

## L'épreuve de la caserne

L'épreuve de la caserne (figure 7) utilise un tapis roulant motorisé par une machine asynchrone. Nous nous proposons ici d'en décrire le fonctionnement en régime permanent. Aucune connaissance préalable sur la machine asynchrone n'est requise.



Figure 7 - Épreuve de la caserne

### 1 - Présentation de la machine asynchrone

La machine asynchrone est constituée d'un rotor et d'un stator tous deux en fer feuilleté. Le rotor et le stator sont séparés par un entrefer de très faible largeur.

Dans la machine asynchrone diphasée, le stator est analogue au stator de la machine synchrone diphasée. Il se compose de deux enroulements décalés spatialement d'un angle de  $\pi/2$  et alimenté par des courants sinusoïdaux en quadrature de phase. Ces enroulements seront identifiés, dans toute la suite du problème, par les dénominations  $S_1$  et  $S_2$ .

Le rotor se compose également de deux enroulements, décalés spatialement d'un angle de  $\pi/2$ . Ils ne sont reliés à aucune alimentation mais refermés sur eux-mêmes et donc en court-circuit. Ces enroulements seront identifiés dans toute la suite du problème par les dénominations  $R_1$  et  $R_2$ .

On définit la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{z})$  liée au référentiel fixe, donc au stator. Le vecteur  $\vec{e}_x$  est normal à l'enroulement  $S_1$ . Le vecteur  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine.

## 2 - Étude du stator

On s'intéresse d'abord au seul enroulement  $S_1$  du stator.

On a représenté (figure 8) les lignes de champ magnétique créées par la spire centrale de l'enroulement  $S_1$  du stator, de vecteur normal  $\vec{e}_x$ , parcourue par un courant  $i_{S_1}(t)$ . Cette spire centrale est représentée en coupe par son conducteur " aller ", orienté suivant le vecteur  $\vec{e}_z$ , et son conducteur " retour ", orienté suivant  $-\vec{e}_z$ .

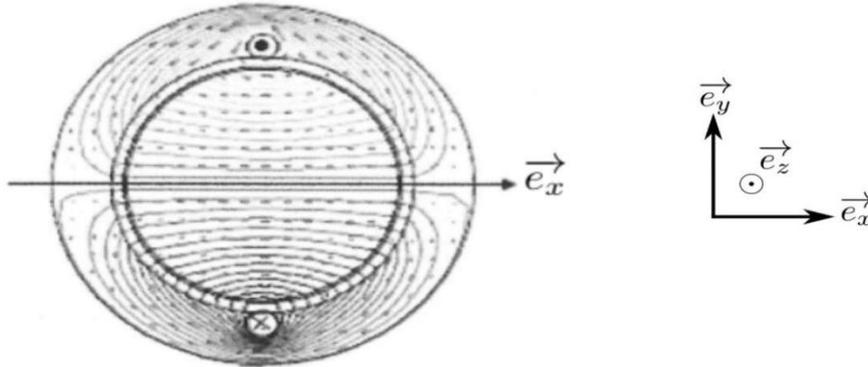


Figure 8 - Champ magnétique créé par la spire centrale de l'enroulement  $S_1$  du stator.

On définit la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  des coordonnées cylindriques (figure 9), où  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine. Un point  $M$  de l'entrefer est repéré par ses coordonnées

$(r, \theta, z)$ . On a ainsi  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .

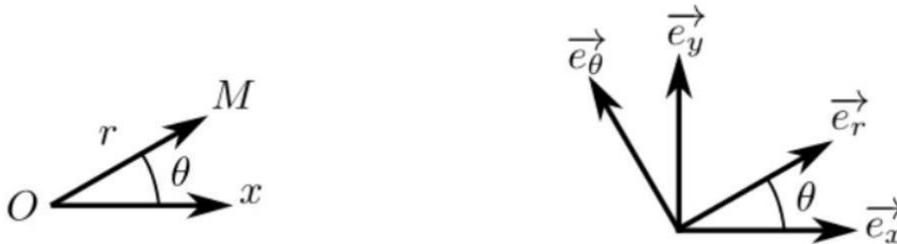


Figure 9 - Repérage d'un point de l'entrefer

Dans un modèle simple, on considère que la norme du champ magnétique est uniforme dans l'entrefer.

