

Devoirs surveillé n° 1
8h00 – 12h00 4 heures

Calculatrice autorisée

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Toutes les interprétations seront comptabilisées. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 2 problèmes indépendants.

Donnée : $2\cos a \cdot \cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

1^{er} problème :

Étude de l'indicateur de suivi pH-métrique et de la régulation du pH

En 1776, Alessandro Volta collectait du méthane dans les marais et remarqua que celui-ci brûlait dans l'air. Plus tard, en 1884, Ulysse Gayon, étudiant de Louis Pasteur, produisit du méthane par fermentation du fumier. Il a mis en évidence que la combustion de ce gaz produisait de la chaleur et de la lumière.

Le digesteur est une cuve que l'on appelle également réacteur à biogaz ou encore méthaniseur. On introduit dans cette cuve des déchets organiques. La fermentation de ces substrats organiques en milieu anaérobie, c'est-à-dire dans un milieu privé de dioxygène O_2 , permet la production entre autre d'un biogaz : le méthane CH_4 . Son utilisation peut être considérée comme une source d'énergie alternative.

La gamme optimale de pH pour la digestion anaérobie se situe entre 6,8 et 7,2. Il est donc important de suivre régulièrement le pH du digesteur et d'ajouter une espèce acide ou une espèce basique pour toujours se situer dans la fourchette de fonctionnement optimal du digesteur.

I.A – Modélisation du pH-mètre

On se propose de modéliser le pH-mètre comme une association en série d'un générateur de tension idéale de force électromotrice E fonction du pH avec une résistance électrique r (figure 2).

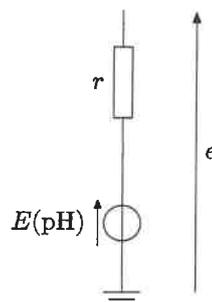


Figure 2 Modélisation
d'un pH-mètre

Q 1. On souhaite mesurer la tension e à l'aide d'un voltmètre de résistance interne $R_V = 1,0\text{ M}\Omega$. Exprimer la tension mesurée e en fonction de E , r et R_V . Calculer la valeur de e en prenant $r = 10\text{ M}\Omega$ et $E = 0,20\text{ mV}$.

Q 2. Quelle valeur minimale de résistance interne du voltmètre R'_V aurait-il fallu avoir pour commettre une erreur inférieure à 10 % sur la mesure de E ?

Pour s'affranchir des problèmes de mesures liés à la résistance interne r du pH-mètre, on utilise le montage de la figure 3 dans lequel l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.

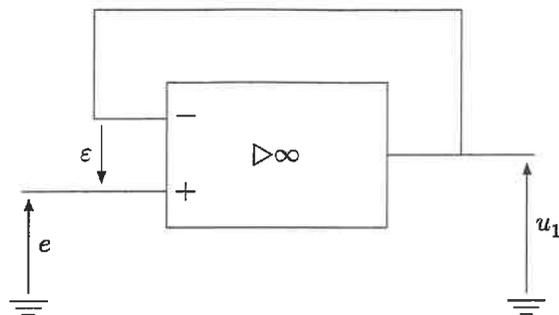


Figure 3

Q 3. Quel est le nom de ce montage ? Justifier que $u_1 = E$.

Le digesteur est continuellement agité pour assurer une homogénéité du milieu. Cette agitation mécanique lente provoque une perturbation électromagnétique du signal E . À un pH donné, l'évolution de E en fonction du temps t est représentée figure 4.

