

Devoirs surveillé n° 1
8h00 – 12h00 4 heures

Calculatrices autorisées

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Toutes les interprétations seront comptabilisées. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants.

1^{er} problème : Variomètre à affichage électronique

Formulaire

Décomposition en série de Fourier d'une fonction créneau $f(t)$ impaire de période T et d'amplitude crête à crête $2E_0$:

$$f(t) = \frac{4E_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left[2\pi(2k+1)\frac{t}{T}\right]}{2k+1}$$

Ce problème étudie un variomètre à affichage électronique, instrument de mesure de la vitesse verticale d'un engin volant. Cet appareil est indispensable aux pilotes des aéronefs sans moteur (planeurs, deltaplanes et parapentes) puisqu'il leur sert à détecter les courants d'air ascendants qui permettent à ces aéronefs de se maintenir en l'air ou de gagner de l'altitude.

Cette technologie est généralement utilisée pour des variomètres de faible taille où les déplacements du piston sont réduits. Les déplacements x du piston sont transmis à un système de condensateurs différentiels.

Ces condensateurs permettent, à l'aide d'une électronique adaptée, de déterminer le déplacement x du piston qui, sous certaines conditions est une image de la vitesse verticale V_z de l'aéronef. On supposera dans

toute cette partie que ces conditions sont vérifiées. On a donc $x = \lambda V_z$ où λ est une constante positive. Le capteur à capacités différentielles comporte quatre condensateurs C_{1a} , C_{1b} , C_{2a} et C_{2b} assimilables à des condensateurs plans. On négligera les effets de bord.

Au repos, défini par la position $x = 0$, les armatures des condensateurs sont toutes distantes de e . Elles ont une surface en regard S et baignent dans un liquide diélectrique de permittivité ϵ . Dans toute cette partie, on supposera $x \ll e_0$.

On rappelle que, si l'on néglige les effets de bord, la capacité d'un condensateur plan est donnée par $C = \epsilon S/e$, où S est la surface des armatures en regard et e la distance séparant ces armatures.

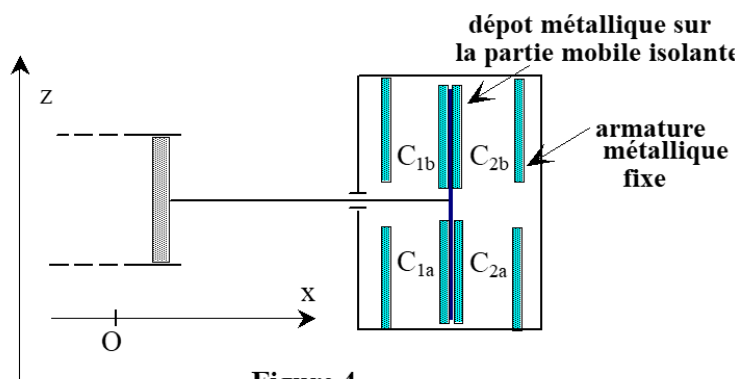


Figure 4

A - Étude du système de capacités différentielles

Q1) En négligeant les effets de bord, déterminer les expressions des capacités variables : C_{1a} , C_{1b} , C_{2a} et C_{2b} en fonction de ϵ , S , e_0 et x .

Q2) Application numérique.

$\epsilon = 1,6 \times 10^{-8}$ SI, $S = 9 \text{ cm}^2$, $e_0 = 3 \text{ mm}$.

Déterminer la valeur commune des capacités lorsque $x = 0$.

B - Oscillateur à pont de Wien

Dans toute cette partie, on supposera les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) idéaux, fonctionnant en régime linéaire.

On considère le quadripôle figure 5.

Q3) Préciser le modèle de l'amplificateur idéal en régime linéaire. Déterminer la fonction de transfert $\underline{F} = \underline{S}/\underline{E}$ en fonction de R_1 et R_2 quand l'ALI fonctionne en régime linéaire. Préciser les limitations pratiques que l'on peut rencontrer.

