

Devoirs surveillé n° 3
9h00 – 12h00 3 heures

Calculatrices NON autorisées

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

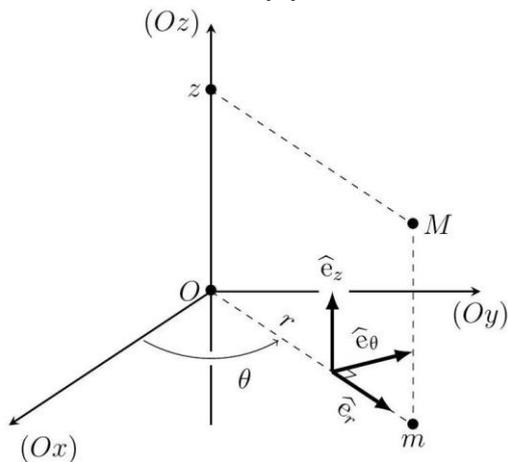
RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose d'un problème de 3 parties indépendantes.

Physique en géométrie cylindrique

Ce sujet est consacré à l'étude de divers phénomènes physiques décrits dans le système de coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) (r, θ, z) du point M rappelé sur la figure 1 ; m est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) . On rappelle aussi, dans ce système de coordonnées, les expressions de plusieurs opérateurs de l'analyse vectorielle. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{a}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau (\hat{e}_x).



$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z$$

Figure 1 - Coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

Formule trigonométrique : $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [-\cos(a + b) + \cos(a - b)]$.

I. Étude d'un alternateur

On modélise le rotor d'un alternateur par une spire circulaire de surface S parcourue par un courant d'intensité $i(t)$ et tournant sans frottement autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante ω , dans une région où existe un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u}_x$, perpendiculaire à l'axe de rotation (figure 7). Le vecteur unitaire \vec{n} normal à la spire est orienté en accord avec le courant $i(t)$. On considère qu'à $t = 0$, \vec{B} et \vec{n} sont colinéaires de même sens. On note R la résistance et L l'inductance propre de la spire.

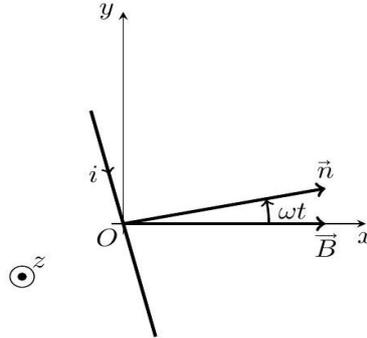


Figure 7

Q1. Justifier qualitativement l'apparition du courant $i(t)$ dans la spire. Déterminer, en fonction des données, l'expression de l'intensité du courant qui circule dans la spire en régime sinusoïdal forcé.

On rappelle l'expression du moment du couple subi par un dipôle magnétique en champ magnétique uniforme : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Q2. Obtenir l'expression de la valeur moyenne de la projection sur l'axe (Oz) du moment du couple exercé par \vec{B} sur la spire en rotation, en fonction des données. Interpréter son signe.

Q3. Déterminer la puissance mécanique moyenne fournie par la turbine qui entraîne le rotor de cet alternateur, ainsi que la puissance moyenne dissipée par effet Joule. Comparer ces deux puissances.

II. Lévitiation magnétique

On dispose (voir figure 5) deux spires plates, formées respectivement de N_1 et N_2 spires circulaires de rayon R et d'axe (Oz) ; elles entourent toutes les deux un cylindre de rayon très légèrement inférieur à R , de hauteur ℓ , formée d'un matériau magnétisable ; on note \vec{M} l'aimantation du matériau (moment dipolaire magnétique par unité de volume) et on supposera le milieu linéaire de susceptibilité magnétique χ : $\vec{M} = \chi\vec{H}$ où \vec{H} est l'excitation magnétique.

Q4. Déterminer la dimension de χ .

Quelle relation lie \vec{H} et le champ magnétique \vec{B} ?

Définir puis exprimer la perméabilité magnétique relative μ_r du milieu en fonction de χ .

On admet que les lignes de champ des vecteurs \vec{H} , \vec{B} et \vec{M} à l'intérieur du milieu magnétique sont des droites parallèles à (Oz) . On notera $\vec{B} = B_0(z)\hat{e}_z$

