

Devoirs surveillé n° 3 9h00 – 12h00 3 heures
--

Calculatrices NON autorisées

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 2 problèmes indépendants.

Donnée : perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI

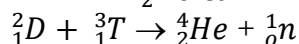
Formules trigonométriques

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

1^{er} problème : Des plasmas pour la fusion thermonucléaire

Pour répondre à la raréfaction des énergies fossiles, il est nécessaire de trouver de nouvelles sources d'énergie décarbonées. Parmi celles-ci, la fusion thermonucléaire est une des pistes à long terme qui donne lieu à une coopération internationale sans précédent avec le projet de recherche ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), dont les installations sont implantées à Cadarache, dans les Bouches-du-Rhône.

La fusion thermonucléaire consiste à faire entrer en collision deux noyaux légers pour obtenir un noyau plus lourd. Cette réaction nucléaire libère de grandes quantités d'énergie du fait qu'une partie de la masse des noyaux est convertie en énergie. Les efforts de recherche portent actuellement sur une réaction nucléaire impliquant deux isotopes de l'hydrogène : le deutérium 2_1D et le tritium 3_1T . La réaction nucléaire produit un noyau d'hélium 4_2He et un neutron selon l'équation de réaction :



Dans un réacteur de fusion, la matière est à l'état de plasma. On appelle plasma un état de la matière constitué d'ions, d'électrons libres et d'espèces neutres. Cet état résulte des très hautes températures atteintes dans le réacteur qui permettent l'ionisation des atomes.

Ce sujet aborde quelques aspects de la physique des plasmas dont la compréhension est essentielle pour la maîtrise de la fusion contrôlée. Dans la partie I, on s'intéressera au confinement magnétique

du plasma de fusion dans le réacteur par l'étude du mouvement d'une particule chargée de ce plasma dans un champ magnétique, dans la partie II, on envisagera le chauffage ohmique par induction pour atteindre les températures nécessaires pour initier les réactions de fusion.

Partie I - Confinement magnétique du plasma

Les plasmas créés pour réaliser la fusion thermonucléaire ayant des températures extrêmement élevées, ceux-ci ne peuvent être au contact direct de la paroi du réacteur qui fondrait ou serait fortement endommagée. Pour contenir ces plasmas, on doit donc réaliser un confinement immatériel : la méthode la plus étudiée à ce jour est le confinement magnétique. On se propose dans cette partie d'en comprendre le principe par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse m et de charge électrique $+e$ (le cas d'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

I.1 - Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe (Oz) orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ constitué de N spires de rayon a , régulièrement réparties sur une longueur $d \gg a$. Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité I constante (figure 1).

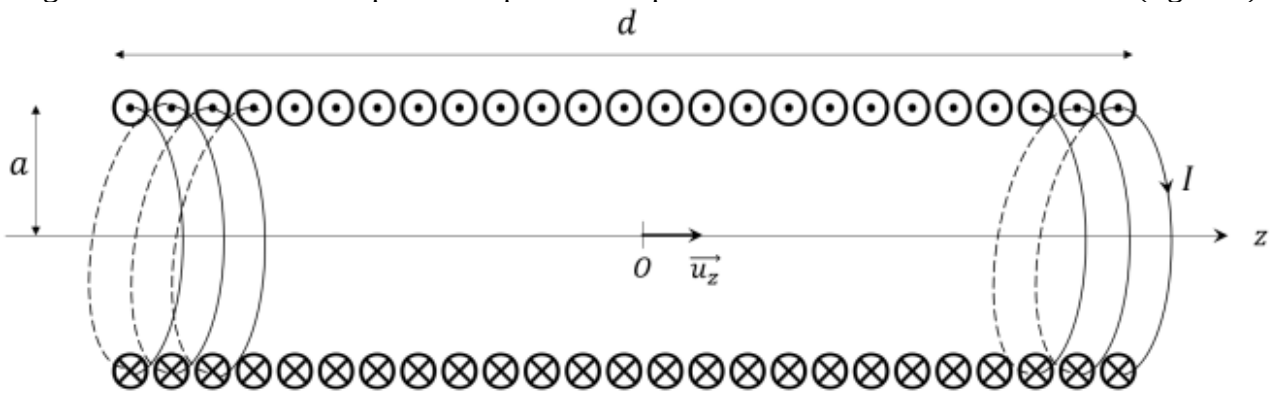


Figure 1 - Schéma du solénoïde. Seules quelques spires sont représentées par souci de lisibilité

Q1. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est de la forme $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ avec B_0 une constante qu'on exprimera, entre autres, en fonction de l'intensité I . On admettra que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde et on négligera les effets de bord.

