

**Devoirs surveillé n° 6**  
**8h00 – 12h00 4 heures**

**Calculatrice autorisée**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose de 4 problèmes indépendants**  
**Un document réponse de 3 pages est à rendre avec la copie**

**1<sup>er</sup> problème : Détermination de la composition du bronze**

Le bronze est un alliage de cuivre Cu et d'étain Sn. On propose un protocole expérimental permettant de déterminer le pourcentage massique d'étain. On plonge un échantillon de bronze de masse  $m = 4,00$  dans une solution aqueuse d'acide chlorhydrique ( $\text{H}^+_{(\text{aq})} + \text{Cl}^-_{(\text{aq})}$ ), de volume  $V = 0,5 \text{ L}$  et de concentration molaire  $c = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$ . Un gaz se dégage ; son volume est mesuré grâce à un tube à dégagement introduit dans une éprouvette graduée remplie d'eau.

On donne dans le document réponse, à rendre avec la copie, le diagramme E-pH de l'étain, tracé à  $25^\circ\text{C}$  pour une concentration totale en espèces dissoutes  $c_T = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ . Il fait intervenir les espèces  $\text{SnO}_{2(\text{s})}$ ,  $\text{Sn}_{(\text{s})}$ ,  $\text{Sn}^{2+}_{(\text{aq})}$ ,  $\text{Sn}^{4+}_{(\text{aq})}$ ,  $\text{SnO}_3^{2-}_{(\text{aq})}$  et  $\text{HSnO}_2^-_{(\text{aq})}$ .

**Q1.** Calculer le nombre d'oxydation de l'élément Sn dans les différentes espèces, puis attribuer à chacune d'elles son domaine d'existence ou de prédominance indiqué en chiffre romain en les notant sur le diagramme E-pH du document réponse.

**Q2.** En utilisant le diagramme et la valeur de  $c_T$ , estimer la valeur du potentiel standard du couple  $\text{Sn}^{2+}_{(\text{aq})}/\text{Sn}_{(\text{s})}$ . Comparer à la valeur donnée en fin de ce problème.

On superpose au diagramme E-pH de l'étain celui de l'eau en trait pointillés (voir document réponse) tracé à  $25^\circ\text{C}$  pour une pression totale en espèces gazeuses de  $P_T = 1 \text{ bar}$ .

**Q3.** Que peut-on dire des domaines de stabilité de  $\text{Sn}_{(s)}$  et  $\text{H}_2\text{O}_{(l)}$  ? En déduire l'équation de la réaction qui va se produire si on introduit un morceau d'étain  $\text{Sn}_{(s)}$  dans une solution aqueuse très acide et identifier le gaz qui s'en échappe.

Par un raisonnement équivalent, on admet que l'introduction d'un morceau de cuivre  $\text{Cu}_{(s)}$  dans une solution aqueuse très acide ne provoque aucune réaction chimique : le cuivre solide est stable dans l'eau en milieu acide.

**Q4.** En appliquant le protocole proposé, on mesure en fin d'expérience un volume de gaz dégagé  $V_f = 200 \text{ mL}$ . En détaillant votre raisonnement, déterminer la masse d'étain  $m_{\text{Sn}}$  dans l'échantillon de bronze étudié, puis son pourcentage massique  $w_{\text{Sn}}$ .

**Données :**

Volume molaire d'un gaz à  $25^\circ\text{C}$  et sous 1 bar  $V_m = 24,0 \text{ L}$

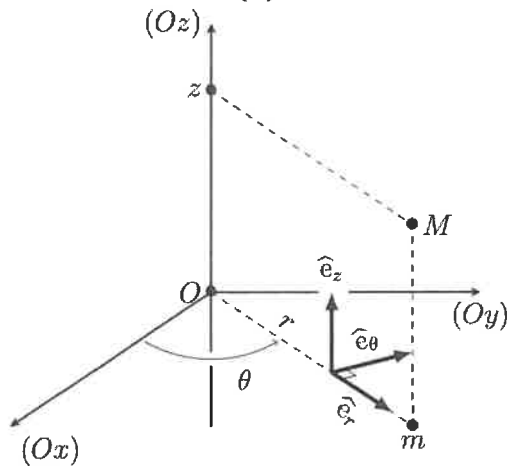
Masse molaire de l'étain :  $M_{\text{Sn}} = 120 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$