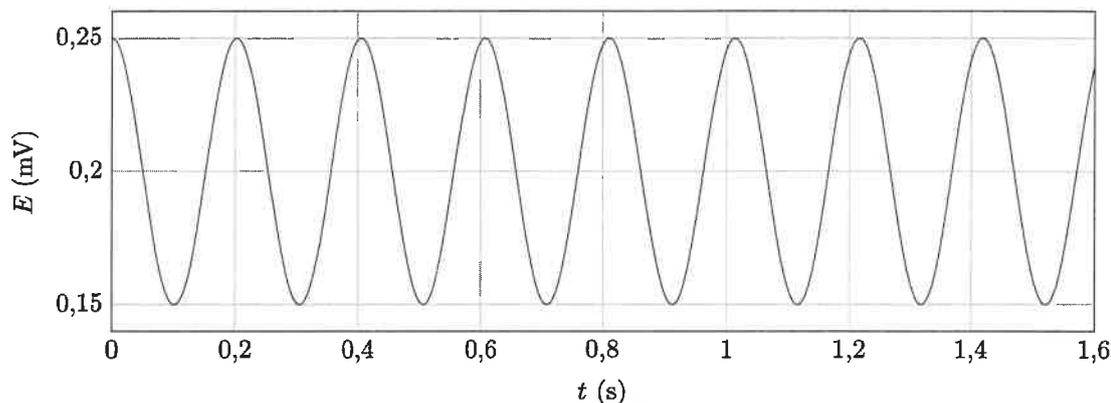


Figure 4

Q 4. Représenter la décomposition spectrale du signal de la figure 4.

I.B - Filtrage linéaire

On envoie le signal $u_1(t)$ en entrée du filtre représenté figure 5.

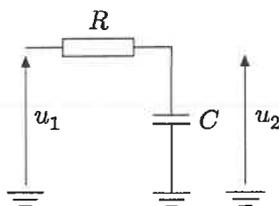


Figure 5

L'étude sera menée en régime sinusoïdal, ω désigne la pulsation du signal, ω_0 la pulsation propre et x désigne la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$.

Q 5. Effectuer une analyse qualitative du filtre à basse et haute fréquence. En déduire la nature du filtre. Justifier de son intérêt dans le cas présent.

Q 6. Exprimer la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega)$ sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j(\omega/\omega_0)}$$

en identifiant les expressions de H_0 et ω_0 .

Q 7. Exprimer le gain du filtre $G(x)$ et la phase $\varphi(x) = \arg(\underline{H})$.

Q 8. Déterminer la pulsation réduite de coupure x_c à -3 dB.

Q 9. Exprimer le gain en décibels $G_{dB}(x)$ puis déterminer les équivalents à basse et haute fréquence.

Q 10. Construire le diagramme de Bode, réponses en gain $G_{dB} = f(\log x)$ et en phase $\varphi = f(\log x)$.

On considère le signal d'entrée de la forme

$$u_1(t) = E + \frac{E}{4} \cos(10\omega_0 t).$$

On cherche le signal de sortie $u_2(t)$ sous la forme :

$$u_2(t) = A_1 + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2).$$

Q 11. Exprimer les constantes A_1 , A_2 , ω_2 et ψ_2 . Calculer pour $E = 0,20$ mV les valeurs de A_1 , A_2 et ψ_2 . Commenter l'effet de l'action du filtre sur le signal $u_1(t)$.

I.C - Régulation du pH

Afin d'assurer une production optimale de biogaz, le pH du digesteur doit être compris entre 6,8 et 7,2. On suppose que la sonde pH-métrique délivre un signal proportionnel au pH de telle sorte que $u_2(t) = k\text{pH}(t)$ avec k une constante. Un régulateur compare la tension mesurée u_2 à une tension de référence U_r . Selon la valeur de sortie $s(t)$ du comparateur, le régulateur délivre une solution appelée pH^- pour faire diminuer le pH ou une solution appelée pH^+ pour augmenter le pH.

On note $\pm U_s$ les tensions de saturation de l'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) que l'on supposera idéal.

I.C.1) Les solutions régulatrices

Q 12. Donner un exemple des ions constitutifs de la solution appelée pH^- .

Q 13. Même question pour la solution pH^+ .

I.C.2) Comparateur simple

La figure 6 donne le schéma d'un comparateur simple.

