

Mardi, 25 février 2025

Épreuve de physique chimie du concours blanc
12h00 4 heures

Matrice autorisée

Attention à la clarté, à la précision et à la concision de la

réponse. Si vous estimez qu'il y a une erreur d'énoncé, vous pouvez lui signaler la faute en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été

DES CONSIGNES

L'énoncé est non effaçable pour la rédaction de votre réponse. Les croquis, s'ils peuvent être utilisés, mais exclusivement pour les

illustrations.

Il y a de 2 problèmes indépendants.

1^{er} problème :

Terraformation de Mars



Figure 1 Vue d'artiste des phases hypothétiques de la terraformation de Mars. D'après Wikipédia, auteur : Daein Ballard.

Parue entre 1994 et 2000, la Trilogie de Mars de l'américain Kim Stanley Robinson relate la colonisation et la terraformation de la planète Mars.

La terraformation consiste à modifier la géologie et le climat d'une planète pour la rendre habitable par les humains ou toute forme de vie terrestre. Les modifications profondes à apporter à la planète sont complexes et demandent énormément de ressources. Sur Mars, les faibles température et pression empêchent la vie à la surface. Avant de développer un écosystème, il faut d'abord apporter une atmosphère à même de réchauffer la planète et de supporter la vie. Bien que considérée comme un vieux rêve de science fiction, la faisabilité de la terraformation soulève de nombreuses questions de physique, ce problème en abordant quelques-unes.

Le problème comporte deux parties indépendantes. Des données et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé. Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

I L'atmosphère de Mars et son échappement

Il y a quatre milliards d'années, Mars avait un environnement identique à celui de la Terre : une atmosphère dense était présente et permettait de conserver chaleur et humidité, ce qui participait à rendre cette planète habitable.

Aujourd'hui, Mars n'a quasiment plus d'atmosphère. Elle est devenue une planète froide et désertique. Son atmosphère actuelle est principalement composée (en pourcentages massiques) de dioxyde de carbone (96 %), d'argon (environ 2 %) et de diazote (2 %). Elle comporte également des traces de dioxygène, d'eau et de méthane. La pression moyenne ambiante est environ 170 fois moins importante que sur Terre. À une altitude de référence, au niveau du sol martien, la pression moyenne et la température moyenne sont respectivement de 600 Pa et 210 K. La masse totale de l'atmosphère martienne est estimée à 25 teratonnes (25 000 milliards de tonnes), soit environ 200 fois moins que l'atmosphère terrestre.

Un point M de l'atmosphère de Mars est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) de centre O , le centre de la planète, celle-ci étant modélisée par une boule de répartition de masse à symétrie sphérique. On note donc que $r \geq R_m$, R_m étant le rayon moyen de Mars.

I.A – Préliminaire : le champ de pesanteur martien

On s'intéresse dans un premier temps à l'évolution du champ de pesanteur martien avec l'altitude. Pour cela, on l'assimile au champ gravitationnel et on raisonne par analogie avec l'interaction électrostatique. Le champ de pesanteur martien est noté $\vec{g}(M)$ au point M .

Q 1. Expliquer en quoi l'assimilation du champ de pesanteur au champ gravitationnel constitue une approximation.

Q 2. Soit deux particules supposées ponctuelles positionnées aux points M_1 et M_2 , portant respectivement les charges q_1 et q_2 . On note d , la distance entre M_1 et M_2 . Rappeler l'expression de la force d'interaction électrostatique créée par q_1 et agissant sur q_2 . Proposer un schéma associé.

Q 3. Par une analogie formelle soignée entre les champs électrostatique et gravitationnel, construire et énoncer le théorème de Gauss gravitationnel (analogue en gravitation du théorème de Gauss de l'électrostatique).

Q 4. En déduire, dans l'espace autour de Mars, une expression de l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(M)$ de cette planète.

Q 5. Obtenir une expression de $\vec{g}(M)$ en fonction de R_m , r et $\vec{g}_0$, accélération de la pesanteur au niveau du sol. Déterminer et calculer l'intensité g_0 de cette dernière.

I.B – L'atmosphère martienne, hors tempêtes de poussières

I.B.1) Le modèle de l'atmosphère isotherme

On néglige tout mouvement au sein de l'atmosphère martienne. On l'assimile à un gaz parfait de particules de masse molaire M_a . On note respectivement $P(M)$ et $\mu(M)$ la pression et la masse volumique au point M . La température de l'atmosphère, supposée uniforme, est notée T_0 . La pression au sol est notée P_0 .