On s'intéresse maintenant au mouvement d'un cation de masse m et de charge électrique $+e$ à l'intérieur de ce solénoïde, soumis au champ $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

Q2. Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera v_0 la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose d'abord que le cation a un mouvement dans un plan perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

Q3. Représenter sur un schéma le vecteur vitesse $\vec{v}$ du cation, le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique $\vec{F}_m$. Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires du repère de Frenet.

Q4. Donner l'expression de l'accélération du cation dans le repère de Frenet en fonction de sa vitesse v_0 et du rayon de courbure r de la trajectoire. Montrer que la trajectoire du cation est circulaire, de rayon $r_L = v_0 / \omega_c$ appelé rayon de Larmor, avec $\omega_c = eB_0 / m$ la pulsation cyclotron.

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale v_0 parallèle au champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.

Q5. En projetant le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{u}_z$, montrer que la composante v_z de la vitesse du cation selon $\vec{u}_z$ est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné ?

Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique : la trajectoire est alors hélicoïdale.

Q6. Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (figure 2), qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales (le rôle du solénoïde central sera étudié dans la partie suivante).

Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale ?

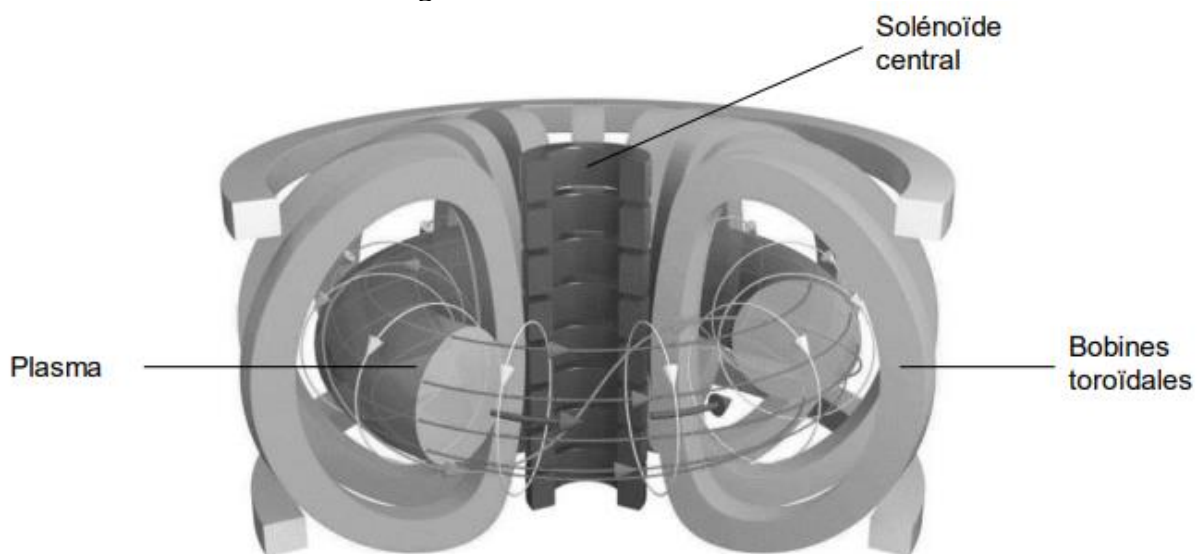


Figure 2 - Schéma d'un tokamak

Q7. Calculer un ordre de grandeur du rayon de Larmor d'un cation d'hélium ${}^4_2\text{He}^+$ (masse $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$ kg) de vitesse $v_0 = 3 \cdot 10^5$ m·s⁻¹ dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique $B_0 = 12$ T. Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale.

I.2 - Bouteille magnétique

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une " bouteille magnétique ", qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la figure 3.