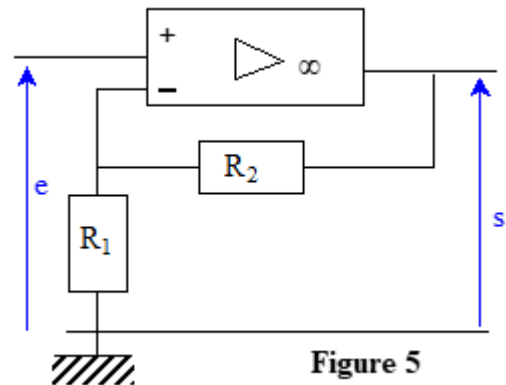


Figure 5

Q4) Tracer la caractéristique $s(e)$, c'est-à-dire le graphe représentant en ordonné s en fonction de e en abscisse.

Q5) Étude du filtre de Wien ci-contre (figure 6).

Déterminer la fonction de transfert $\underline{G} = \frac{\underline{S'}}{\underline{E'}}$.

Préciser les paramètres caractéristiques du filtre (gain maximum, facteur de qualité, pulsation particulière).

Quelle est la fonction de ce quadripôle ?

On couple le filtre de Wien avec le montage amplificateur du B figure 5. On suppose le régime linéaire toujours établi.

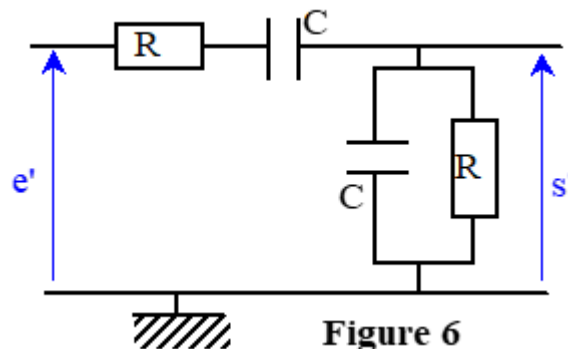


Figure 6

Q6) À partir des expressions F et G , montrer qu'il peut théoriquement exister un signal sinusoïdal sans générateur basse fréquence pour une valeur $r = R_2/R_1$ et une fréquence particulière f à déterminer.

Q7) En utilisant la relation imposée par l'amplificateur et l'équation différentielle du filtre de Wien, établir l'équation différentielle vérifiée par s' .

Montrer qu'il peut exister un signal sinusoïdal sans générateur B.F. Retrouver les conditions de la **Q6**.

Calculer numériquement f si $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 4,8 \text{ nF}$. Peut-on légitimement ignorer la réponse fréquentielle de l'ALI ?

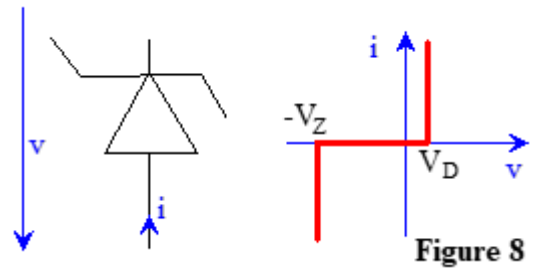
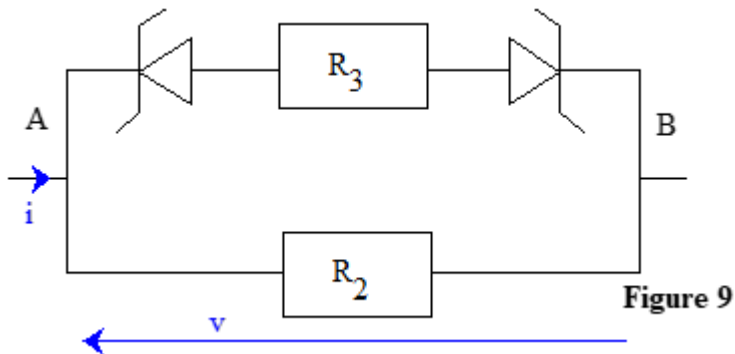
Q8) En pratique, on ne sait pas réaliser exactement la condition $r = R_2/R_1$. À partir de l'équation différentielle précédente, montrer qu'une condition d'apparition des oscillations est $r = R_2/R_1 > n$ (n entier à définir). Si on choisit $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, les valeurs disponibles dans les catalogues étant $4,7 \text{ k}\Omega$, $5,6 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$, quelle valeur doit-on prendre pour R_1 ?

Q9) Si l'on fait varier la valeur de R_1 à l'aide d'un potentiomètre on constate que le signal de sortie évolue entre une tension sinusoïdale légèrement écrêtée et un signal carré. En déduire un encadrement de l'amplitude maximale du signal $s'(t)$ en ne gardant que le terme fondamental du développement en série de Fourier. On justifiera cette approximation. Faire l'application numérique si la tension de saturation de l'ALI vaut 13V.