On désigne par  $\vec{B}_{\text{spire}}(\theta, t) = B_{\text{spire}}(\theta, t)\vec{e}_r$  le champ magnétique créé par cette spire centrale de l'enroulement  $S_1$  en un point  $M(r, \theta)$  de l'entrefer.

On donne figure 10 la représentation graphique de la fonction  $B_{\text{spire}}(\theta, t)$  pour  $i_{S_1} > 0$  et  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

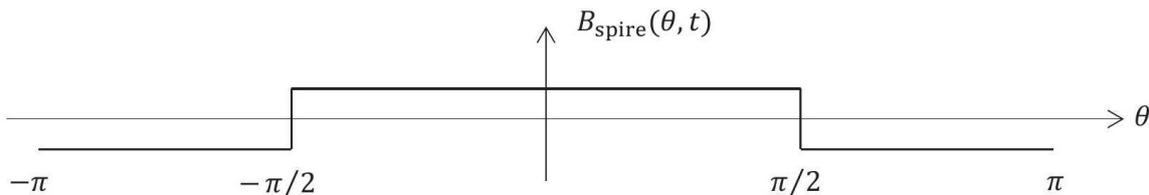


Figure 10 - Modélisation simplifiée du champ créé par une seule spire de  $S_1$  dans l'entrefer

L'enroulement  $S_1$  du stator, parcouru par le courant  $i_{S_1}(t)$ , n'est pas constitué d'une seule spire mais de  $n$  spires décalées les unes par rapport aux autres. Le champ magnétique créé par l'ensemble des spires de l'enroulement  $S_1$  du stator est noté  $\vec{B}_{S_1}(\theta, t) = B_{S_1}(\theta, t)\vec{e}_r$ . On donne figure 11 la représentation de la fonction  $B_{S_1}(\theta, t)$  pour  $i_{S_1} > 0$  et pour  $\theta \in [-\pi, \pi]$ .

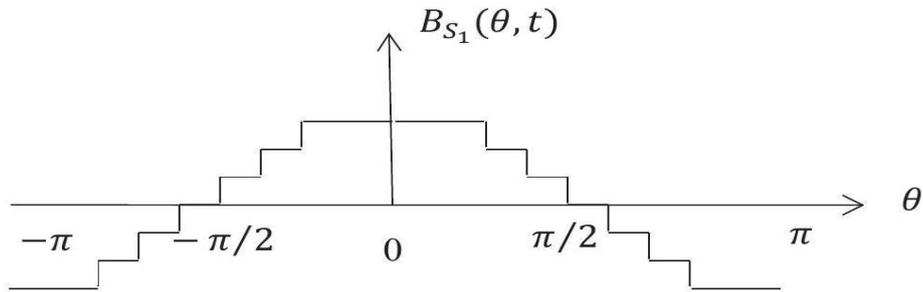


Figure 11 - Modélisation simplifiée du champ créé par l'ensemble des spires de l'enroulement  $S_1$  dans l'entrefer

Q27. Préciser le nombre  $n$  de spires de l'enroulement  $S_1$ , décalées les unes par rapport aux autres, qui permettent de créer le champ magnétique  $\vec{B}_{S_1}(\theta, t)$  de la figure 11.

Dans la suite du problème, on admettra que les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator créent dans l'entrefer les champs magnétiques :

$$\begin{cases} \vec{B}_{S_1}(\theta, t) = K_S i_{S_1}(t) \cos(\theta) \vec{e}_r \\ \vec{B}_{S_2}(\theta, t) = K_S i_{S_2}(t) \sin(\theta) \vec{e}_r \end{cases}$$

Par ailleurs, une alimentation électrique impose les courants :

$$\begin{cases} i_{S_1}(t) = I_{S_{\max}} \cos(\omega_s t) \\ i_{S_2}(t) = I_{S_{\max}} \sin(\omega_s t) \end{cases}$$

Q28. Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}_S$  créé par l'ensemble des deux enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator dans l'entrefer. On posera  $B_{S_0} = K_S I_{S_{\max}}$ . Justifier que ce champ magnétique est un champ tournant dans le référentiel du stator à une vitesse angulaire  $\omega$  que l'on précisera.