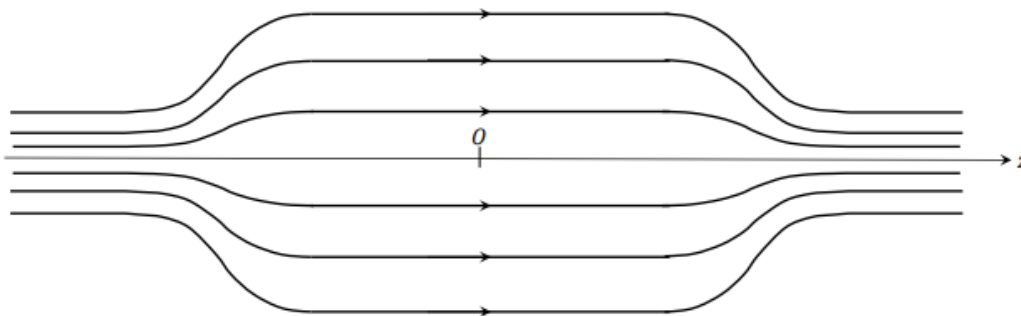


Figure 3 - Lignes de champ d'une bouteille magnétique

Q8. Comment évolue qualitativement l'intensité du champ magnétique lorsqu'on se rapproche des bords de la bouteille magnétique (c'est-à-dire lorsque $|z|$ augmente) ? Représenter graphiquement l'allure de la norme du champ magnétique $B(z)$ sur l'axe (Oz) .

On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse m

dans cette bouteille magnétique autour de l'axe (Oz) . Son vecteur vitesse est $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$ où $\vec{v}_\perp$ désigne la vitesse dans le plan perpendiculaire à $\vec{u}_z$, et $\vec{v}_\parallel$ selon $\vec{u}_z$.

Q9. Rappeler, schéma à l'appui, la définition du moment magnétique $\vec{\mu}$ d'une boucle de courant plane.

Q10. Au voisinage de l'axe (Oz) , le champ magnétique est localement uniforme et orienté selon $\vec{u}_z$: $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Dans cette question, on suppose comme dans la **Q4** que le mouvement du cation est circulaire, uniforme et de vitesse $v_\perp$, perpendiculairement au champ magnétique. Montrer que le moment magnétique $\vec{\mu}$ associé au cation a pour expression :

$$\vec{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\vec{u}_z.$$

L'expression du moment magnétique établie à la **Q10** reste en première approximation valable malgré les déplacements du cation selon l'axe (Oz) . En outre, on peut montrer que ce moment magnétique reste constant au cours du mouvement. Ainsi, le cation peut être assimilé à un dipôle magnétique rigide se déplaçant selon l'axe (Oz) , auquel on associe une énergie potentielle de la forme $Ep = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Q11. Montrer que $E = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + Ep$ est une constante. Quelle signification physique peut-on donner aux termes $\frac{1}{2}mv_\parallel^2$ et E du point de vue du dipôle magnétique ?

Q12. Tracer l'allure de $Ep(z)$. Discuter qualitativement les différents mouvements possibles du cation dans la bouteille magnétique en fonction de la valeur de E (états libres ou états liés). Dans quel cas peut-on dire que la bouteille magnétique se comporte comme un " miroir magnétique ", c'est-à-dire que le cation repart dans la direction opposée sur les bords de la bouteille ?

Q13. Quel défaut présente la bouteille magnétique pour le confinement du plasma ?

Partie II - Échauffement du plasma par induction

Pour rendre possible la fusion, il faut vaincre la barrière coulombienne qui s'oppose au rapprochement des deux noyaux d'hydrogène. C'est la raison pour laquelle il est préalablement nécessaire d'échauffer le plasma jusqu'à ce que les réactions de fusion s'initient. L'objectif est ensuite d'atteindre le seuil d'ignition, c'est-à-dire le moment où l'énergie libérée par les réactions de fusion suffit à maintenir la température nécessaire à la fusion.

Dans les tokamaks (figure 2), une partie de l'échauffement est réalisé par induction. Un solénoïde situé au centre du tokamak produit un champ magnétique $\vec{B}_1$ dépendant du temps. Le plasma, de géométrie torique, entoure ce solénoïde central : il est alors parcouru par un intense courant induit qui, par effet Joule, chauffe le plasma. On se propose de modéliser sommairement cette situation.

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) . Le solénoïde central d'axe (Oz) , de rayon a_1 , est parcouru par un courant $i_1(t)$ qui génère un champ magnétique $\vec{B}_1(r, t)$ tel que $\vec{B}_1(r < a_1, t) = \beta i_1(t) \vec{e}_z$ (avec β constant) et $\vec{B}_1(r > a_1, t) = \vec{0}$. Le plasma est assimilé à une boucle de courant filiforme parcourue par $i_2(t)$, de même axe que le solénoïde central et de rayon $a_2 > a_1$. (figure 7)