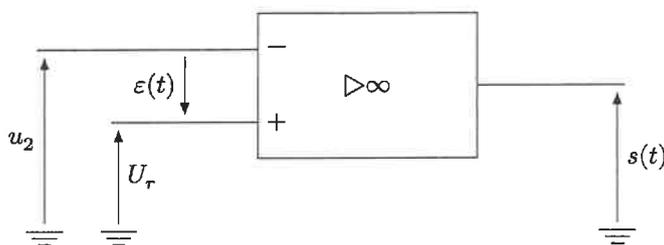


Figure 6 Comparateur simple

Q 14. Dans quel régime fonctionne l'ALI ? Justifier la réponse.

Q 15. Tracer la caractéristique $s = f(u_2)$.

Q 16. Expliquer pourquoi le comparateur simple ne permet pas d'assurer la régulation du pH.

I.C.3) Comparateur à hystérésis ou trigger de Schmitt

Pour s'affranchir du problème rencontré précédemment, on utilise le montage présenté figure 7.

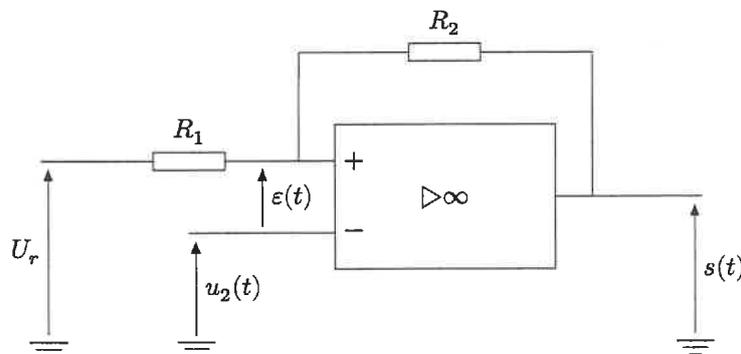


Figure 7 Comparateur à hystérésis

Q 17. Exprimer le potentiel V^+ à la borne non inverseuse en fonction de R_1 , R_2 , s et U_r .

Q 18. Initialement, on suppose que $s(0) = -U_s$. Exprimer la tension de basculement U_b^+ , tension pour laquelle la sortie $s(t)$ bascule en $+U_s$ en fonction de R_1 , R_2 , U_r et U_s . En déduire l'expression de la tension de basculement U_b^- .

Q 19. En déduire l'allure de la caractéristique du comparateur à hystérésis $s = f(u_2)$. Conclure.

2^e problème : Détecteur de Wagon

Dans les attractions foraines qui utilisent des wagons, il est parfois nécessaire de détecter le passage d'un wagon à un endroit donné. Ceci peut se faire à l'aide d'un capteur inductif que nous étudions dans cette partie.

Conséquence du passage d'un objet métallique

Le détecteur comporte une bobine d'inductance L_1 , placée sur le bâti du manège et proche du lieu de passage des wagons. On note $u(t)$ la tension à ses bornes (figure 5)

Lorsqu'un wagon passe à proximité, la bobine L_1 du détecteur devient magnétiquement couplée aux éléments métalliques du wagon. Ces derniers sont décrits comme une inductance L_2 , fermée sur elle-même et de résistance électrique négligeable. On note M le coefficient de couplage entre L_1 et L_2 . (cf figure 5)

On rappelle que lorsque 2 circuits sont couplés :

la tension aux bornes de la bobine d'inductance L_1 s'écrit $u_1(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

et la tension aux bornes de la bobine d'inductance L_2 s'écrit $u_2(t) = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$

