (resp.  $P_2$ ).

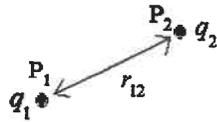


Figure 1.

- 1) En s'appuyant sur le travail des forces électrostatiques mises en jeu, déterminer l'expression de l'énergie électrostatique  $E_e$  de ce système à deux charges ( $E_e$  est aussi appelée énergie potentielle d'interaction entre les deux charges). On supposera  $E_e$  nulle lorsque les charges sont très éloignées et on exprimera  $E_e$  en fonction de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_{12}$  et  $\epsilon_0$ .
- 2) Exprimer  $E_e$  en fonction de  $q_1$  et  $V_1$  puis en fonction de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .
- 3) Montrer que pour un système de  $N$  charges  $q_1, \dots, q_N$ , soumises respectivement aux potentiels  $V_1, \dots, V_N$ , l'énergie électrostatique peut s'écrire sous la forme : 
$$E_e = \lambda \sum_{i=1}^{i=N} q_i V_i$$
. Déterminer la valeur de  $\lambda$ . Pour le calcul on notera  $r_{ij}$  la distance séparant la charge  $q_i$  de la charge  $q_j$ .
- 4) En déduire l'expression sous forme intégrale de  $E_e$  pour un conducteur (C), isolé, possédant une distribution continue surfacique de densité de surface  $\sigma(M)$  et une distribution de potentiel  $V(M)$ . On notera  $dS$  l'élément de surface autour d'un point  $M$  quelconque du conducteur (cf. figure 2).

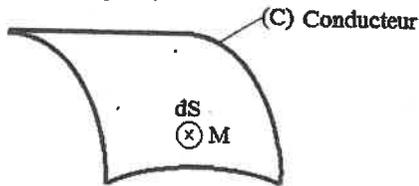


Figure 2.

- 5) Que devient l'expression de  $E_e$  lorsque le potentiel  $V$  est constant sur l'ensemble de la distribution de charge ? On notera  $Q$  la charge totale du conducteur et on exprimera  $E_e$  en fonction de  $Q$  et  $V$ .

**2 - Système électrostatique à 3 micro-électrodes**

On s'intéresse maintenant aux phénomènes électrostatiques dans le système constitué des trois électrodes planes parfaitement conductrices (1), (2) et (3) (cf. figure 3).

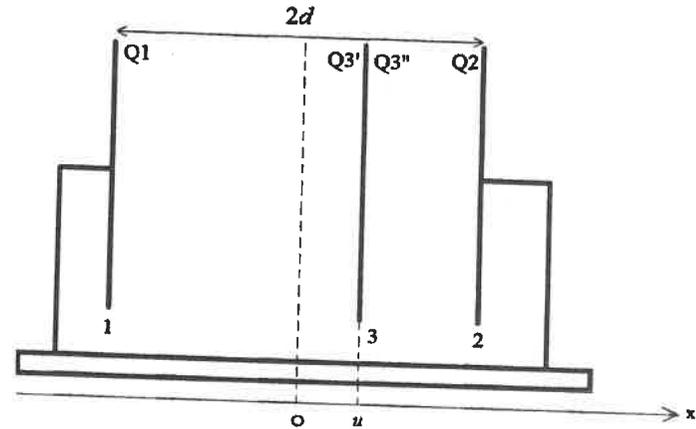


Figure 3.

On note  $C_{13}$  la capacité du condensateur constitué des électrodes (1) et (3), et  $C_{23}$  celle du condensateur constitué des armatures (2) et (3).

On supposera les 2 condensateurs parfaitement plans (en influence totale et sans effets de bords).

On note  $A$  la surface des 3 électrodes. Le milieu entre les électrodes est supposé parfaitement isolant, assimilable à du vide de constante diélectrique  $\epsilon_0$ .

Les électrodes (1) et (2) distantes de  $2d$  sont fixes. L'électrode (3) est mobile uniquement selon l'axe  $Ox$ , repérée par son abscisse  $u$ . On considérera l'épaisseur de l'électrode (3) toujours négligeable devant  $|u|$ . L'origine  $O$  est équidistante des électrodes (1) et (2). On notera  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire porté par  $Ox$ .