Potentiels standard :

|                      | $\text{Sn}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Sn}_{(s)}$ | $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(l)}$ | $\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})}$ |
|----------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $E^\circ (\text{V})$ | -0,137                                         | 1,23                                              | 0                                                 |

## 2<sup>e</sup> problème : La circulation capillaire

Le système de coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires)  $(r, \theta, z)$  du point  $M$  est rappelé sur la figure 1 ;  $m$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$ . On rappelle aussi, dans ce système de coordonnées, les expressions de plusieurs opérateurs de l'analyse vectorielle. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ( $\vec{a}$ ) sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau ( $\hat{e}_x$ ).



$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots + \left[ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z$$

Figure 1 - Coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ .

En 1844, le physicien et médecin français Poiseuille débute son mémoire nommé « le Mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres » par la phrase suivante : Les physiologistes et les pathologistes se sont beaucoup occupés à rechercher les causes pour lesquelles tel viscère recevait plus de sang que tel autre.

Il poursuit en indiquant que les causes essentielles en sont l'étendue et le diamètre des petits vaisseaux qui composent le système capillaire et la pression du sang, déterminée par l'action du cœur. Dans ce qui suit, le sang sera décrit comme un fluide en écoulement incompressible de masse volumique  $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et de viscosité dynamique  $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ . Il s'écoule en régime stationnaire le long des vaisseaux capillaires, tubes cylindriques de rayon  $R$  variant de 3 à  $15 \mu\text{m}$  de diamètre. On s'intéressera ici à un capillaire typique, de rayon  $R = 10 \mu\text{m}$ .

**Q5.** Rappeler l'expression et la signification physique du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  d'un écoulement.

La physiologie humaine adulte est caractérisée par un volume sanguin total de l'ordre de 5 à 6 litres, une longueur totale du système capillaire de l'ordre de 100000 km. Le volume systolique (la quantité de sang éjectée par chaque contraction du cœur) est d'environ 100 mL; la fréquence cardiaque de repos d'un adulte sera prise à 60 battements par minute. Enfin, la section cumulative (somme de toutes les sections) de tous les capillaires est d'environ  $\sigma = 0,5 \text{ m}^2$ .

**Q6.** Estimer la longueur moyenne d'un vaisseau capillaire typique.

**Q7.** Estimer le débit massique moyen  $D_m$  du sang dans un capillaire typique, puis le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_e$  associé. Conclure.

Un capillaire typique est un tube cylindrique rigide, d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R = 10\mu\text{m}$  et de longueur  $\ell = 5 \text{ cm}$ , parcouru par le fluide en écoulement incompressible et visqueux qui modélise le sang. On admet que la vitesse du sang ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe et de la distance  $z$  parcourue depuis l'entrée dans le capillaire ; on l'écrit  $\vec{v} = v(r, z)\hat{e}_z$ . On néglige les effets de la pesanteur et la pression du sang dans le tube capillaire ne dépend que de  $z$ .

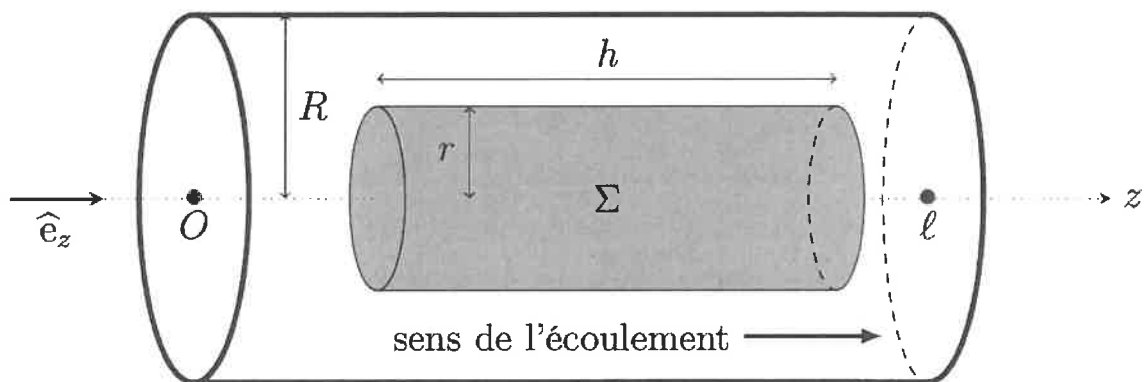


Figure 2 - Capillaire et élément de fluide étudié.