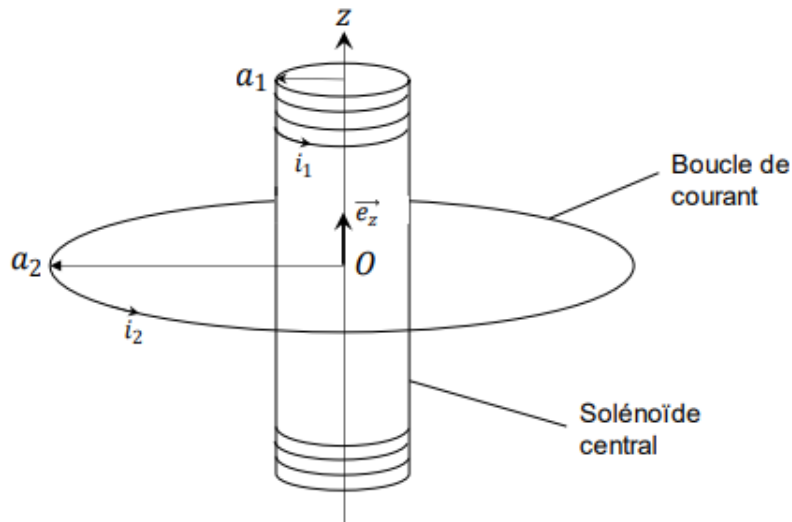


Figure 7 - Représentation schématique du système solénoïde central – plasma dans le tokamak

Q14. Exprimer l'inductance mutuelle M entre le solénoïde central et la boucle de courant, en fonction de β et de a_1 . Donner un ordre de grandeur de M pour le tokamak ITER, sachant que $a_1 = 2$ m et que le champ magnétique au centre du solénoïde est de 13 T pour un courant maximal de 46 kA.

On modélise l'interaction entre le solénoïde et le plasma par le circuit électrique représenté figure 8. Le solénoïde central, d'inductance propre L_1 et de résistance R_1 , est parcouru entre $t = 0$ et $t = t_1$ par le courant $i_1(t) = I_0 (1 - t / t_1)$ avec I_0 et t_1 des constantes. La boucle de courant représentant le plasma a pour résistance R_2 et pour inductance propre L_2 ; elle est parcourue par le courant $i_2(t)$. À $t < 0$, le courant i_2 est nul. M est l'inductance mutuelle entre les deux circuits.

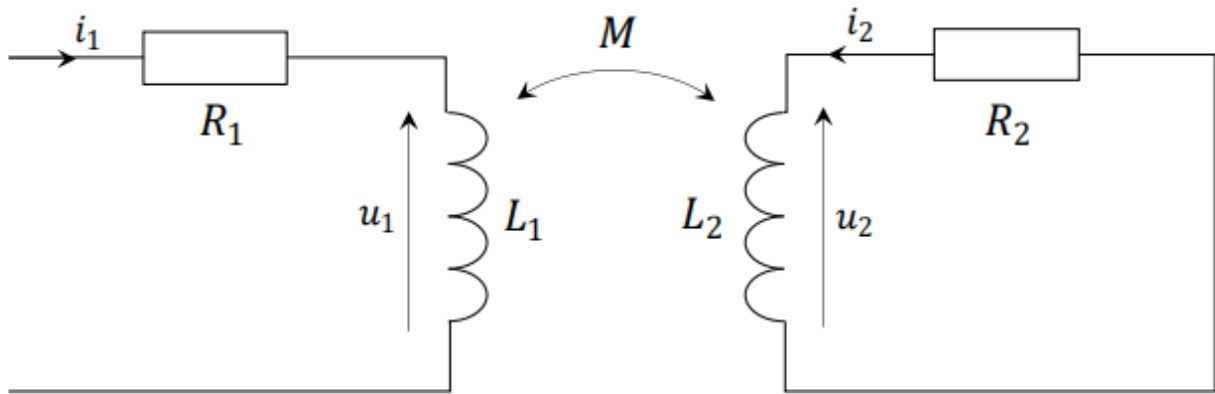


Figure 8 - Circuit équivalent au système solénoïde central – plasma

Q15. Montrer que $i_2(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{I_0}{\tau_1}$$

avec τ_1 et τ_2 qui seront exprimés en fonction de L_2 , R_2 , M et de t_1 .

Q16. En déduire $i_2(t)$. En supposant $t \ll \tau_2$, simplifier cette expression par un développement limité au premier ordre en t/τ_2 .

Q17. Exprimer l'énergie reçue par R_2 entre $t = 0$ et $t = t_1$ en fonction de R_2 , L_2 , M , I_0 et de t_1 , en supposant que $t_1 \ll \tau_2$. Quel est l'effet de cette énergie sur le plasma ?