**2a - Cas où l'électrode (3) est isolée électriquement : micro-capteur**

On suppose qu'initialement le système n'est constitué que des électrodes (1) et (2) de potentiels électrostatiques respectifs  $V_1$  et  $V_2$  imposés par deux générateurs de tension continue et portant respectivement les charges  $Q_1 = +Q$  et  $Q_2 = -Q$ , uniformément réparties en surface.

On introduit par la suite l'électrode (3), initialement non chargée, à l'abscisse  $u$ . Soumise à une force extérieure au système, cette électrode se déplace uniquement selon l'axe Ox tout en restant constamment isolée électriquement.

On note  $V_3$  le potentiel de l'électrode (3).

- 6) En vous appuyant sur le théorème de Gauss, déterminer les valeurs des charges  $Q_3'$  et  $Q_3''$  sur chacune des faces de l'électrode (3).
- 7) De la même manière, déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}$  entre les électrodes (1) et (3). On exprimera  $\vec{E}$  en fonction de  $Q$ ,  $A$ ,  $\epsilon_0$  et  $\vec{e}_x$ .
- 8) En déduire l'expression de la différence de potentiel  $V_1 - V_3$  en fonction de  $Q$ ,  $A$ ,  $\epsilon_0$ ,  $d$  et  $u$ .
- 9) Déterminer l'expression de  $C_{13}$  en fonction de  $Q$ ,  $V_1$  et  $V_3$ , puis de  $A$ ,  $d$ ,  $u$  et  $\epsilon_0$ . Par analogie, donner l'expression de  $C_{23}$ .
- 10) Déterminer les expressions des énergies potentielles électrostatiques  $E_{13}$  et  $E_{23}$  stockées respectivement dans les condensateurs  $C_{13}$  et  $C_{23}$ , en fonction de  $Q$ ,  $C_{13}$  et  $C_{23}$ , puis de  $Q$ ,  $A$ ,  $u$ ,  $d$  et  $\epsilon_0$ .
- 11) A partir des énergies potentielles calculées précédemment, déterminer en fonction de  $Q$ ,  $A$  et  $\vec{e}_x$ , les expressions de  $\vec{f}_{13}$  et  $\vec{f}_{23}$ , forces électrostatiques s'exerçant sur l'électrode (3) dues respectivement à l'électrode (1) et à l'électrode (2).
- 12) Conclure sur la force électrostatique résultante s'exerçant sur l'électrode (3). Pouvait-on prévoir qualitativement ce résultat ? (justifier succinctement)
- 13) Déterminer l'expression de  $V_3$  en fonction de  $u$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  et  $d$ .

### 2b - Cas où le potentiel sur l'électrode (3) est maintenu constant : micro-actionneur

On considère maintenant le système de la figure 4 dans lequel l'électrode (3) est rendue solidaire de l'électrode (1) via un ressort de raideur  $k$ . Un générateur de tension impose entre les électrodes (2) et (3) une différence de potentiel  $V$  et les électrodes (1) et (3) sont en court-circuit (au même potentiel).

On supposera que la longueur à vide du ressort est égale à  $d$ .

- 14) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle électrostatique  $E_{23}$  stockée dans le condensateur  $C_{23}$ , en fonction de  $A$ ,  $d$ ,  $u$ ,  $V$  et  $\epsilon_0$ . Que dire de l'énergie électrostatique  $E_{13}$  stockée dans le condensateur  $C_{13}$ .
- 15) A partir de  $E_{23}$  calculée précédemment, déterminer l'expression de la force électrostatique  $\vec{F}_x$  s'appliquant sur l'électrode (3), en fonction de  $C_{23}$ ,  $V$  et  $\vec{e}_x$  puis en fonction de  $A$ ,  $V$ ,  $\epsilon_0$ ,  $d$ ,  $u$  et  $\vec{e}_x$ .