On étudie (cf. figure 2) l'écoulement du fluide situé à une distance au plus égale à  $r$  de l'axe du capillaire, sur une longueur arbitraire  $h = dz < \ell$ .

**Q8.** Montrer que le caractère incompressible de l'écoulement assure que cet élément de fluide n'est pas accéléré.

**Q9.** En déduire l'existence d'un gradient de pression  $\frac{dP}{dz}$  constant dont on précisera l'expression en fonction, notamment, du terme de viscosité  $\eta \frac{\partial v}{\partial r}$ .

**Q10.** Exprimer complètement  $v(r, z)$  en fonction de  $R, \eta$  et  $\frac{dP}{dz}$ .

**Q11.** En déduire la résistance linéique d'écoulement  $R_u$ , définie par la relation  $\left| \frac{dP}{dz} \right| = R_u D_m$ .

**Q12.** Calculer numériquement l'écart de pression  $\Delta P$  de part et d'autre du capillaire en précisant en quel point la pression est la plus élevée.

**Q13.** Exprimer la puissance des forces de pression exercées sur le fluide traversant le capillaire en fonction de  $\Delta P$ ,  $D_m$  et  $\rho$  puis en fonction de  $R_u$ ,  $\rho$ ,  $D_m$  et  $\ell$ .

**Q14.** Que peut-on en déduire concernant la puissance totale moyenne du cœur humain ? On attend ici une réponse numérique.

### 3<sup>e</sup> problème : Rénovation énergétique des bâtiments

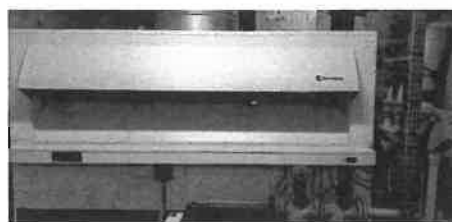
Les données numériques utiles pour résoudre ce problème se trouvent en page 3 du document réponse.

On s'intéresse aux économies d'énergie et à la réduction des émissions de gaz à effet de serre (dioxyde de carbone essentiellement) qu'on peut réaliser sur Terre en améliorant la thermique des bâtiments : isolation, entretien, mode de chauffage. On prend l'exemple d'une copropriété dont voici une description succincte :

- la résidence est constituée de 10 bâtiments équivalents (3 bâtiments doubles + 4 bâtiments simples, figure 9) ;
- les murs et les toitures des bâtiments ne disposent d'aucun revêtement isolant spécifique ;
- le chauffage est assuré par une chaudière centrale à gaz de puissance nominale égale à 998 kW située au sous-sol du bâtiment 3 (figure 10) ;
- chaque logement est équipé de 6 radiateurs en fonte (figure 10) alimentés par l'eau chaude sortant de la chaudière centrale via un réseau de tuyaux.



Figure 9 Plan de la résidence



(a) Chaudière



(b) Radiateur

**Figure 10** Le chauffage est assuré par une chaudière centrale à gaz. L'énergie thermique est transférée aux logements par de l'eau chauffée à environ 70 °C circulant dans des radiateurs en fonte

Cette partie s'intéresse à quelques actions à court et à moyen terme qui peuvent être envisagées dans cette copropriété dans le but de réduire sa consommation énergétique et ses émissions de gaz à effet de serre.

## III.A – L'existant

### III.A.1) Puissance de chauffage nécessaire à la résidence

La puissance de chauffage nécessaire à un bâtiment est évaluée en estimant les déperditions thermiques de ce bâtiment (tableau 1) et en supposant une température extérieure  $T_{e,\text{ref}} = -7^\circ\text{C}$ . Le confort thermique des habitants est assuré si la température intérieure des logements vaut  $T_{i,\text{ref}} = 19^\circ\text{C}$ .