Q18. Le physicien américain Lyman Spitzer a établi en 1950 que la résistivité ρ d'un plasma soumis à un champ magnétique dépendait de la température T du plasma proportionnellement à $T^{-3/2}$. À partir de cette information, quelle critique peut-on émettre sur la modélisation effectuée dans cette partie ?

Deuxième problème : Trains à sustentation magnétique

Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au-dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec des rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Il existe actuellement deux types de trains à grande vitesse à sustentation magnétique :

— un train à sustentation électromagnétique dans lequel le train lévite par attraction grâce à des aimants (Transrapid développé en Allemagne) ;

— un train à sustentation électrodynamique dans lequel le train lévite par répulsion grâce aux courants de Foucault induits par le déplacement du train (SCMaglev développé au Japon).

La seule réalisation commerciale du Transrapid est à l'heure actuelle la ligne de 30 kilomètres qui fonctionne depuis 2004 entre Shanghai et son aéroport international de Pudong. Le trajet s'effectue en moins de 8 minutes, à la vitesse moyenne de 245 km/h. Sur ce parcours le train atteint la vitesse de 430 km/h, il a la capacité d'accélérer de 0 à 350 km/h en 2 minutes.

La première version commerciale du SCMaglev doit relier en une heure Tokyo et Osaka, distantes de 400 km à vol d'oiseau. L'ouverture du premier tronçon de la ligne (Tokyo-Nagoya) est prévu en 2027 avec une vitesse de pointe sur le parcours de 505 km/h. En 2015 une rame de test de sept voitures a atteint la vitesse de 603 km/h, établissant ainsi l'actuel record de vitesse pour un train.



Transrapid



SCMaglev

Nous étudions ici quelques aspects du fonctionnement de ces trains, en accordant une attention particulière au Transrapid.

A - Modélisation du champ magnétique dans l'entrefer

La figure 2 présente la rame du Transrapid sur son rail et, dans un plan de coupe, le détail du système de sustentation. Ce système est constitué d'un électroaimant dont le circuit magnétique est composé :

- d'une portion de rail (1) en matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative μ_r ;
- d'une portion (2) solidaire de la rame, constituée du même matériau ferromagnétique, sur lequel sont bobinées N spires alimentées par un courant d'intensité $i(t)$.

Les deux portions sont séparées par un entrefer de largeur z variable. La section S du matériau ferromagnétique dans les portions (1) et (2) du circuit magnétique est supposée commune aux portions (1) et (2), constante le long du circuit magnétique et carrée de côté a : $S = a^2$.

(C) est une ligne de champ magnétique du circuit (figure 2).

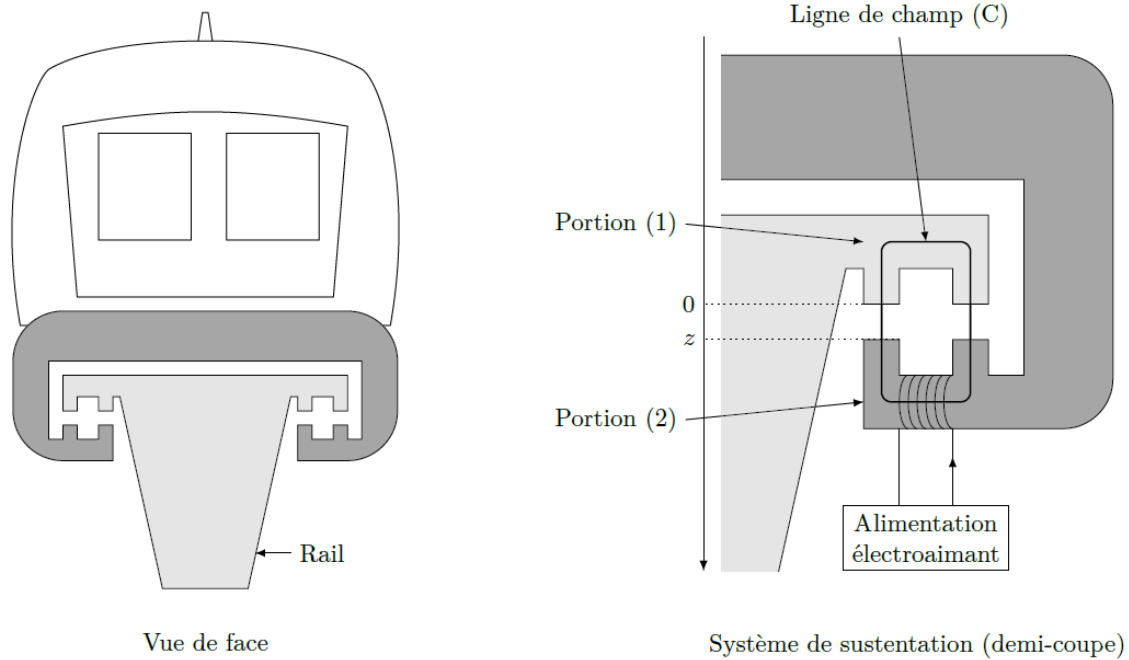


Figure 2 Transrapid et son système de sustentation

Les hypothèses d'étude sont les suivantes :