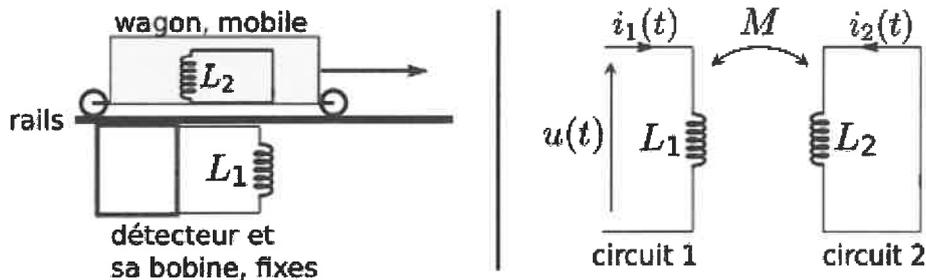


Figure 5. Gauche : schéma de principe. Droite : schéma électrique, avec les bobines 1 et 2, couplées magnétiquement.

Q20. En étudiant le circuit 2, montrer que $i_2(t) = -\frac{M}{L_1}i_1(t) + C$ où C est une constante.

Q21. En étudiant le circuit 1, montrer que la relation entre $u(t)$ et $i_1(t)$ se met sous la forme $u = L \frac{di_1}{dt}$. Ceci montre que le circuit 1 est équivalent à une bobine d'inductance L , non couplée magnétiquement avec un autre circuit. On donnera l'expression de L en fonction de L_1 , L_2 et M .

Ce qui précède montre que le passage du wagon modifie l'inductance équivalente de la bobine du circuit 1 qui passe de L_1 à L . Il faut donc un moyen de mesure ce changement d'inductance.

Etude d'un circuit RLC

On étudie le circuit RLC série représenté figure 6. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert et le condensateur est chargé à la tension $U_0 > 0$. A $t = 0$ l'interrupteur est fermé. On étudie l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur (figure 6).

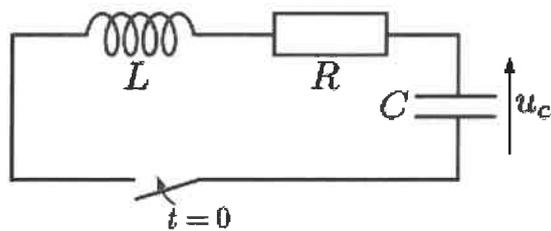


Figure 6 : circuit RLC étudié dans cette sous-partie.

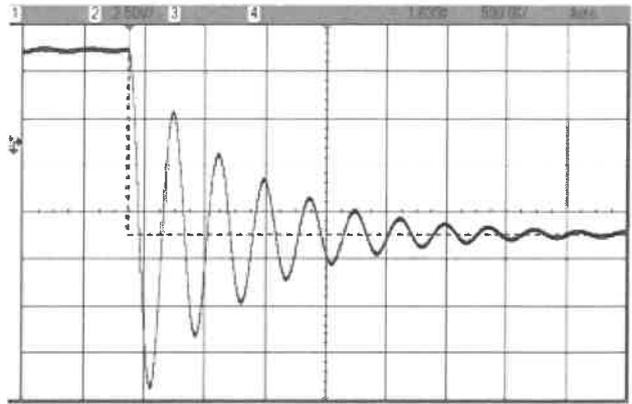


Figure 7 : relevé expérimental de la tension $u_c(t)$.

Q22. Démontrer que $u_c(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0.$$

On donnera les expressions de ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

Q23. On se place dans le régime qui est suivi sur le relevé de la figure 7. Qu'est-ce que ceci implique sur la valeur de Q ? Toujours à l'aide de la figure 7, estimer approximativement sans calculs la valeur de Q .

Q24. Toujours dans le cas du régime suivi figure 7, établir l'expression de la solution de l'équation de la Q22. On l'exprimera en fonction de ω_0 , Q , du temps t et de deux constantes d'intégration A et B qu'on ne cherche pas à déterminer pour l'instant.

Q25. Justifier soigneusement pourquoi $u_c(0^+) = U_0$ et $i(0^+) = 0$ où i est le courant dans le circuit et où 0^+ signifie « juste après la fermeture de l'interrupteur ».