| Type                          | $U$ ( $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$ ) | Surface $S$ ( $\text{m}^2$ ) | $\psi$ ( $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ ) | Longueur $L$ (m) |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------|
| Murs extérieurs               | 3,16                                                   | 5650                         | —                                                         | —                |
| Toiture                       | 0,67                                                   | 3514                         | —                                                         | —                |
| Ouvrants (fenêtres et portes) | 2,32                                                   | 2496                         | —                                                         | —                |
| Plancher                      | 1,17                                                   | 3514                         | —                                                         | —                |
| Ponts thermiques              | —                                                      | —                            | 0,47                                                      | 8249             |

**Tableau 1** Sources de déperdition thermique de la résidence — Le coefficient de déperdition thermique  $U$  est égal à la puissance thermique perdue par unité de surface et par unité d'écart de température entre un intérieur chauffé à  $19^\circ\text{C}$  et l'extérieur ; pour les ponts thermiques, le coefficient de déperdition thermique est noté  $\psi$  et s'exprime par unité de longueur

**Q 45.** En régime stationnaire, calculer la puissance thermique  $P_c$  nécessaire au chauffage de la résidence.

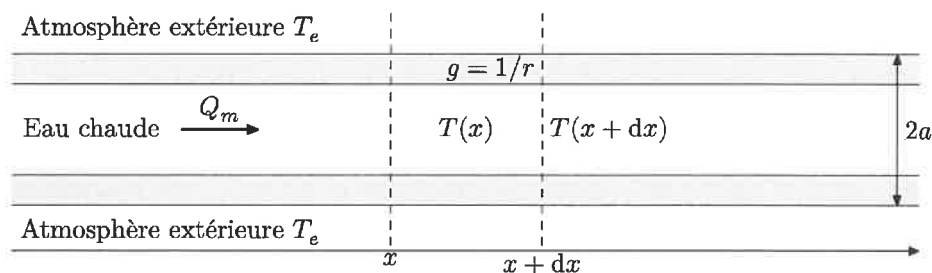
### III.A.2) Chauffage au gaz naturel

La chaudière fonctionne au gaz naturel qui est composé en très large majorité de méthane  $\text{CH}_4$ .

**Q 46.** En 2021, le chauffage de la résidence a nécessité 1900 MW·h. Estimer la masse  $m_{\text{CO}_2}$  de dioxyde de carbone rejetée dans l'atmosphère.

## III.B – Action à court terme : équilibrage du réseau de chauffage

Des gains énergétiques peuvent être réalisés immédiatement en équilibrant le réseau de chauffage, c'est-à-dire en faisant en sorte que la température dans les appartements soit la même (environ  $19^\circ\text{C}$ ) quels que soient leurs positionnements sur le réseau de chauffage. On modélise ce réseau par un unique échangeur thermique cylindrique de longueur totale  $L$ , de rayon  $a$  constant, de conductance thermique linéique  $g = 1/r$  (figure 11). L'eau chaude de chauffage y circule avec un débit de masse  $Q_m$ .



**Figure 11** Modélisation du réseau de chauffage

**Q 47.** En régime stationnaire, montrer que, en négligeant la diffusion thermique interne à l'eau, le champ de température  $T(x)$  dans l'eau vérifie :

$$\frac{dT}{dx} + \frac{T}{\xi} = \frac{T_e}{\xi} \quad (\text{II.1})$$

avec  $\xi = Q_m c r$  où  $c$  est la capacité thermique massique de l'eau liquide.

**Q 48.** En déduire l'expression de  $T(x)$  en fonction de  $x$ . On notera  $T_0$  la température en  $x = 0$ .

Plus précisément, les canalisations du réseau de chauffage sont en contact avec l'air des appartements, à température  $T_i(x)$ , eux-mêmes séparés de l'atmosphère extérieure (température  $T_e$ ) par des parois de conductance thermique linéique moyenne  $g_2 = 1/r_2$  (figure 12).

**Q 49.** En négligeant les échanges thermiques entre les logements, déterminer l'expression du champ de température  $T_i(x)$  en fonction de  $T(x)$ ,  $T_e$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

Pour la suite, on prend les valeurs numériques suivantes :

- $r_1 = 1,05 \text{ K}\cdot\text{W}^{-1}\cdot\text{m}$ ,
- $r_2 = 0,32 \text{ K}\cdot\text{W}^{-1}\cdot\text{m}$ ,
- $Q_m = 1,0 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ,
- $T_e = 7^\circ\text{C}$ ,
- $L = 2,0 \text{ km}$ .