- les milieux ferromagnétiques sont supposés doux ;
- on néglige les pertes par courants de Foucault ;
- toutes les lignes de champ sont canalisées par le circuit magnétique.

On note :

- $\vec{B}_1$ le champ magnétique dans la portion (1) ;
- $\vec{B}_2$ le champ magnétique dans la portion (2) ;
- $\vec{B}_a$ le champ magnétique dans les entrefers ;
- z la largeur, variable, des entrefers entre les deux portions ferromagnétiques du circuit magnétique (l'origine O sur l'axe descendant ($O, \vec{u}_x$) est choisie sur le rail fixe) ;
- ℓ la longueur moyenne de la partie de la ligne de champ (C) située à l'intérieur des portions ferromagnétiques (1) et (2) du circuit.

Q1. Définir l'excitation magnétique $\vec{H}$ et donner l'expression reliant le vecteur $\vec{H}$ au champ magnétique $\vec{B}$ dans la matière et à l'aimantation $\vec{M}$ de la matière.

Q2. Rappeler les équations de Maxwell valables dans un milieu ferromagnétique dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

Q3. Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique dans le circuit magnétique ?

Q4. En déduire les relations liant $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ et $\vec{B}_a$ à proximité d'un entrefer.

Q5. À quelle condition, supposée vérifiée ici, les lignes de champ restent-elles parallèles dans l'entrefer ?

Q6. Tracer le cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique. A quelle condition peut-on dire que le milieu est doux ? Quelle relation lie le champ magnétique $\vec{B}$ et l'excitation magnétique $\vec{H}$ si le milieu est linéaire ? Définir la perméabilité relative et en donner un ordre de grandeur pour un milieu ferromagnétique doux.

Q7. Écrire le théorème d'Ampère sur le contour (C). En déduire B_2 en fonction de ℓ , z , N , i , μ_0 et μ_r . Simplifier cette écriture.

B - Lévitacion par attraction

On rappelle que la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile d'un circuit magnétique, parcouru par un courant d'intensité i , en translation suivant la direction $\vec{u}_z$ s'écrit

$$\vec{F}_{em} = \left(\frac{\partial E_m}{\partial z} \right)_i \vec{u}_z \text{ où } E_m \text{ est l'énergie magnétique.}$$

Q8. Montrer que l'inductance propre $L(z)$ du bobinage peut s'écrire sous la forme $L(z) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z}$.

Q9. Rappeler l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine d'inductance $L(z)$ parcourue par le courant d'intensité $i(t)$.

Q10. En déduire la force électromagnétique F_{em} s'exerçant sur la rame.

Q11. Calculer la masse m qui peut ainsi être mise en sustentation à une distance $\delta = 10 \text{ mm}$ du rail pour un électroaimant alimenté avec un courant d'intensité $i_e = 10 \text{ A}$. On donne : $N = 1000$, $S = 0,50 \text{ m}^2$.

Q12. Une rame a une masse d'environ 180 tonnes. En déduire le nombre d'électroaimants nécessaires pour la sustentation de la rame.

Q13. Montrer que le système de sustentation électromagnétique est instable.

C-Capteur de position sur un train

L'instabilité de l'équilibre de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position de l'entrefer dans lequel se trouve le champ magnétique de sustentation du train. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position.

Capteur à entrefer variable « push-pull »

La figure 3 décrit le schéma de principe d'un capteur inductif à entrefer variable dans un montage « push-pull ».

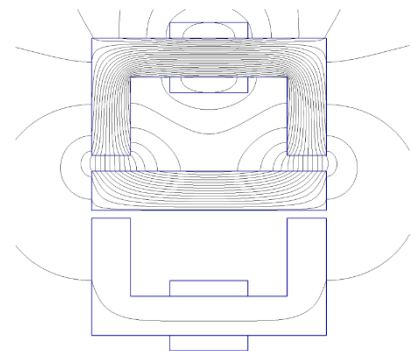
Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solide du rail fixe et de deux bobines B1 et B2 sur deux noyaux ferromagnétiques en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines B1 et B2 du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre (figure 3 à gauche). Ces bobines B1 et B2 sont indépendantes des bobines assurant la lévitation. Elles sont constituées de N_c spires de surface S .