Q26. En déduire l'expression des deux constantes d'intégration A et B .

Q27. Montrer que si Q est grand devant 1, alors on peut approximer la pseudopériode des oscillations par $T_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Ce qui précède montre que le circuit RLC série oscille naturellement à une fréquence qui fait intervenir l'inductance L .

Q28. Sachant que la base de temps sur le relevé de la figure 7 est de $500 \mu\text{s}$ par division estimer la valeur de la fréquence propre f_0 .

Q29. Montrer que l'introduction d'une résistance négative, notée $-R_N$ avec R_N positif, en série avec ce circuit permet d'annuler l'amortissement et d'obtenir un oscillateur sinusoïdal à la fréquence f_0 qui dépend de l'inductance L de la bobine.

Réalisation expérimentale d'une résistance négative

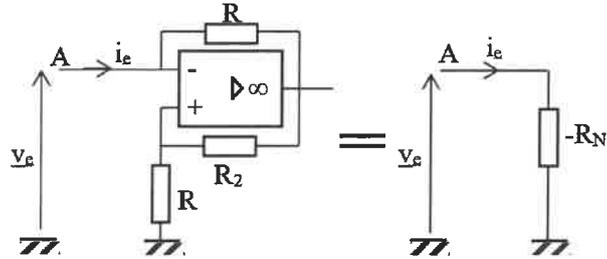
Dans le montage ci-dessous l'ALI est idéal de gain infini et fonctionne en régime linéaire.

Q30. Que signifient les hypothèses précédentes ?

Q31. D'après la partie droite du schéma, quelle relation a-t-on entre R_N , v_e et i_e ?

Q32. En étudiant le montage avec l'ALI exprimer R_N en fonction de R_1 , R_2 et R_3 .

Q33. Représenter le schéma électrique complet de l'oscillateur à résistance négative, en notant la position de l'oscilloscope qui mesure la tension $u_c(t)$.



Si l'inductance est modifiée par le passage du wagon, alors la fréquence d'oscillation change. Il reste donc à obtenir un moyen de détecter ce changement de fréquence.

Etude d'un multiplieur

On dispose de la tension $u_c(t)$ produite par le circuit précédent sous la forme

$$u_c = e_1(t) = U_o \cdot \cos[2\pi(f_o + \Delta f)t]$$

avec f_o la fréquence d'oscillation du circuit en l'absence de wagon, et $f_o + \Delta f$ la fréquence en présence d'un wagon.

Ce signal est envoyé à l'entrée d'un multiplieur. Sur la seconde entrée du multiplieur est envoyé un signal de référence,

$$e_2(t) = U_o' \cdot \cos(2\pi f_o t + \phi_o)$$

dont la fréquence est fixe, indépendamment du passage ou non d'un wagon.

Le multiplieur produit à sa sortie le signal :

$$v(t) = K e_1(t) \cdot e_2(t)$$

avec $K > 0$ une constante.

Q34. Préciser la valeur numérique usuelle de K.

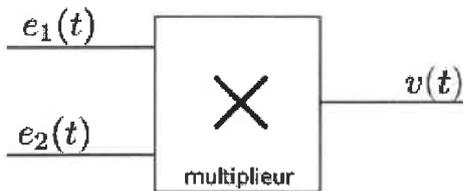


Figure 8 : multiplieur.

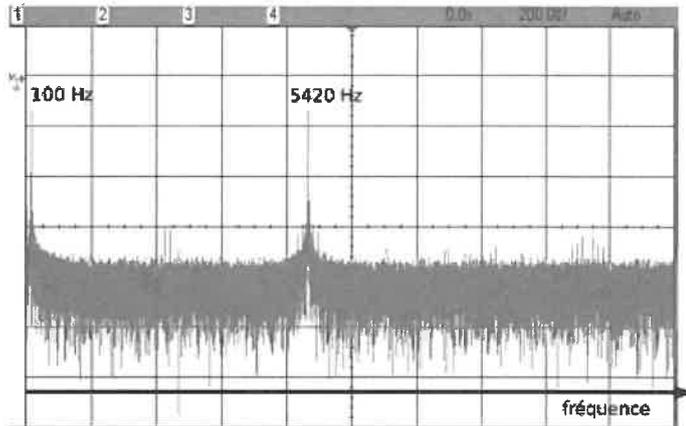


Figure 9 : relevé expérimental du spectre en amplitude de $v(t)$, en sortie du multiplieur.