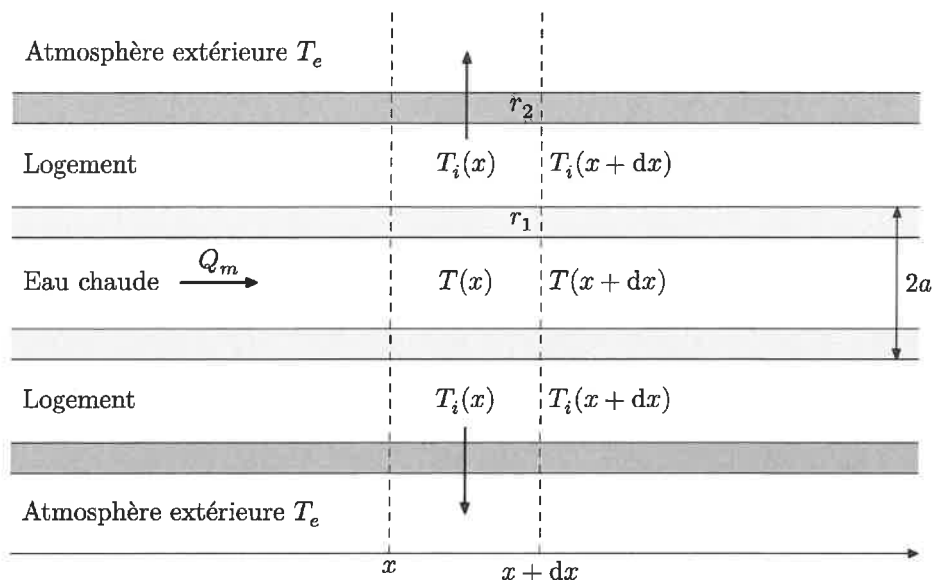


Figure 12 Détail de la modélisation du réseau de chauffage

Dans ce modèle quelle expression prend on pour  $r$ ? (Q19)

Q 20. À quelle température  $T_0$  doit-on chauffer l'eau en entrée du réseau de chauffage pour que la température de chaque logement soit au moins égale à  $T_{\min} = 19^\circ\text{C}$ ?

Q 21. Quel surcoût énergétique relatif ce modèle prédit-il par rapport à un mode de chauffage qui conduirait à une situation parfaitement équilibrée où tous les appartements sont à la température  $T_{\min}$ ?

On propose un schéma de principe d'équilibrage du réseau. Au lieu d'utiliser un circuit hydraulique à une seule maille, on opère une dérivation d'une partie de l'eau sortant de la chaudière par une canalisation calorifugée pour la réinjecter plus loin dans le circuit (figure 13). Une vanne d'équilibrage permet d'ajuster le débit  $Q_{m,2}$  d'eau chaude prélevée au circuit principal.

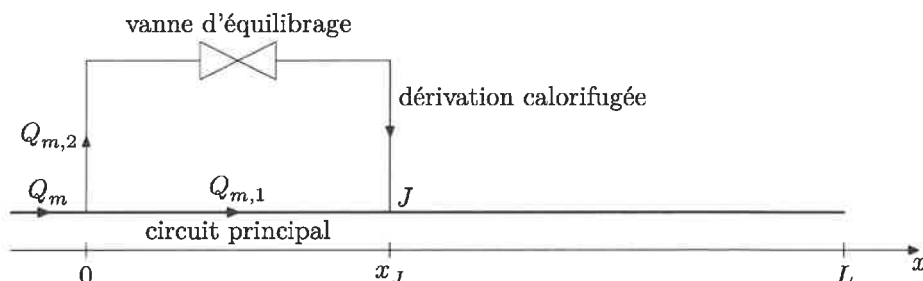


Figure 13 Principe d'équilibrage d'un réseau de chauffage

Q 22. Exprimer la température de l'eau juste après le point de jonction  $J$  en fonction de  $Q_m$ ,  $Q_{m,2}$ ,  $x_J$  notamment.

La température des logements en fonction de leur position dans le circuit de chauffage est représentée figure 14 pour différents débits de masse  $Q_{m,2}$  avec  $Q_m$  fixé à  $1\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $x_J = L/2$ .

Q 23. Parmi les valeurs de  $Q_{m,2}$  testées, laquelle semble la plus intéressante? Justifier brièvement.