La carte de champ ci-contre a été établie lorsque seule la bobine B1 est alimentée et que le système est à l'équilibre.

Q14. Écrire l'inductance L_e de la bobine B1 lorsque la rame est à l'équilibre. On appelle δ l'épaisseur de l'entrefer.

On suppose que lorsque le système est à l'équilibre et que les deux bobines sont alimentées, elles ont la même inductance L_e .

On envisage une variation Δz de la position du train par rapport à la position d'équilibre $z_e = \delta$ (figure 3 à droite), en considérant $\Delta z \ll \delta$.



Q15. Écrire les inductance L_1 et L_2 de chacun des bobines B1 et B2 en fonction de L_e et en se limitant au terme du premier ordre en $\Delta z/\delta$.

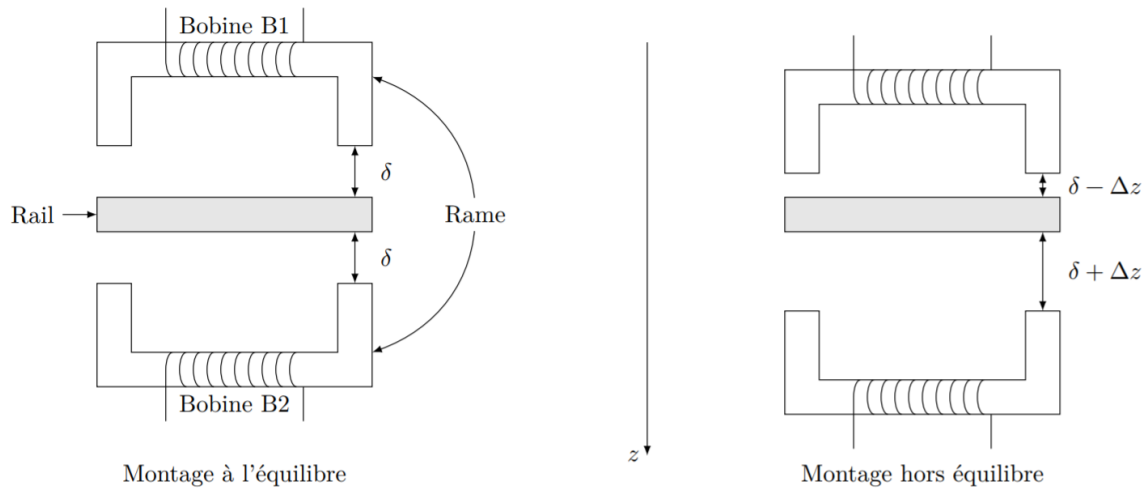


Figure 3

Mesure des variations d'inductance

Les bobines B1 et B2 sont alimentées par un générateur délivrant une tension électrique $e(t) = E \cos(\omega t)$, de pulsation ω , en série avec une résistance R (figure 4). On néglige ici les résistances des deux bobines.

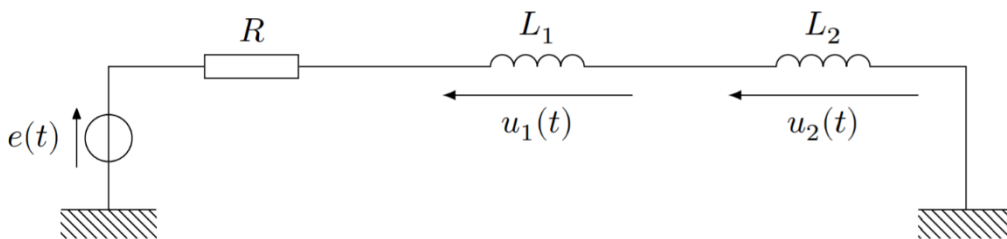


Figure 4 Alimentation du capteur

Q16. Déterminer les expressions des tensions électriques complexes $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$ en fonction de R , L_1 , L_2 , ω et $\underline{e}$.

Ces tensions sont placées à l'entrée du montage présenté figure 5. L'ALI est supposé idéal en fonctionnement linéaire.