Le rotor est repéré par sa position angulaire  $\theta_R$ . La position  $\theta_R = 0$  correspond à l'alignement des enroulements  $S_1$  du stator et  $R_1$  du rotor.

On définit la base  $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z)$  liée au référentiel tournant du rotor (figure 12). Le vecteur  $\vec{e}_z$  coïncide avec l'axe longitudinal de la machine. L'enroulement  $R_1$  est orienté par le vecteur normal  $\vec{e}_u$ , l'enroulement  $R_2$  est orienté par le vecteur normal  $\vec{e}_v$ . Par souci de clarté, seules les spires centrales des enroulements  $S_1$  et  $R_1$  sont représentées sur la figure 12.

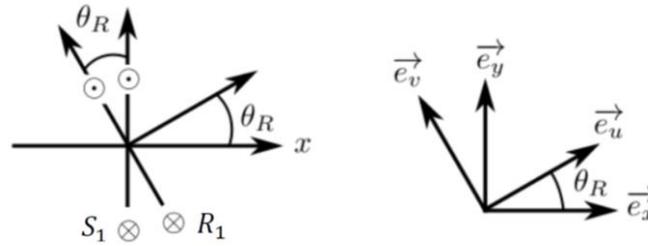


Figure 12 - Repérage de la position  $\theta_R$  du rotor

On note :

- $R_S$  et  $L_S$  la résistance et l'inductance propre de chaque enroulement du stator ;
- $R_R$  et  $L_R$  la résistance et l'inductance propre de chaque enroulement du rotor ;
- $M_{S_1R_1} = M_{SR} \cos(\theta_R)$  (avec  $M_{SR}$  une constante) l'inductance mutuelle entre les enroulements  $S_1$  du stator et  $R_1$  du rotor ;
- $M_{S_2R_1} = M_{SR} \sin(\theta_R)$  l'inductance mutuelle entre les enroulements  $S_2$  du stator et  $R_1$  du rotor.

Q29. Que vaut l'inductance mutuelle  $M_{S_1S_2}$  entre les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator ? Que vaut la mutuelle  $M_{R_1R_2}$  entre les enroulements  $R_1$  et  $R_2$  du rotor ?

Q30. Exprimer l'inductance mutuelle  $M_{S_1R_2}$  entre les enroulements  $S_1$  du stator et  $R_2$  du rotor en fonction de  $M_{SR}$  et de  $\theta_R$ , ainsi que la mutuelle  $M_{S_2R_2}$  entre les enroulements  $S_2$  du stator et  $R_2$  du rotor.

On se propose d'écrire l'équation électrique qui définit le courant  $i_{R_1}(t)$  associé à l'enroulement  $R_1$  du rotor.

Q31. Comment peut-on expliquer qu'un courant  $i_{R_1}(t)$  circule dans l'enroulement  $R_1$  alors qu'il n'est relié à aucune alimentation ?

Q32. On note respectivement  $\phi_{S_1R_1}$  et  $\phi_{S_2R_1}$  les flux créés dans l'enroulement  $R_1$  du rotor par les enroulements  $S_1$  et  $S_2$  du stator. Exprimer le flux  $\phi_{S_1R_1}$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $\theta_R$  et du courant  $i_{S_1}(t)$ . De même, exprimer le flux  $\phi_{S_2R_1}$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $\theta_R$  et du courant  $i_{S_2}(t)$ .

On suppose que le rotor tourne à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  avec  $0 \leq \Omega \leq \omega_S$ . On suppose également qu'à  $t = 0$ ,  $\theta_R(0) = 0$  de sorte que  $\theta_R(t) = \Omega t$ .

Q33. En remarquant que  $\theta_R$  et  $i_{S_1}$  dépendent du temps, exprimer en fonction de  $M_{SR}$ ,  $i_{S_1}$ ,  $\Omega$  et de  $t$  la force électromotrice (fem)  $e_{S_1R_1}$  induite par  $S_1$  dans  $R_1$ . Faire de même pour la fem  $e_{S_2R_1}$  induite par  $S_2$  dans  $R_1$ . On ne développera pas les expressions de  $i_{S_1}(t)$ ,  $i_{S_2}(t)$  et de leur dérivée dans cette réponse.