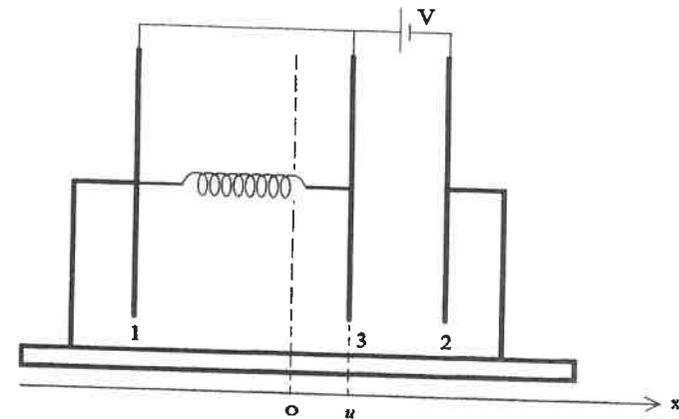


Figure 4.

On note  $u_{eq}$  l'abscisse d'une position d'équilibre (en supposant qu'elle existe) de l'électrode (3).

- 16) Déterminer l'expression de  $V^2$  en fonction de  $u_{eq}$ ,  $k$ ,  $A$ ,  $d$  et  $\epsilon_0$ .
- 17) Représenter graphiquement l'allure de  $V^2$  en fonction de  $u_{eq}$  pour  $u_{eq} \in [0, d]$ .
- 18) Montrer graphiquement que pour une tension appliquée strictement inférieure à une tension critique  $V_{cr}$  que l'on déterminera, il existe deux positions d'équilibre.

On admet que seule la position d'équilibre d'abscisse inférieure à  $d/3$  est stable.

- 19) Que se passe-t-il si l'abscisse de l'électrode (3) dépasse  $d/3$  ?

### Application numérique

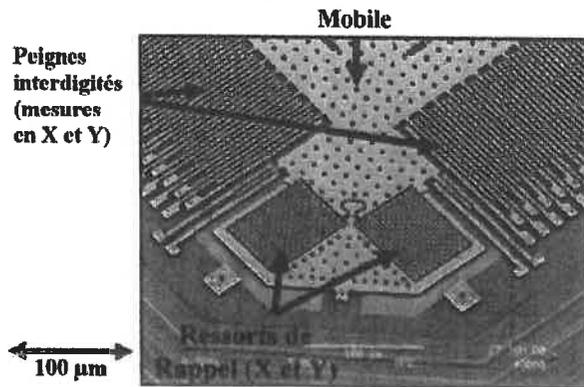
Les valeurs typiques pour un micro-système sont :  $k = 1,2 \cdot 10^4$  N/m,  $A = 0,08$  mm<sup>2</sup> et  $d = 1$  μm. On rappelle  $\epsilon_0 = 8,81 \cdot 10^{-12}$  F/m.

- 20) Déterminer un ordre de grandeur de la valeur numérique de  $V_{cr}$ .

## Deuxième partie

### Étude d'un micro-accéléromètre

Une photographie obtenue par microscopie électronique d'un micro-accéléromètre 2 axes est présentée sur l'image ci-dessous. On peut observer les microstructures présentes en surface de dimensions typiquement de l'ordre de la dizaine de micromètres. La masse sismique (mobile) est reliée au bâti par des micro-poutres flexibles insérées dans deux systèmes de peignes interdigités. Chaque peigne est solidaire d'un ressort de rappel.



Micro-accéléromètre 2 axes.

La modélisation d'un axe de l'accéléromètre est présentée sur la figure 5.

La masse mobile  $m$  est posée sur un support horizontal et glisse selon l'axe Ox.

Le mobile, repéré par la position  $x_c(t)$  de son centre de gravité, est rendu solidaire du support via deux systèmes ressort/amortisseur de raideur  $k$  et de coefficient d'amortissement visqueux  $f$ .

Le support peut aussi se déplacer en bloc selon Ox : on repère sa position par  $x_b(t)$ .

On supposera que lorsque le système masse-ressort est au repos dans le référentiel du support, le mobile est situé à égale distance des électrodes (1) et (2), à savoir  $x_c = x_b$ .