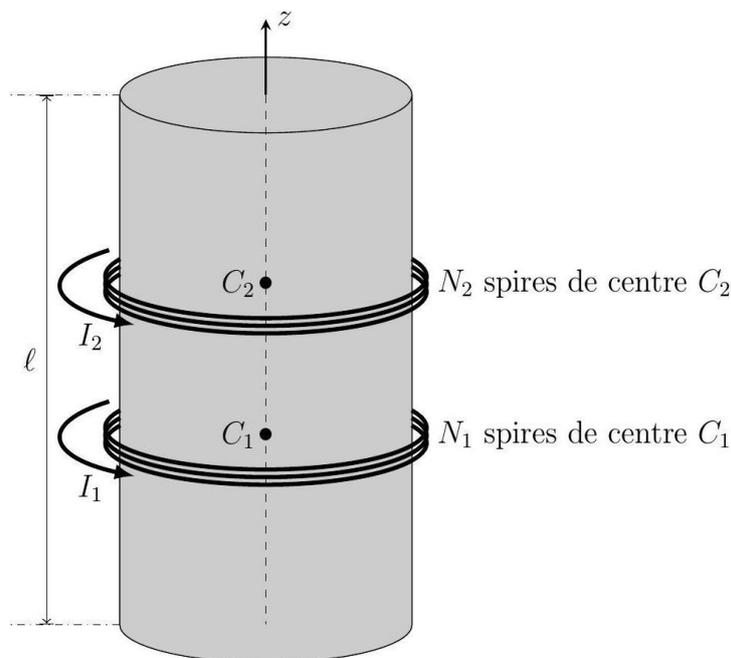


Figure 5 - Système de deux bobines.

Q5. Montrer que ces trois champs sont uniformes dans ce milieu.

En négligeant le champ magnétique à l'extérieur du milieu magnétique, exprimer B_0 en fonction de $\mu_r, \mu_0, N_1, N_2, \ell$ et des courants I_1 et I_2 dans les deux bobines.

Q6. En déduire les inductances propres L_1 et L_2 des deux bobines et leur inductance mutuelle M_0 .

Dans ce qui suit, la bobine $N^{\circ}1$ est fixe à la base $z = 0$ du cylindre et l'on considère que C_1 se situe à l'origine O de l'axe (Oz) . La bobine $N^{\circ}2$ est mobile ; on note z l'abscisse de son centre C_2 . On suppose enfin que l'inductance mutuelle $M(z)$ est une fonction positive monotone décroissante de z qu'on écrira sous la forme $M(z) = M_0 f(z)$.

Le courant électrique $I_1(t) = I \cos(\omega t)$ est imposé par un générateur que l'on ne précisera pas. La spire $N^{\circ}2$ est fermée sur elle-même et on nomme G sa conductance électrique.

Dans la suite, on ne suppose plus que \vec{B} est uniforme.

Q7. Déterminer, en régime harmonique forcé et à altitude z fixée, l'expression du courant induit sous la forme $I_2(z, t) = I[\beta(z)\sin(\omega t) - \alpha(z)\cos(\omega t)]$. On exprimera les fonctions $\beta(z)$ et $\alpha(z)$ en fonction de $G, M(z), \omega$ et L_2 .

Q8. Rappeler l'expression de la relation de Maxwell-Thomson. En appliquant sa forme intégrale sur un cylindre de rayon R et de hauteur dz , montrer que, dans des conditions d'approximation à préciser, l'expression de la composante radiale du champ $\vec{B}_{1 \rightarrow 2}$ créé par la bobine $N^{\circ}1$ au niveau de la bobine $N^{\circ}2$, s'écrit

$$B_r = \hat{e}_r \cdot \vec{B}_{1 \rightarrow 2} \simeq -\frac{\mu_0 \mu_r N_1 R}{2\ell} I_1(t) \frac{df}{dz}$$

Q9. En déduire la valeur moyenne, sur une période, de la force exercée sur la bobine $N^{\circ}2$. Commenter son signe et l'influence de z sur cette force.

III. Le magnétron

Le magnétron est un générateur d'ondes radio (notamment utilisé pour la production des ondes de fréquence $f_0 = 2,45\text{GHz}$ utilisées dans les fours à micro-ondes). Les schémas de la figure 3 sont extraits du brevet américain No 2123728 déposé en 1938 par Telefunken.

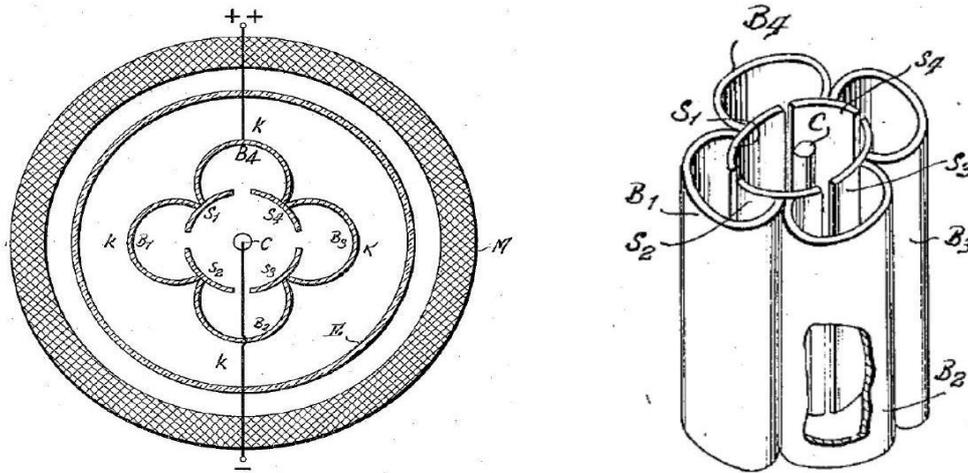


Figure 3 - Brevets originaux du magnétron.