On suppose l'accélération de la pesanteur $\vec{g}(M)$ radiale et d'intensité uniforme : $\|\vec{g}(M)\| = g_0$.

Q 6. Rappeler l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression dans un fluide, puis établir l'équation locale de la statique des fluides.

Q 7. Montrer que la loi de variation de la pression se met sous la forme $P(r) = C_0 \exp(-\frac{r}{H})$ dans l'atmosphère martienne ($r \geq R_m$). Exprimer le facteur C_0 et la hauteur d'échelle H en fonction de P_0 , M_a , g_0 , R et T_0 .

Q 8. Déterminer une valeur numérique pour M_a compte tenu de la composition de l'atmosphère martienne fournie dans l'introduction de cette partie. Puis calculer H .

I.B.2) Déduction de la masse de l'atmosphère martienne

Q 9. Expliciter grâce au modèle précédent $\mu(r)$ en fonction de r , R_m , H et $\mu_0 = \mu(R_m)$. On précisera l'expression de μ_0 en fonction de P_0 , M_a , R et T_0 .

Q 10. Montrer que l'expression de la masse totale de l'atmosphère martienne – d'extension infinie dans le modèle étudié – se met sous la forme suivante : $m_{\text{atm}} = \frac{4\pi P_0}{g_0} [2H^2 + 2HR_m + R_m^2]$. En déduire une expression approchée, puis effectuer l'application numérique.

I.B.3) Une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère

La couche la plus externe de l'atmosphère d'un corps céleste est appelée exosphère. L'altitude minimale de l'exosphère, appelée exobase, peut être choisie comme définition de l'épaisseur de l'atmosphère : on la note e .

L'exosphère se définit comme la région de l'atmosphère où la densité de particules est assez faible pour que l'effet des collisions entre particules soit négligeable en comparaison de l'effet de leur cinétique. En particulier, le libre parcours moyen des particules de l'atmosphère y est supérieur à la longueur caractéristique de décroissance de la densité de l'atmosphère.

L'expression du libre parcours moyen d'une particule de l'atmosphère est donnée par $\ell(M) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu(M)}$, où a est la taille typique des molécules formant le gaz et N_a la constante d'Avogadro.

Q 11. Donner l'interprétation physique du libre parcours moyen. En proposer une estimation au niveau du sol martien, que l'on notera ℓ_0 . Commenter.

Q 12. Exprimer e en fonction de ℓ_0 et H en utilisant le modèle de l'atmosphère isotherme précédent. En déduire une estimation de l'épaisseur de l'atmosphère martienne. Confronter le résultat à la valeur fournie dans les données en fin d'énoncé.

I.C – L'échappement de l'atmosphère martienne vers l'espace

En 2013, la NASA a envoyé la sonde MAVEN qui est toujours en activité autour de Mars. Sa principale mission est de mesurer quantitativement le taux de perte des composés atmosphériques qui s'échappent dans le milieu interplanétaire afin de pouvoir extrapoler les taux d'échappement tout au long de l'histoire de la planète. En novembre 2015, l'équipe scientifique de MAVEN a rendu publics des résultats montrant que les gaz atmosphériques s'évaporaient dans l'espace au rythme de 100 g.s^{-1} environ.

Les mécanismes ayant conduit l'atmosphère martienne à être ce qu'elle est aujourd'hui ne sont pas bien connus. L'une des hypothèses avancées est que la faible gravité a entraîné la dispersion progressive des gaz légers de la haute atmosphère vers l'espace.

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la perte de la majeure partie de l'atmosphère, il y a environ 4 milliards d'années. En particulier, Mars aurait perdu son bouclier magnétique permettant alors au vent solaire de balayer une grande partie de son atmosphère. De plus, d'importantes éruptions volcaniques ou des impacts de météorites auraient éjecté les gaz atmosphériques vers l'espace.

Aujourd'hui encore, d'autres processus continuent de faire évoluer la composition de l'atmosphère martienne. Le phénomène d'échappement atmosphérique décrit la perte des gaz constituant l'atmosphère vers l'espace. Plusieurs mécanismes peuvent contribuer à cet échappement, le principal paramètre d'influence étant la masse de la planète Mars.