Amélioration du montage

On donne la caractéristique d'une diode Zener idéale (voir figure 8 ci-contre).

Pour améliorer le comportement du montage, on remplace la résistance R_2 par le dipôle AB suivant, qui comporte deux résistances R_2 et R_3 deux diodes Zener tête bêche.



Q10) Tracer la caractéristique $v(i)$ du dipôle AB, c'est-à-dire le graphe représentant la tension v en ordonnée en fonction du courant i en abscisse. Préciser en fonction de R_2 , R_3 , V_D et V_Z les différentes pentes et les coordonnées des points particuliers de cette caractéristique.

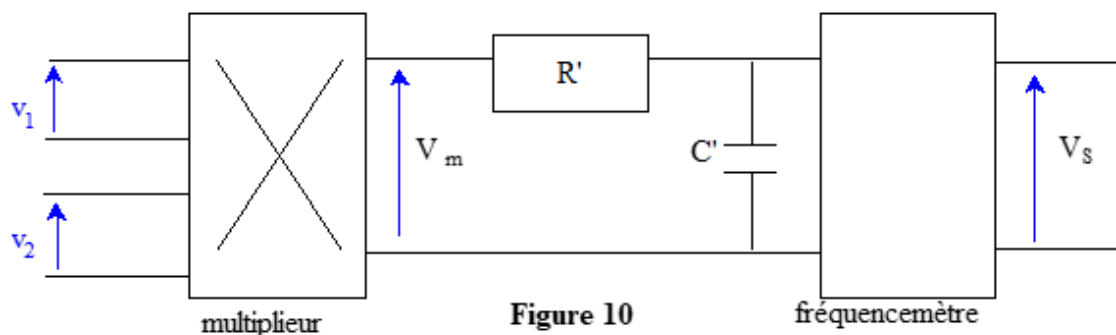
Q11) En quoi l'introduction du dipôle AB améliore la qualité de l'oscillateur ?

C - Étude globale du capteur

Le capteur complet se compose du système de condensateurs C_{1a} et C_{1b} , de capacité C_1 et du système de condensateurs C_{2a} et C_{2b} de capacité C_2 . Ces condensateurs sont utilisés dans deux oscillateurs sinusoïdaux à pont de Wien qui oscillent respectivement aux pulsations $\omega_1 = 1/RC_1$ et $\omega_2 = 1/RC_2$. Soit $v_1(t) = A \cdot \cos(\omega_1 t)$ le signal issu du premier oscillateur et $v_2(t) = A \cdot \cos(\omega_2 t)$ le signal issu du second oscillateur. Ces signaux sont traités par un montage électronique comportant un multiplieur qui fournit la tension $v_m(t) = k_m \cdot v_1(t) \cdot v_2(t)$ et une cellule de filtrage $R'C'$, avec k_m une constante multiplicative. La tension v_c' aux bornes du condensateur de la cellule $R'C'$ est alors analysée par un fréquencemètre qui délivre une tension continue V_s proportionnelle à la fréquence f de v_c' . On posera $V_s = \gamma f$.

Comment faut-il choisir le produit $\tau' = R'C'$ pour obtenir une tension V_s proportionnelle à x ?

Déterminer alors la relation entre V_s et la vitesse verticale de l'aéronef.



2^e problème : Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

Q12) On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) * p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) * w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = 1/T_e$.

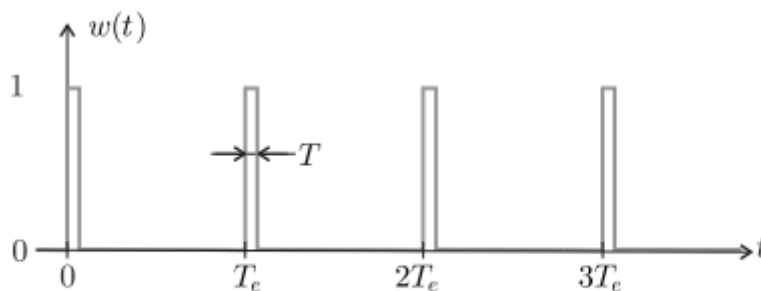


FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage.