Les micro-poutres sont modélisées par les électrodes parfaitement conductrices (1), (2) et (3).

L'électrode centrale (3) est solidaire de la masse mobile. On note  $m$  la masse totale mobile.

Les électrodes (1) et (2) sont connectées respectivement aux générateurs de tension  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ .

La tension  $v_3(t)$  constitue la sortie de l'accéléromètre.

On note  $2d$  la distance entre les deux électrodes (1) et (2).

Le milieu entre les électrodes est assimilable à du vide.

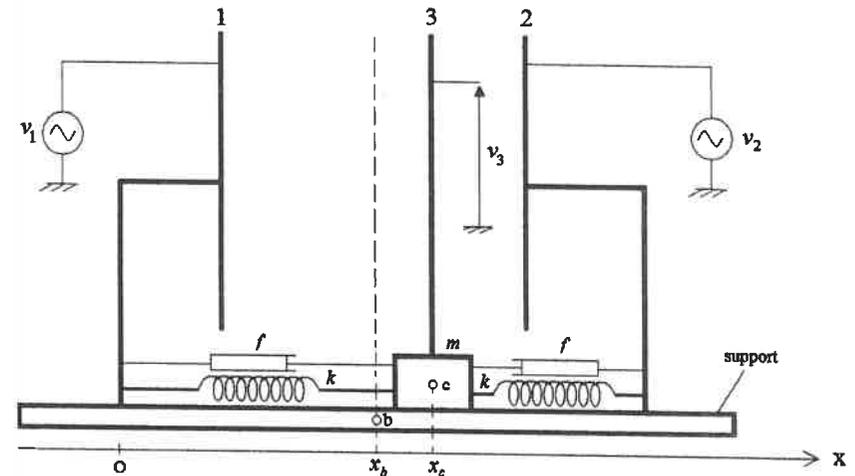


Figure 5.

#### 1- Étude mécanique de l'accéléromètre

On supposera dans toute cette partie que la résultante des forces électrostatiques agissant sur l'électrode (3) est nulle.

Dans un premier temps, on suppose le support immobile (l'abscisse du support  $x_b(t)$  est constante).

On pose :  $\alpha = \sqrt{\frac{f^2}{2km}}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ .

21) Déterminer l'expression de  $x_c(t)$  pour  $t > 0$  lorsque  $\alpha = 1$  et compte-tenu des conditions initiales :  $x_c(0) = X_0$  et  $\left(\frac{dx_c}{dt}\right)(0) = 0$ .

22) Tracer l'allure de  $x_c(t)$ .

On suppose maintenant le support mobile et on note  $a(t) = \frac{d^2 x_b}{dt^2}$  son accélération.

On note  $u(t) = x_c(t) - x_b(t)$  le déplacement du mobile sur le support.

23) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  dans laquelle on fera apparaître les paramètres  $\alpha$  et  $\omega_0$ .

On s'intéresse au régime harmonique en supposant que l'accélération du support est de type sinusoïdale. On note  $a$  l'expression complexe de  $a(t)$  et  $u$  celle de  $u(t)$ .

- 24) Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $T = \omega_0^2 \frac{u}{a}$ .
- 25) Déterminer l'expression de  $T$  lorsque  $\alpha=1$  et tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondants (module et phase) lorsque  $\omega_0 = 4.10^5$  rd/s. Tracer aussi l'allure des diagrammes de Bode réels.

On suppose que le support se déplace très lentement par rapport au mouvement du mobile, ce qui revient à se placer dans le régime  $\omega \ll \omega_0$ .

- 26) Montrer que  $u(t)$  peut s'écrire de façon approchée sous la forme :  $u(t) = \gamma a(t)$ . Déterminer l'expression de  $\gamma$ .

## 2- Étude de l'électronique de conditionnement du micro-accéléromètre

On note  $C_{13}$  la capacité du condensateur constitué des électrodes (1) et (3) et  $C_{23}$  la capacité du condensateur constitué des électrode (2) et (3).

Dans cette partie, on négligera les variations des capacités  $C_{13}$  et  $C_{23}$  en fonction du temps.