I.C.1) Processus d'échappement de Jeans

L'un des mécanismes d'échappement est celui dit de Jeans. Certaines molécules en provenance des couches atmosphériques inférieures de Mars peuvent subir des réactions chimiques les transformant en atomes neutres (N, H, O, etc). Lorsque ces réactions se produisent près de l'exobase, certains des atomes sont expulsés vers l'exosphère. En effet, dans cette région, la densité est suffisante pour que des collisions se produisent, mais elle est suffisamment faible pour que l'énergie acquise par les particules ne soit pas dissipée dans de nouvelles collisions (thermalisation). Ainsi, ces atomes ont acquis suffisamment d'énergie pour s'échapper dans l'espace interplanétaire : ils ont alors une vitesse supérieure à la vitesse de libération de l'atmosphère.

Ce phénomène peut s'observer également dans une moindre mesure pour les molécules.

Q 13. À l'aide des graphes fournis figure 2 et de données numériques dûment justifiées, indiquer quel est le principal élément chimique qui subit l'échappement de Jeans. Conclure. De la même manière, justifier la composition de l'atmosphère martienne actuelle.

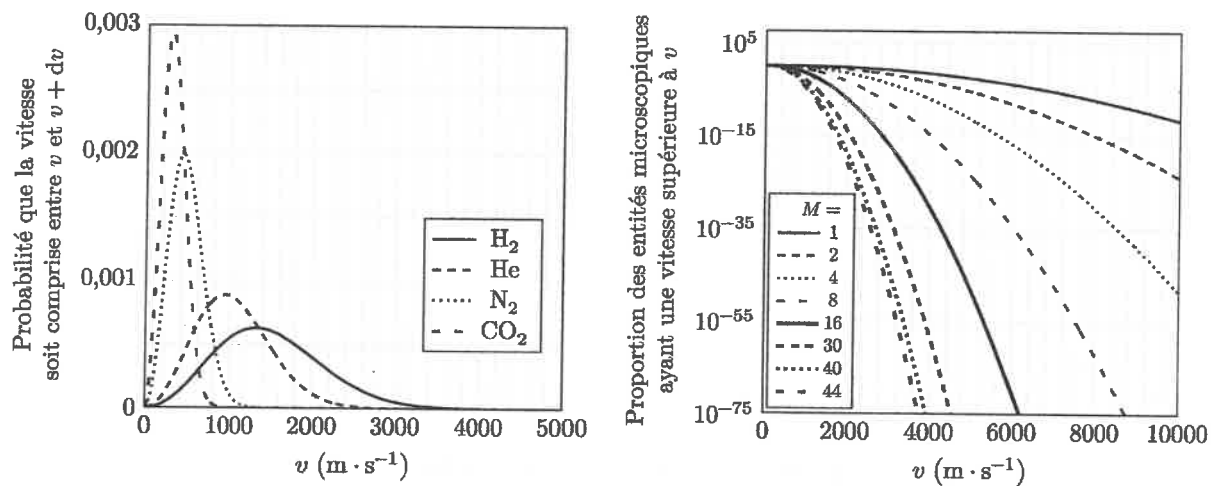


Figure 2 Gauche : distribution maxwellienne des vitesses, pour la température $T_0 = 210 \text{ K}$. Droite : proportion des entités microscopiques de masse molaire M , exprimée en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ayant une vitesse supérieure à v .

Données et formulaire

Caractéristiques de la planète Mars :

Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil	r_m	$2,28 \times 10^8 \text{ km}$
Rayon moyen de la planète Mars	R_m	$3,39 \times 10^3 \text{ km}$
Masse de la planète Mars	m_m	$6,42 \times 10^{23} \text{ kg}$
Température à la surface de Mars	T_0	210 K
Pression à la surface de Mars	P_0	600 Pa
Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière)	e	$2,20 \times 10^2 \text{ km}$

Caractéristiques du Soleil :

Rayon moyen du Soleil	R_s	$6,96 \times 10^5 \text{ km}$
Masse du Soleil	m_s	$1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
Température de surface du Soleil	T_s	5778 K

Ceinture d'astéroïdes :

Rayon moyen de la ceinture d'astéroïdes	r_{ast}	$4,6 \times 10^8 \text{ km}$
---	------------------	------------------------------

Autres données utiles :

Constante de gravitation universelle	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	N_a	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire du carbone	M_C	$12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	M_O	$16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'argon	M_{Ar}	$40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'azote	M_N	$14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \\ \text{div} \vec{f} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \\ \left[f(r) \vec{u}_r \cdot \vec{\text{grad}} \right] (f(r) \vec{u}_r) &= f(r) \frac{df(r)}{dr} \vec{u}_r \end{aligned}$$

Quelques intégrales : $\int_0^\infty u^2 \exp(-u) du = 2$ et $\int_0^\infty u \exp(-u) du = 1$.