Q13) Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

Q14) Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t)$$

Représenter, par analogie avec la **Q12**, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) * w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

Q15) En s'inspirant des **Q12** et **Q13**, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».

Q16) On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale $f_{\max}$. Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de $f_{\max}$ et f_e .

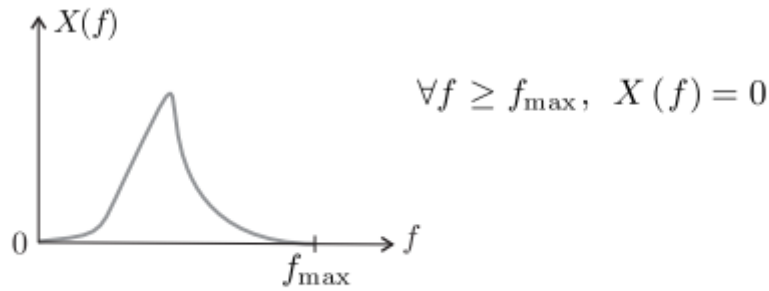


FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

Q17) Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

Q18) La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44,1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

3^e problème : Loi de Moore

Le premier circuit intégré composé de quelques transistors a été réalisé en 1958 par Jack Kibly. Un circuit intégré se compose d'une plaque de silicium dont on a localement modifié les propriétés électriques grâce au dopage afin de créer des transistors interconnectés. Depuis lors les avancées technologiques, ainsi que les avancées en physique fondamentale ont permis de multiplier le nombre de transistors sur un circuit intégré : de 2300 transistors en 1971, ce nombre est passé à $2,6 \times 10^9$ en 2013.

L'augmentation des performances de stockage est allée de pair. Il fallait une petite armoire pour stocker un disque dur d'un mégaoctet en 1964 (figure 1), actuellement un téraoctet (10^{12} octets) tient dans une main. En 1965 Gordon Moore, un des fondateurs de la société Intel, énonce une conjecture (première loi de Moore) :

La complexité des circuits intégrés d'entrée de gamme double tous les ans.

Dans ce problème on étudie la numérisation avant stockage qui a permis, entre autres, la réalisation de la loi de Moore jusqu'à nos jours.



Figure 1 : Disque dur de 1 mégaoctet en 1964

Dans tout système de stockage numérique de données, la première étape est celle de la numérisation. Les signaux du monde réel sont analogiques, pour les transformer en signaux numériques on utilise un convertisseur numérique analogique, noté CAN par la suite.

A – Au cœur de tous les convertisseurs se trouve un compteur (noté F sur la figure 2), commandé par un signal d'horloge (noté D) qui incrémente le compteur à chaque bip d'horloge (le compteur est lui-même commandé par une logique de commande notée E). La fréquence du signal d'horloge est de l'ordre de quelques GHz, on la suppose parfaitement stable. Le compteur compte à partir de zéro, dès que la commande de compter lui a été donnée, au rythme imposé par le signal d'horloge. Il fournit en sortie un nombre codé sur N bits.

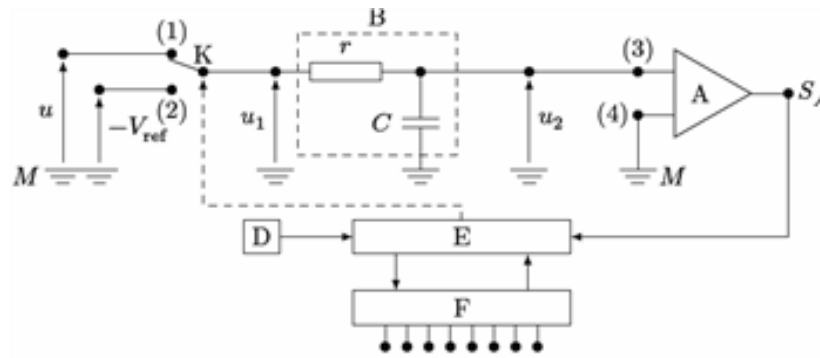


Figure 2

Q19) Avec quelle précision maximale mesure-t-on une durée à l'aide d'un compteur dont le signal d'horloge a une fréquence $f_{ck} = 1 \text{ GHz}$?

L'architecture des premiers CAN était de type « série », elle est modélisée par le dispositif schématisé sur la figure 2. La tension positive u dont la valeur est comprise entre 0 V et V_{ref} ($V_{\text{ref}} = 2 \text{ V}$), supposée constante pendant la durée de la numérisation, est convertie en un nombre s_N .