Q 24. Estimer l'économie relative d'énergie réalisée par rapport au réseau non équilibré.

### III.C – Actions à moyen terme

#### III.C.1) Isolation thermique par l'extérieur

L'isolation par l'extérieur consiste à recouvrir les murs des bâtiments d'une couche d'isolant thermique. Un des isolants les plus utilisés est la laine de roche dont les caractéristiques sont données dans le tableau 2.

Q 25. Exprimer l'épaisseur d'isolant à appliquer sur les murs pour réduire d'une fraction  $\mu$  les déperditions énergétiques de l'ensemble de la résidence, toutes choses égales par ailleurs. En déduire le nombre de couches de plaques de laine de roche qu'il faut appliquer sur les murs de la résidence pour réduire ses déperditions énergétiques de  $\mu = 45\%$ . Est-il intéressant d'ajouter une couche supplémentaire de laine de roche à l'isolation précédente?

#### III.C.2) Remplacement de la chaudière par une pompe à chaleur

Cette section étudie l'opportunité de remplacer la chaudière à gaz par une pompe à chaleur. Le principe d'une pompe à chaleur est rappelé sur la figure 15 et les caractéristiques de la pompe à chaleur dont l'installation est envisagée sont données dans la figure D du document réponse.

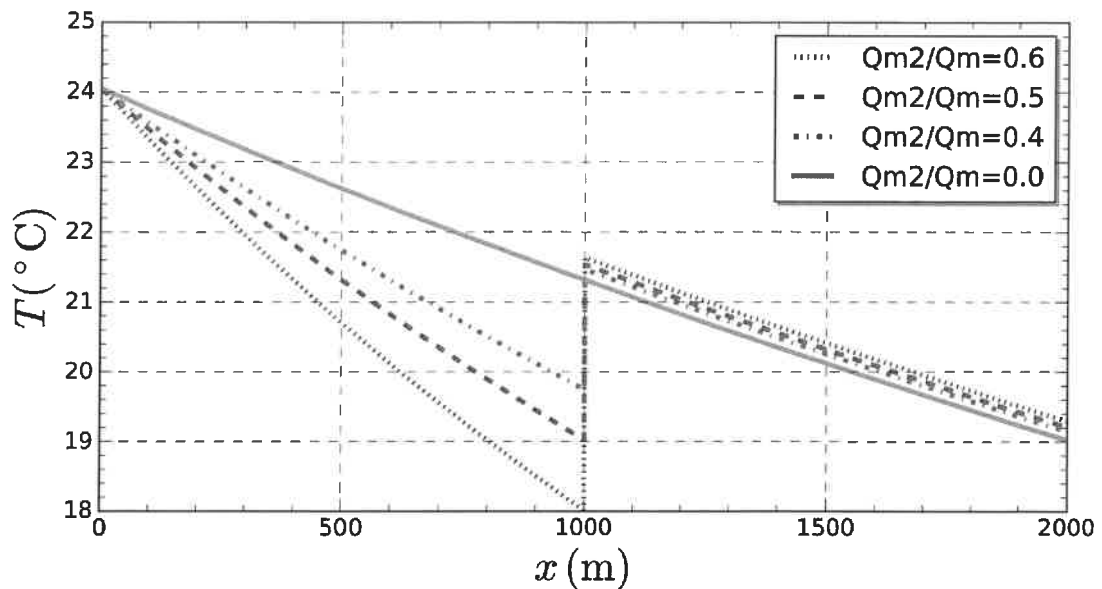


Figure 14 Champ de température au sein des logements

|                        |                                                           |
|------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Épaisseur              | 12 cm                                                     |
| Conductivité thermique | $0,037 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Prix unitaire          | $250 \text{ €} \cdot \text{m}^{-2}$                       |