2^e problème :

Analyse physique d'un spa

La pandémie de COVID-19 a profondément changé la consommation de loisirs des français. N'étant pas sûrs de pouvoir voyager ou que les campings et plages soient accessibles, nombreux sont ceux qui ont cherché à se procurer du bien-être dans leur propre habitation en achetant une piscine ou un spa gonflable. Dans ce problème plusieurs aspects de l'utilisation du spa sont abordés, de la première installation au stockage hivernal.



FIGURE 1 – Photographie du spa étudié

Les applications numériques comporteront deux chiffres significatifs. Les données nécessaires à ces applications numériques et certaines définitions habituelles sont rassemblées en fin d'énoncé. Elles sont complétées par un formulaire. Les vecteurs sont généralement notés avec des flèches ($\vec{v}$ de norme v) et sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\hat{u}_x$).

Le manuel d'utilisation fournit quelques données numériques :

Hauteur du spa gonflé sans couverture	$H = 1,0 \text{ m}$
Hauteur d'eau	$h_e = 3/4 \text{ m} = 75 \text{ cm}$
Diamètre intérieur	$d_{\text{int}} = \sqrt{2} \text{ m} = 1,4 \text{ m}$
Diamètre extérieur	$d_{\text{ext}} = 2,0 \text{ m}$
Temps de gonflage	$t_g = 10 \text{ min}$
Seuil d'ouverture de la valve de surpression	$\delta p = 0,1 \text{ bar}$

Module de commande : maintien en température

L'unité de contrôle a besoin de mesurer la température pour assurer certaines fonctions comme son maintien automatique à une certaine valeur. Le principe est d'allumer et d'éteindre le module de chauffage avec des interrupteurs commandés.

La température de l'eau est mesurée à l'aide d'une thermistance. On peut modéliser ce composant par un cylindre métallique de section S , de longueur L , de conductivité électrique σ et dont la résistance électrique R_{th} dépend de sa température.

- – 13. Sans prendre en compte les effets de la température, en négligeant les effets de bords et en régime permanent, montrer que la résistance de ce cylindre serait $R_{el} = L/(\sigma S)$.

Afin d'interpréter la dépendance de la résistance avec la température, on adopte le modèle de Drude qui consiste à appliquer la théorie cinétique des gaz aux électrons libres dans le métal. Ces derniers subissent des collisions aléatoires avec les ions beaucoup plus lourds et considérés immobiles.

Dans le modèle de Drude, chaque électron de vitesse $\vec{v}$ est soumis d'une part à la force due au champ électrique $\vec{E}$ supposé constant qui apparaît en appliquant une différence de potentiel aux extrémités du métal, et d'autre part, à une force de type frottement fluide $\vec{F}_d = -m\vec{v}/\tau_d$. Cette dernière permet de modéliser macroscopiquement l'effet d'un très grand nombre de collisions microscopiques aléatoires de moyenne nulle.

- – 14. Montrer que la vitesse d'un électron est constante au bout d'un temps grand devant τ_d . En déduire une expression de la conductivité électrique en fonction de m , e , τ_d et de la densité volumique n_e d'électron dans le métal.

- – 15. En notant $\vec{v}_0$ la vitesse d'un électron juste après une collision à l'instant t_0 , comment s'exprime sa vitesse $\vec{v}$ juste avant la collision suivante δt plus tard ?

En moyennant le résultat sur un très grand nombre de collisions, proposer une interprétation physique pour τ_d .

En déduire que la résistance du métal augmente lorsque sa température augmente.

Dans la suite, on notera $R_{th} = R_0 [1 + \alpha(T - T_{ref})]$ la résistance de la thermistance en cuivre à la température T , avec $\alpha = 4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ et $T_{ref} = 20^\circ \text{ C}$.

On s'intéresse au mode « maintien de température » de l'unité de contrôle, utilisé lorsque l'eau du spa a déjà été chauffée à la température souhaitée T_{max} . Ce mode maintient la température dans l'intervalle $[T_{min}, T_{max}]$, où $T_{min} = T_{max} - 2^\circ \text{ C}$. On a donc besoin de deux interrupteurs commandés en température. Un montage possible pour un interrupteur est donné sur la figure 2, où les deux générateurs de tension constante V_0 sont identiques. L'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) idéal fonctionne ici en saturation, il n'a que deux tensions de sorties possibles $\pm V_{sat}$ ce qui permet de commander la fonction ON/OFF d'un interrupteur.