Le dispositif comporte un bobinage M , entourant le reste du dispositif et représenté sur la figure 3, qui crée un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_0 = B_0\hat{e}_z$ et une cathode C cylindrique de rayon a , chauffée donc permettant d'émettre des électrons de faible vitesse. Ces électrons sont accélérés par la différence de potentiel avec une anode circulaire de rayon b (ici découpée en quatre parties S_1, S_2, S_3 et S_4). L'anode est portée à une tension positive U_0 relativement à C pour accélérer les électrons.

Pour les applications numériques on prendra $a = 1\text{ mm}$ et $b = 6\text{ mm}$. L'intérieur du dispositif est initialement vide.

Un schéma de principe résumant le brevet original fait l'objet de la figure 4

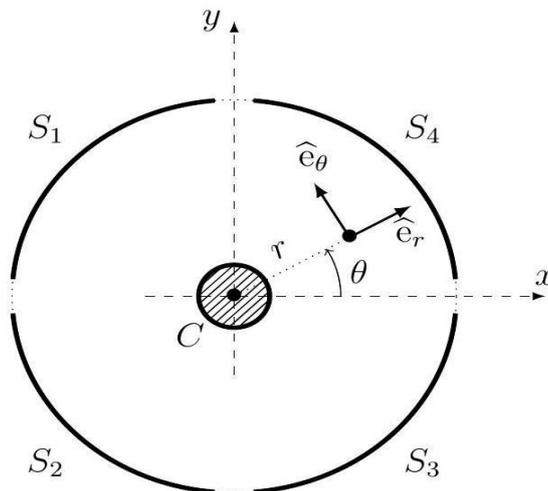


Figure 4 - Schéma de principe du magnétron. Le bobinage extérieur M n'est pas représenté.

Q10. Comment choisir la géométrie du bobinage M et le courant I dans M pour créer un tel champ magnétique ?

Q11. Expliciter le potentiel électrostatique $V(r)$ en tout point de la cavité $a \leq r \leq b$. On négligera tout effet de bord.

Au cours de leur mouvement, ces électrons (masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C) passent dans la cavité entre les différentes parties de l'anode. Ils émettent une onde électromagnétique de pulsation égale à celle de leur mouvement au voisinage de l'anode. Dans un premier temps nous négligerons l'effet de la charge des électrons en mouvement sur le champ électromagnétique dans la cavité.

Q12. Montrer que le mouvement des électrons est plan.

Q13. Rappeler le théorème du moment cinétique ; expliciter la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ des électrons en fonction de r , a et de $\omega_c = eB_0/m_e$.

Q14. Quelle valeur du champ magnétique faut-il imposer pour produire une onde de fréquence f_0 au voisinage de l'anode ? Faire l'application numérique.

L'appareil ne fonctionne de façon satisfaisante que si les électrons atteignent en grand nombre le voisinage immédiat de l'électrode externe, mais sans jamais entrer en contact avec celle-ci.

Q15. Montrer que le mouvement est conservatif ; en déduire l'expression de la vitesse radiale \dot{r} de l'électron en fonction de r et des autres paramètres du problème.

Q16. Comment choisir la tension U_0 pour assurer le bon fonctionnement de l'appareil ? On se contentera d'une expression analytique de U_0 en fonction de e, m_e, B, a et b sans faire l'application numérique.

En présence d'une densité assez élevée d'électrons, le champ électrique est modifié par leur présence. Nous ne ferons l'étude que d'une solution particulière du problème : on considère que tous les électrons tournent sur des trajectoires circulaires de rayons variables $a < r < b$ à la même vitesse angulaire constante ω dans un champ magnétique supposé inchangé. On notera ϵ_0 la permittivité du vide.

Q17. Expliciter, en fonction de ω_c, ω, e, m_e et r , le champ électrique \vec{E} présent dans la cavité et permettant un tel mouvement des électrons. On vérifiera que ce champ est fonction linéaire de r .

Q18. En déduire la différence de potentiel U_0 en fonction des mêmes paramètres et de a et b .

Q19. Exprimer la densité particulaire des électrons dans l'appareil en fonction de a, b, U_0, ϵ_0 et e .

Q20. L'hypothèse consistant à considérer le champ magnétique comme inchangé est-elle raisonnable ?

FIN DE L'ÉPREUVE