Le convertisseur est composé d'un circuit r, C formant le bloc B, d'un comparateur A, et d'éléments intégrés parmi lesquels le bloc logique de commande E, le générateur de signal d'horloge D et le compteur sur N bits F. Les résistances d'entrée des blocs A, E et F sont infinies.

Le module A compare les potentiels des nœuds (3) et (4). Lorsque $V_{(3)} > V_{(4)}$, son potentiel de sortie V_{SA} est au niveau haut, de sorte que $v_{SA} = V_{SA} - V_{SM} = 5 \text{ V}$. Lorsque $V_{(3)} < V_{(4)}$, son potentiel de sortie est au niveau bas ($v_{SA} = 0 \text{ V}$). Il commande ainsi le bloc logique E.

L'interrupteur K est commandé par le bloc logique E, ce qui est symbolisé par un trait pointillé.

Q20) Préciser ce qu'on appelle masse dans un montage électrique.

Q21) Représenter le graphe de la tension $v_{SA} = V_{SA} - V_{SM}$ en fonction de u_2 .

Q22) Partant d'une situation où le condensateur est déchargé, E commande à l'instant $t = 0$ la mise en position (1) de l'interrupteur K. L'interrupteur reste dans cette position pendant une durée

$$t_1 = \frac{2^N - 1}{f_{ck}} \text{ qui correspond à un cycle complet de comptage du compteur sur } N \text{ bits. Étudier } u_2 \text{ en}$$

fonction du temps entre $t = 0$ et t_1 . Faire apparaître une constante τ , homogène à un temps, caractéristique du bloc B.

B – Pour toute la suite, on choisit les valeurs de r et C de sorte que $t_1 \ll \tau$.

Q23) Donner alors l'expression simplifiée de u_2 en fonction du temps, ainsi que le lien simplifié entre u_1 et du_2/dt .

Q24) Quelle est alors la fonction du bloc B ?

Q25) Que vaut v_{SA} entre 0 et t_1 ?

Le bloc de commande fait basculer l'interrupteur K en position (2) à l'instant t_1 et déclenche le comptage. Celui-ci dure jusqu'à l'instant $t_1 + t_2$ tel que le signal v_{SA} soit modifié.

Q26) Exprimer t_2 en fonction de u , t_1 et V_{ref} .

Q27) Représenter sur un même graphe u_2 et u_1 en fonction du temps, entre $t = 0$ et $t = t_1 + t_2$.

Q28) Quel est le lien entre s_N et t_2 ?

Q29) Quelle est la durée maximale de la conversion analogique numérique pour un convertisseur 8 bits commandé par un signal d'horloge de fréquence $f_{ck} = 1 \text{ GHz}$?

En déduire une condition sur la fréquence des signaux qu'on peut numériser avec un tel convertisseur. Commenter.

C – Les convertisseurs plus récents ont une architecture parallèle.

La figure 3 représente un convertisseur 3 bits, qui convertit une tension u qui vérifie $0 < u < V_{\text{ref}}$. Il est composé de 7 comparateurs, d'une logique de commande et de résistances de valeur r , $2r$ et $3r$. Les comparateurs ont une impédance d'entrée infinie et délivrent un signal logique qui est au niveau haut lorsque la patte reliée à u a un potentiel supérieur à celui de la patte reliée à V_{ref} par l'intermédiaire des résistances