Les condensateurs sont insérés dans le système de conditionnement électronique de la figure 6.

L'oscillateur sinusoïdal délivre une tension  $v_1(t) = V_{cc}/2 + V_1 \sin(\omega t)$ . La tension  $v_2(t)$  est déphasée de  $\pi$  par rapport à  $v_1(t)$  :  $v_2(t) = v_1(t + \pi/\omega)$ .

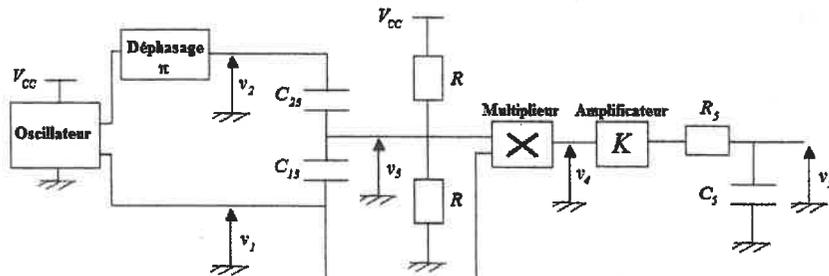


Figure 6.

- 27) En supposant que l'impédance d'entrée du multiplieur est infinie, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $v_3(t)$ . On mettra cette équation sous la forme :

$$\frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{\tau} = F(t)$$

où l'on déterminera l'expression de  $\tau$  et on mettra la fonction  $F(t)$  sous la forme :  $F(t) = A + B \omega \cos(\omega t)$  en exprimant  $A$  et  $B$  en fonction de  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ,  $V_1$  et  $\tau$ .

La résolution de cette équation différentielle peut s'effectuer en utilisant le théorème de superposition qui permet de rechercher la solution complète en considérant la solution sans second membre et les contributions de chaque terme forçant.

- 28) Déterminer l'expression de  $v_3(t)$  en régime forcé.
- 29) En déduire l'expression approchée de  $v_3(t)$  lorsque  $\omega \tau \gg 1$  et dans le cas où  $v_3(0) = V_{cc}/2$ .

On utilisera pour la suite du problème l'expression approchée de  $v_3(t)$  obtenue à la question précédente.

- 30) En assimilant  $C_{13}$  et  $C_{23}$  à des condensateurs plans parfaits de surface  $A$ , déterminer l'expression de  $v_3(t)$  en fonction de  $V_{cc}$ ,  $u$ ,  $d$ ,  $V_1$  et  $\omega$ .
- 31) Déterminer l'expression de la tension  $v_4(t)$  à la sortie du multiplieur.
- 32) Montrer que pour un choix judicieux du temps caractéristique  $R_5 C_5$ , la tension  $v_5(t)$  peut s'écrire sous la forme approchée :  $v_5(t) \approx V_0 + S a(t)$ .

## 3- Analyse de spécifications d'un accéléromètre typique - Applications numériques.

Les spécifications de l'accéléromètre sont les suivantes :

- tension d'alimentation : 5 V
- tension de repos : 2,5 V
- tension de sortie maximale : 4,5 V
- sensibilité :  $0,1 \text{ V.m}^{-1}.\text{s}^2$
- accélération maximale supportée :  $40.10^3 \text{ m}^{-1}.\text{s}^2$
- bande passante : 400 Hz
- pulsation de résonance mécanique :  $4.10^5$  rd/s
- temps de réponse à 5% : 5 ms
- fréquence de modulation : 140 kHz
- masse mobile :  $0,5 \mu\text{g}$

De plus, on choisit  $C_5 = 10 \text{ nF}$ .

- 33) Déterminer les valeurs numériques de  $V_0$ ,  $S$ ,  $K$ ,  $k$  et  $R_5$ .
- 34) Déterminer la valeur maximale de l'accélération  $a_{max}$  mesurable par ce capteur.
- 35) Déterminer le déplacement maximum  $u_{max}$  supporté par la poutre centrale.
- 36) L'hypothèse  $\omega \tau \gg 1$  est-elle respectée ?