Q35. Le spectre du signal $v(t)$ comporte deux composantes, l'une de fréquence f_1 et l'autre de fréquence f_2 . Etablir l'expression de f_1 et f_2 en fonction de f_o et Δf .

Q36. Donner également les expressions des amplitudes de chacune des composantes du spectre.

Q37. La figure 9 est un enregistrement du spectre en amplitude de $v(t)$. En déduire les valeurs numériques de f_o et de Δf . Commenter par rapport au résultat numérique de la **Q28**.

Filtre passe-bas

L'avant dernière étape est de réaliser un filtre passe-bas (figure 10) dont on donne le diagramme de Bode en figure 11.

On considère dans un premier temps que $v(t) = e(t) = E_0 \cos(2\pi ft)$ avec $E_0 = 1V$ et $f = 100$ Hz.

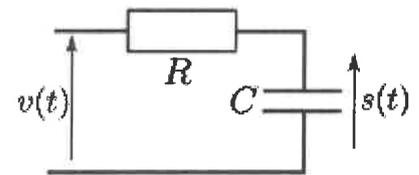


Figure 10 : circuit RC étudié dans cette sous-partie.

Q38. A partir de lectures sur le diagramme, donner l'expression de $s(t)$. On donnera les valeurs numériques de l'amplitude et de la phase à l'origine de ce signal de sortie.

Q39. Même question, avec cette fois une fréquence $f = 5$ kHz pour le signal d'entrée, on conserve $E_0 = 1V$.

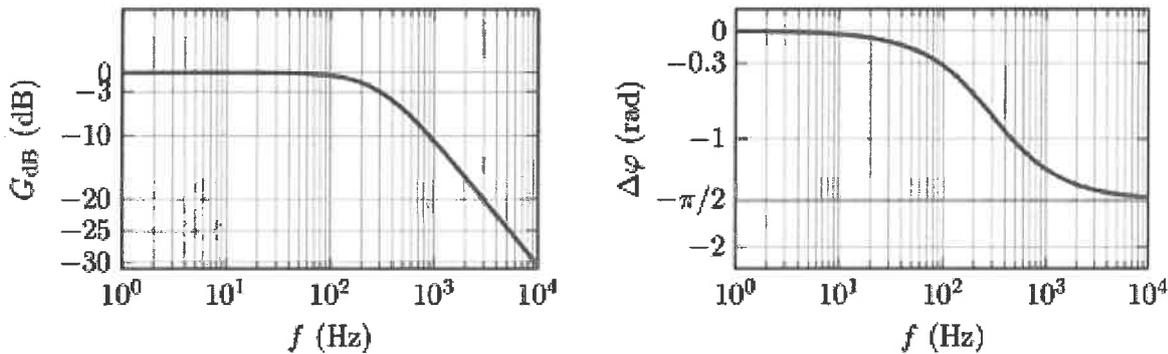


Figure 11 : diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

Chaîne complète

Q40. Exprimer f_0 en fonction de L_1 et C et $f_0 + \Delta f$ en fonction de L et C .

Montrer que si $M \ll \sqrt{L_1 L_2}$ alors $\Delta f = f_0 \frac{M^2}{2L_1 L_2}$.

Le signal de fréquence $f_0 + \Delta f$, précédemment noté $e_1(t)$ est envoyé dans le multiplieur. La sortie $v(t)$ du multiplieur est envoyé dans le filtre passe-bas (cf figure 12). Le signal $e_2(t)$ est le signal de référence de fréquence f_0 .