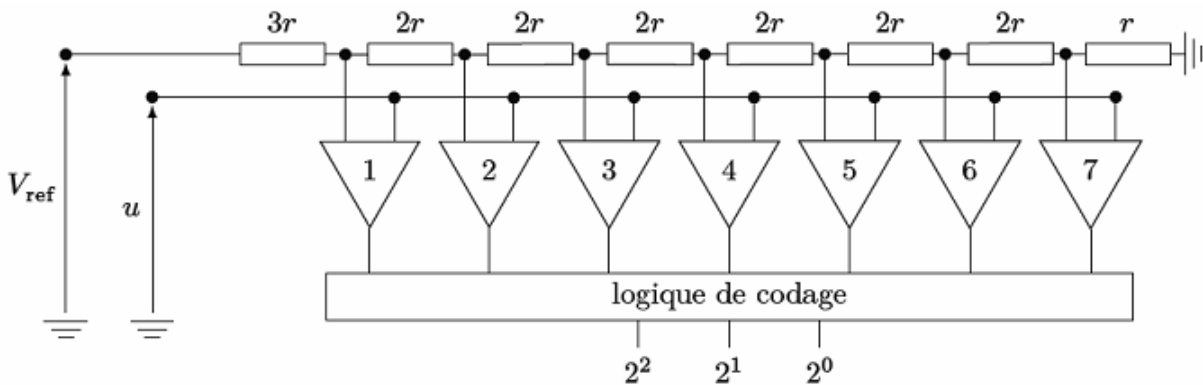


Figure 3

Q30) Expliquer le fonctionnement de ce convertisseur.

On note u_N la tension numérisée, reconstituée à partir de s_N . Comment passe-t-on de s_N à u_N ?

Q31) Pour un convertisseur 8 bits, combien faut-il de comparateurs ? Quels sont les avantages et inconvénients comparés des convertisseurs série et parallèle ?

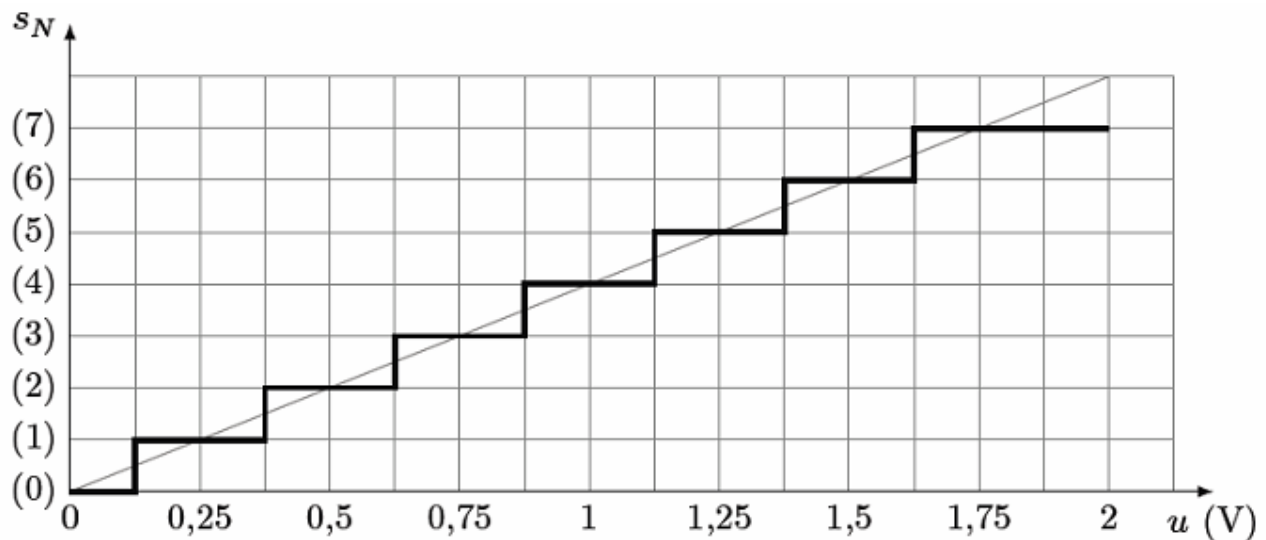


Figure 4

D – La figure 4 représente le signal numérisé s_N en fonction de la tension à numériser u .

Q32) Que vaut N dans l'exemple donné ?

Q33) Donner les valeurs de s_N en base 2 et de u_N pour $u = 1,28$ V

Q34) Quelle type d'erreur induit la numérisation ? Préciser l'écart maximal entre la valeur de la tension numérisée u_N et u .