Q34. En déduire l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i_{R_1}(t)$  en fonction de  $R_R$ ,  $L_R$ ,  $M_{SR}$ ,  $\Omega$ ,  $t$  et de  $i_{S_1}(t)$ ,  $i_{S_2}(t)$  et de leur dérivée. Cette équation différentielle peut être écrite sous la forme :

$$L_R \frac{di_{R_1}}{dt} + R_R i_{R_1} = A \sin(\omega t)$$

Préciser les expressions de  $A$  et de  $\omega$  en fonction de  $M_{SR}$ ,  $I_{S_{\max}}$ ,  $\omega_S$  et de  $\Omega$ .

En régime permanent, le courant  $i_{R_1}(t)$  est sinusoïdal ; on note  $\omega_R$  sa pulsation et  $I_{R \max}$  son amplitude maximale.

Q35. On rappelle que  $\omega_S > \Omega$ . Exprimer  $\omega_R$  en fonction de  $\omega_S$  et de  $\Omega$ .

Q36. Exprimer  $I_{R \max}$  en fonction de  $R_R, L_R, M_{SR}, I_{S \max}, \omega_S$  et de  $\Omega$ .

Que peut-on dire de  $I_{R \max}$  pour  $\omega_S = \Omega$  ?

Justifier alors le qualificatif de machine asynchrone.

On suppose que les courants  $i_{R_1}(t)$  et  $i_{R_2}(t)$  sont de la forme :

$$\begin{cases} i_{R_1}(t) = I_{R \max} \sin(\omega_R t - \varphi) \\ i_{R_2}(t) = -I_{R \max} \cos(\omega_R t - \varphi) \end{cases} \text{ avec } \varphi = \arctan\left(\frac{L_R \omega_R}{R_R}\right)$$

Les enroulements  $R_1$  et  $R_2$  du rotor créent respectivement, dans l'entrefer, des champs exprimés dans le référentiel fixe (celui du stator) de la forme :

$$\begin{cases} \vec{B}_{R_1}(\theta, t) = K_R i_{R_1}(t) \cos(\theta - \theta_R) \vec{e}_r \\ \vec{B}_{R_2}(\theta, t) = K_R i_{R_2}(t) \sin(\theta - \theta_R) \vec{e}_r \end{cases}$$

Q37. Dans le référentiel fixe (lié au stator), à quelle vitesse angulaire tourne le champ créé par le rotor ? Commenter.

Q38. Dans une machine à courant continu, le champ statorique est stationnaire. Les champs statorique et rotorique sont-ils synchrones quelle que soit la vitesse de rotation du rotor ? Si oui, expliquer brièvement comment est assurée cette synchronisation.

Le couple délivré par la machine est de la forme  $\vec{\Gamma} = \Gamma_z \vec{e}_z$ , avec :

$$\Gamma_z = \frac{\partial M_{S_1 R_1}}{\partial \theta_R} i_{S_1} i_{R_1} + \frac{\partial M_{S_1 R_2}}{\partial \theta_R} i_{S_1} i_{R_2} + \frac{\partial M_{S_2 R_1}}{\partial \theta_R} i_{S_2} i_{R_1} + \frac{\partial M_{S_2 R_2}}{\partial \theta_R} i_{S_2} i_{R_2}.$$

Le calcul étant fastidieux, on admettra pour la suite que :

$$\Gamma_z = \frac{M_{RS}^2 I_{\max}^2 R_R (\omega_S - \Omega)}{R_R^2 + L_R^2 (\omega_S - \Omega)^2}$$

On définit le glissement de la machine par :

$$g = \frac{\omega_S - \Omega}{\omega_S} \text{ avec } 0 \leq g \leq 1$$

La puissance électromagnétique moyenne transmise par le stator au rotor est donnée par :

$$P_S = \Gamma_z \omega_S$$

Enfin, on note  $P_{JR}$  la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le rotor.

Q39. Relier  $P_S, P_{JR}$  et  $g$ .

Q40. Que vaut  $g$  au démarrage de la machine ? Le rendement de la machine est-il meilleur lorsque  $g$  est proche de 0 ou de 1 ? Justifier.

## Données

### Formules trigonométriques

- $\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$