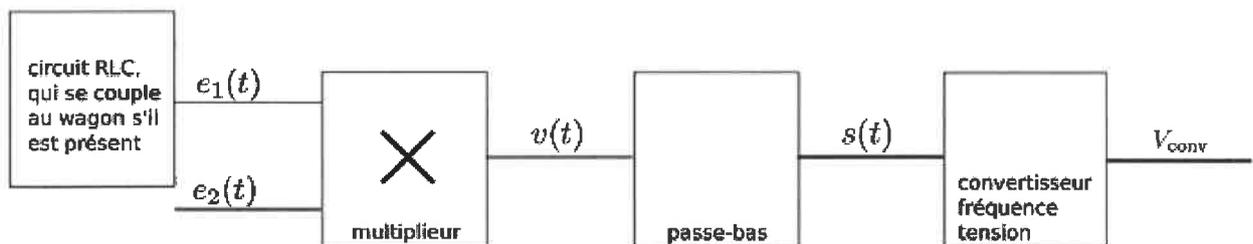


Figure 12 : chaîne complète de traitement du signal.

Q41. Indiquer l'expression du signal $s(t)$ observé en sortie du filtre passe-bas. On notera S_0 son amplitude, sans chercher à la déterminer.

L'écart Δf varie lors du passage du wagon. Pour simuler ceci, nous remplaçons la wagon par une bobine que l'on fait passer devant la bobine du circuit 1 (figure 13 à gauche). Il en résulta le signal $s(t)$ enregistré sur la figure 13 à droite.

Le convertisseur fréquence tension délivre une tension V_{conv} dont la valeur est proportionnelle à la fréquence du signal envoyé sur son entrée. On note α la constante de proportionnalité.

Q42. Donner l'expression de V_{conv} en fonction, entre autres, de M .

Q43. Conclure en traçant l'allure de $V_{conv}(t)$ lors du passage d'un wagon.

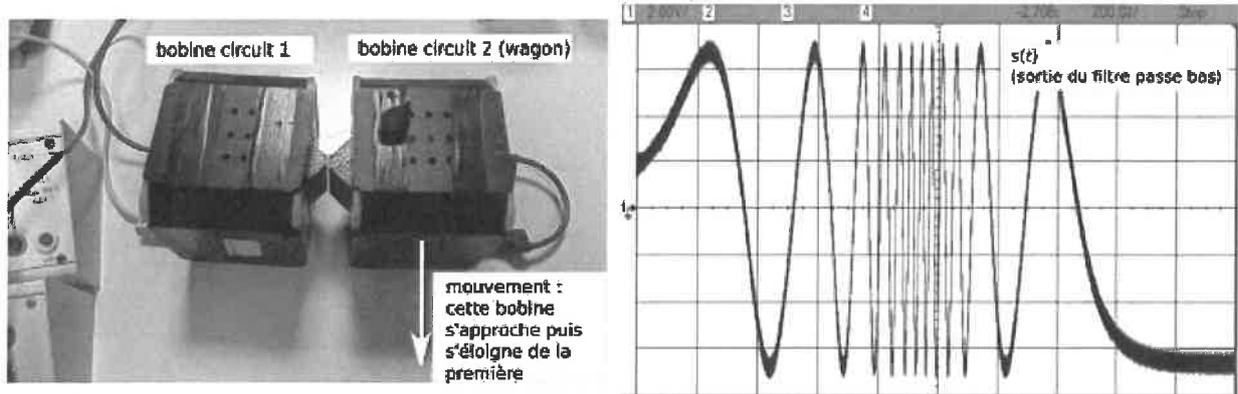


Figure 13. Gauche : passage de la bobine L_2 à proximité de la bobine L_1 . Droite : signal correspondant en sortie du filtre passe-bas.