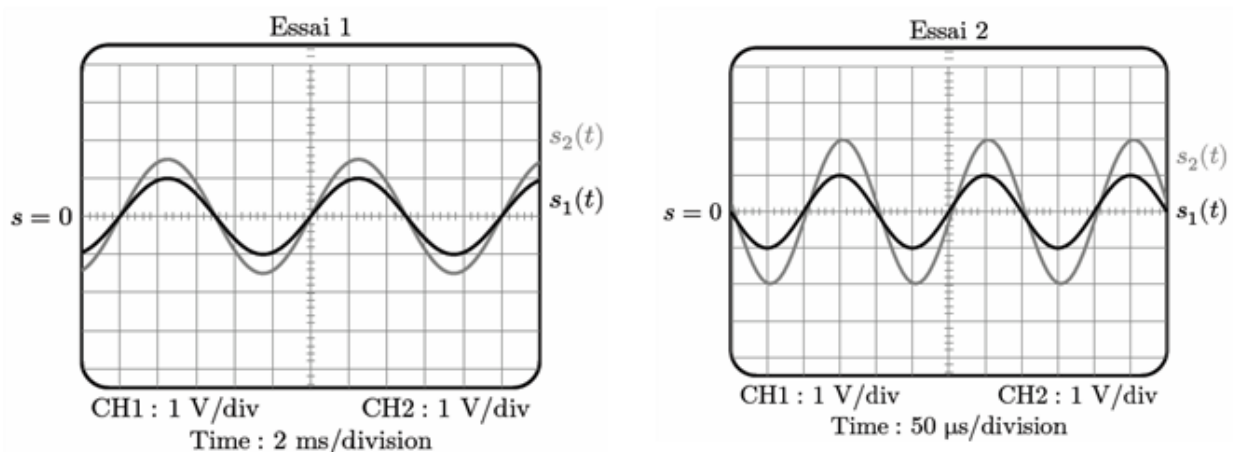
E – On souhaite enregistrer un signal musical avec une haute-fidélité. Le signal à échantillonner possède des harmoniques très élevées, qui risquent de nuire à la qualité de l'enregistrement. Avant la numérisation, le signal doit être filtré. Un document en annexe fournit les spécifications du LMF100, qui est un composant intégré. Il réalise différents types de filtrages, selon les branchements qu'on lui applique. Dans ce document, la grandeur s est égale à $j\omega$ où ω est la pulsation des signaux sinusoïdaux et $j^2 = -1$.

Q35) Quel type de filtre doit-on utiliser et pourquoi ? Préciser la bande de fréquences qu'il doit sélectionner.

Q36) Proposer une valeur de la fréquence d'échantillonnage adaptée à la situation.

F – Quatre essais ont été réalisés en laboratoire, à quatre fréquences différentes, avec un filtre d'ordre 2 réalisé avec le LMF100. Sur les quatre oscillogrammes relevés figure 5, $s_2(t)$ désigne la tension de sortie du filtre et $s_1(t)$ la tension d'entrée.

Q37) Dédurre de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité. Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.



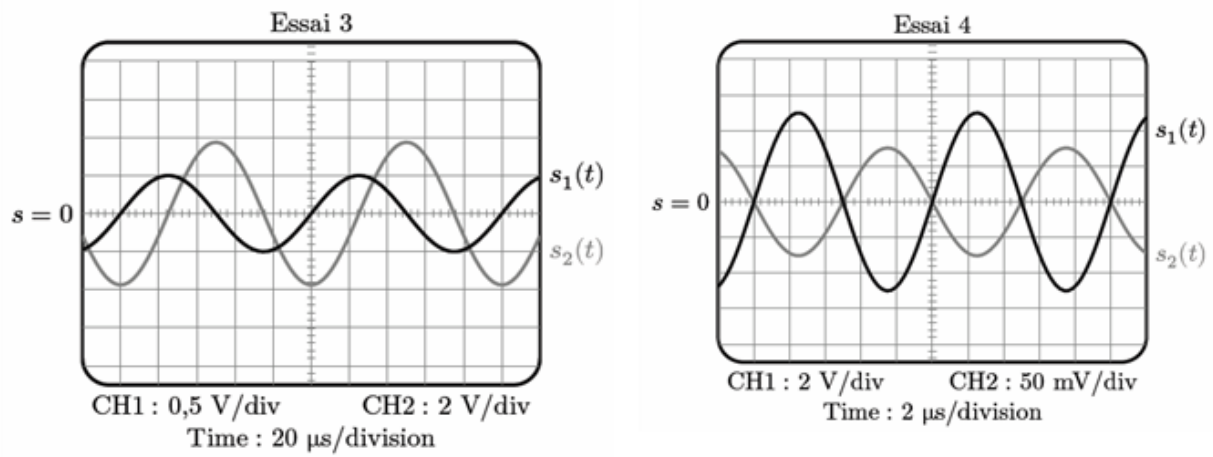


Figure 5

Annexe

Filtres réalisables avec le LMF 100