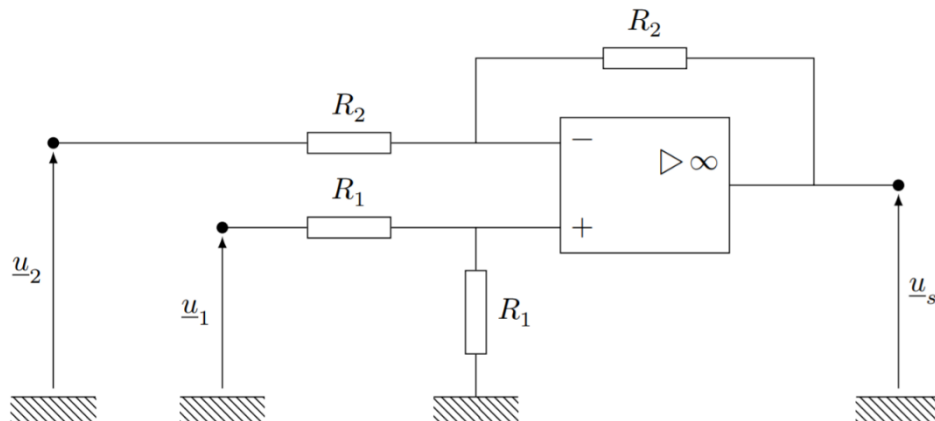


Figure 5 Montage soustracteur

Q17. Montrer que la tension électrique de sortie du montage peut s'écrire sous la forme

$\underline{u}_s = K(\underline{u}_1 - \underline{u}_2)$ où K est une constante que l'on déterminera en fonction des composants du montage.

Q18. Exprimer la fonction de transfert complexe $\underline{T}(j\omega)$ sous la forme $\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = T_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ où T_0 et ω_0 sont des fonctions de L_e , R , Δz et δ , que l'on déterminera.

Q19. De quel type de filtre s'agit-il ? Quelle est la signification de la pulsation ω_0 ? Dans quelle gamme de fréquences doit-on travailler pour que $T(j\omega)$ soit indépendant de ω et proportionnel au déplacement de la rame ?

On a $R = 750 \, \Omega$, $L_e = 60 \, \text{mH}$ et une fréquence d'utilisation $f = 4 \, \text{kHz}$.

Q20. Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme $u_s(t) = E \frac{\Delta z}{\delta} \cos(\omega t + \varphi)$. Exprimer et calculer le déphasage φ .

Électronique de conditionnement

On souhaite obtenir un signal continu image de la position z de la rame. On utilise pour cela un multiplieur analogique, avec une constante de multiplication K_m , dans le montage donné figure 6.

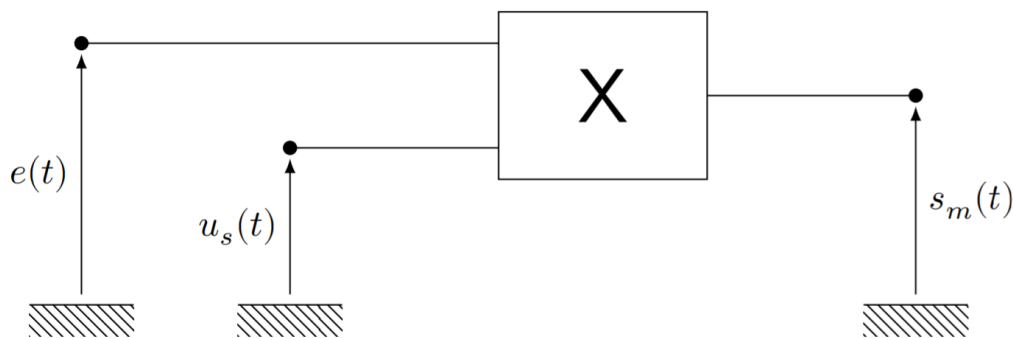


Figure 6 Multiplieur analogique

Q21. Exprimer la tension électrique $s_m(t)$ à la sortie du multiplieur et donner sa décomposition spectrale. Préciser le terme représentatif de la position z de la rame.

Q22. Quel montage doit-on placer à la sortie du multiplieur pour récupérer une tension continue S_m proportionnelle au déplacement Δz ? Préciser la nature et les caractéristiques de ce montage.

Q23. Application numérique

Le capteur permet de mesurer la tension de sortie à $10 \, \text{mV}$ près. En déduire le plus petit écart relatif mesurable par rapport à la position d'équilibre. On prendra $E = 6,00 \, \text{V}$, $K_m = 0,10 \, \text{V}^{-1}$.

FIN DE L'ÉPREUVE