- – 16. Pour quelle valeur T_c de la température, l'interrupteur (caractérisé par V_s) change-t-il d'état ? On exprimera T_c en fonction de R_2 , R_0 et α .

On suppose R_0 et α parfaitement déterminés, quelle précision relative est nécessaire sur R_2 pour régler la température au degré près ?

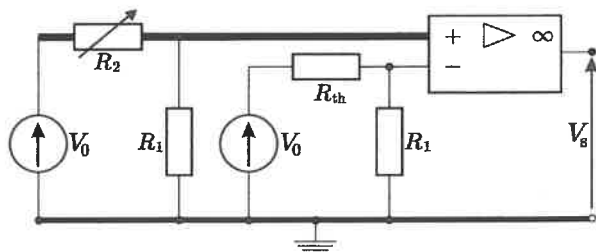


FIGURE 2 – Interrupteur à amplificateur linéaire

- – 17. Expliquer comment organiser deux interrupteurs commandés qui permettent de maintenir la température dans l'intervalle $[T_{min}, T_{max}]$.

Brassage de l'eau

Nous cherchons à modéliser dans cette partie la façon dont les bulles d'air produites au fond du spa permettent de brasser l'eau qu'il contient et de générer ainsi une sensation de relaxation à son utilisateur.

- – 18. En faisant l'hypothèse que la température des bulles d'air est constante, quelle est la variation de volume relative d'une bulle due à la pression hydrostatique ?
En déduire que le volume V_b d'une bulle peut être considéré constant au cours de sa remontée vers la surface.

On note R le rayon d'une bulle qui, lors de sa remontée à la vitesse de module v_b , subit une force de trainée $\vec{F}_t$ de module F_t . Sur la figure 3 ci-après, on définit le coefficient de trainée C_x et on trace sa représentation graphique en fonction du nombre de Reynolds Re . On précise que pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds (régime de Stokes), la courbe peut être approximée par $C_x = 24/Re$.

- – 19. On considère une bulle de taille caractéristique $R \simeq 1 \text{ mm}$ remontant à une vitesse de l'ordre de quelques dizaines de centimètres à un mètre par seconde, estimer le nombre de Reynolds correspondant. Comment s'exprime la force de trainée dans ce régime ?

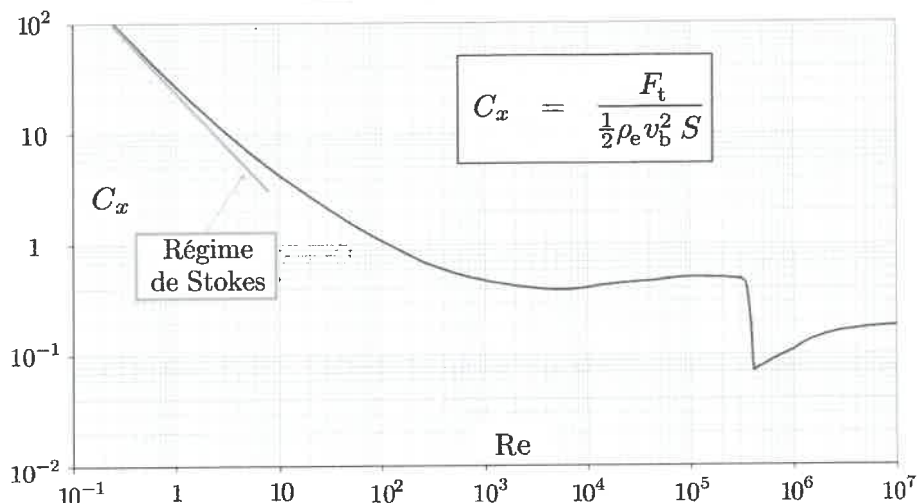


FIGURE 3 – Coefficient de trainée (C_x) en fonction du nombre de Reynolds pour une bulle de section S dans la direction de l'écoulement, subissant une trainée F_t et se déplaçant à une vitesse de module v_b dans de l'eau de densité ρ_e .

- – 20. En supposant que la bulle est lâchée sans vitesse initiale au fond du spa, exprimer sa vitesse sous la forme $v_b(t) = v_1 f(t/\tau_b)$ où f est une fonction trigonométrique hyperbolique et dans laquelle on exprimera la vitesse v_1 en fonction de ρ_e , ρ_a , g , R et C_x et la durée τ_b en fonction de v_1 , ρ_a , ρ_e et g .
Comment s'interprètent v_1 et τ_b ?
Numériquement on trouve $v_1 = 21 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau_b = 25 \mu\text{s}$, commenter l'adéquation du modèle avec ces valeurs.

On se place dans la situation dans laquelle une bulle d'air ne subit plus aucune accélération. Le référentiel lié à cette bulle est donc galiléen.

Dans un modèle simple on ne considère pas les variations dues à la pression hydrostatique et on cherche à montrer que la pression et le volume de la bulle ne sont constants qu'en moyenne, et que c'est leur variation sur une échelle de temps courte qui permet de transférer de l'énergie à l'eau qui l'entoure.

On ne considère pas non plus les interactions entre les bulles : on étudie une seule bulle fixe, de rayon $R(t)$ variable, entourée d'eau jusqu'à l'infini (la taille du spa est très grande devant celle d'une bulle). On néglige également les effets dus à la viscosité de l'eau ainsi que ceux dus à la diffusion thermique par rapport aux termes de pression interne. On suppose que le rayon de la bulle varie peu : on note $R(t) = R_0 + \varepsilon(t)$ avec $|\varepsilon(t)| \ll R_0$, R_0 étant le rayon de la bulle si $P_a = P_0$ où $P_0 = 1 \text{ bar}$ est la pression atmosphérique et P_a celle à l'intérieur de la bulle.

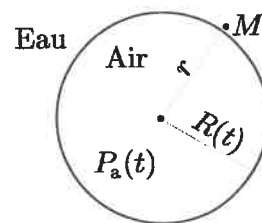


FIGURE 4 – Modèle pour la bulle

- – 21. En supposant l'écoulement de l'eau autour de la bulle incompressible, déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(r,t)$ d'un point quelconque M situé dans l'eau, à une distance r du centre de la bulle et au voisinage de sa surface, en fonction notamment de $\frac{dR(t)}{dt}$.

La conservation de l'impulsion autour de la bulle permet d'établir la relation

$$\rho_e \left(\frac{\partial v(r,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2(r,t)}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P(r,t)}{\partial r}$$

- – 22. En déduire qu'à l'ordre le plus bas en ϵ on peut écrire

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial r} = - \frac{\beta}{r^2} \frac{d^2 \epsilon(t)}{dt^2}.$$

On exprimera β en fonction de ρ_e et R_0 .

À partir de cette relation, obtenir une expression de la pression $P_a(t)$ à l'intérieur de la bulle en supposant que la pression dans l'eau loin de la bulle est égale à P_0 .

- – 23. En considérant que la bulle évolue de façon isentropique, obtenir une autre relation entre $P_a(t)$ et $\epsilon(t)$.
- – 24. Montrer alors que le rayon de la bulle oscille et calculer la fréquence correspondante. On prendra $R_0 = 1 \text{ mm}$.
En estimant le temps caractéristique de diffusion thermique dans la bulle, montrer que l'hypothèse d'évolution isentropique est cohérente.
- – 25. Estimer l'énergie cinétique moyenne associée à ces oscillations.
Conclure sur le brassage de l'eau provoqué par les bulles du spa.

À toutes fins utiles...

Données physiques

- Masse de l'électron : $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge de l'électron : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6,0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Pour l'eau considérée dans le sujet on prendra

- Masse volumique : $\rho_e = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Capacité thermique massique : $c_e = 4,2 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Viscosité dynamique (supposée indépendante de la température) : $\eta_e = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Pour l'air considéré dans le sujet on prendra

- Conductivité thermique : $\lambda_a = 2,5 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Coefficient d'échange conducto-convectif : $h_a = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- Masse volumique : $\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Coefficient adiabatique : $\gamma_a = 1,4$
- Capacité thermique massique à volume constant : $c_a = 7,1 \times 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Pour l'herbe considéré dans le sujet on prendra :

— Conductivité thermique : $\lambda_h = 3,5 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Formulaire

— Pour les fractions de cercles on prendra $\frac{\pi}{3} = 1,0$; $\frac{\pi}{4} = 0,8$ et $\frac{\pi}{5} = 0,6$.

— On rappelle que

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \arg \tanh(x) + \text{cste}$$

— La divergence d'un vecteur $\vec{A}$ dont les coordonnées sont (A_r, A_θ, A_ϕ) dans la base $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$ des coordonnées sphériques s'écrit :

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

FIN DE L'ÉPREUVE