Tableau 2 Caractéristiques d'un panneau de laine de roche

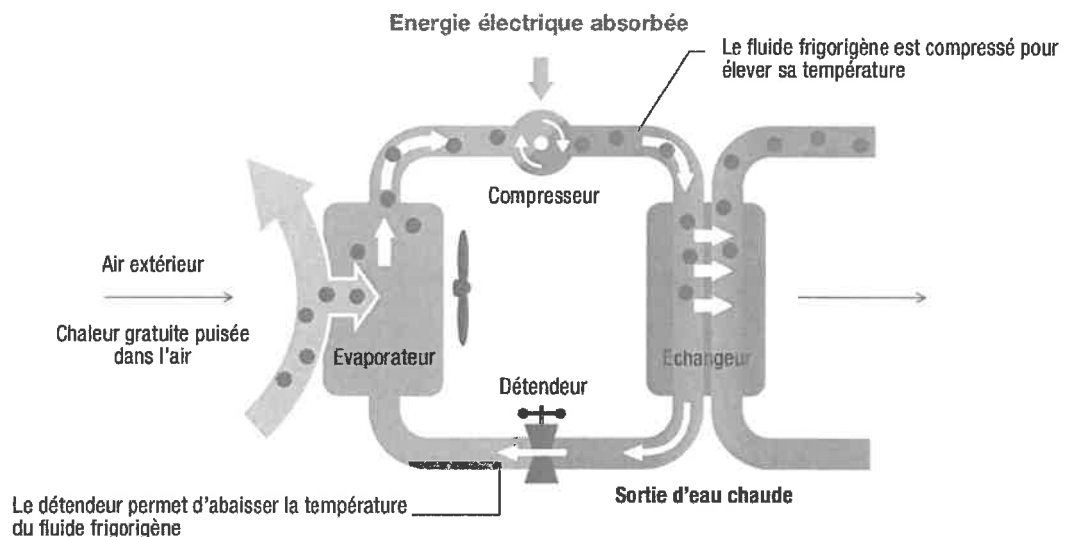


Figure 15 Schéma de principe d'une pompe à chaleur

**Q 26.** Évaluer le coefficient de performance  $\text{COP}_{\text{rev}}$  de la pompe à chaleur en supposant qu'elle fonctionne de façon réversible, au sens de la thermodynamique, pour les conditions de température représentatives de la copropriété étudiée (source chaude à  $70^\circ\text{C}$ , source froide à  $7^\circ\text{C}$ ). Comparer la valeur obtenue aux valeurs du COP fournies dans la documentation de la pompe à chaleur considérée.

Le R407C, fluide frigorigène utilisé par la pompe à chaleur, est un mélange des fluides frigorigènes R32, R125 et R134a, miscibles en toutes proportions. Il décrit le cycle thermodynamique suivant

- 1-2 : compression isentropique de vapeur surchauffée à  $10^\circ\text{C}$  sous une pression de 6 bar jusqu'à une température de  $90^\circ\text{C}$  ;
- 2-3 : refroidissement isobare et liquéfaction isobare totale au contact de la source chaude ;
- 3-4 : détente isenthalpique jusqu'à atteindre la pression 6 bar ;
- 4-1 : vaporisation isobare et surchauffage isobare au contact de la source froide.

**Q 27.** Tracer le cycle thermodynamique sur le diagramme  $(p, h)$  du fluide R407C (figure C du document réponse).

**Q 28.** Évaluer le COP. Comparer à la documentation technique et expliquer d'éventuelles différences.

- Q 29.** Évaluer le débit de masse  $D_m$  du fluide frigorigène lorsque la pompe à chaleur fonctionne en mode « priorité puissance ». Commenter.
- Q 30.** Toujours en mode priorité puissance, combien de pompes à chaleur faut-il associer pour satisfaire le besoin en chauffage de la résidence dans son état actuel ?
- Q 31.** L'utilisation de radiateurs en fonte nécessite une injection d'eau à environ 70 °C. Est-il intéressant, du point de vue financier et du point de vue de l'émission de gaz à effet de serre, de remplacer la chaudière de la copropriété par un ensemble de pompes à chaleur produisant de l'eau à cette température ? On prendra 200 €/MWh pour le coût de l'électricité et 90 €/MWh pour le coût du gaz. Discuter.

#### 4<sup>e</sup> problème : Redéfinition du kelvin

Les données et le formulaire nécessaire à la résolution se trouvent en fin de ce problème

La révision du système international d'unités (SI) a été adoptée par la Convention Générale des Poids et Mesures (CGPM) en novembre 2018 et les nouvelles définitions ont pris effet à compter du 20 mai 2019, date anniversaire de la signature de la Convention du Mètre.

Le SI est un système d'unités cohérent qui est utilisé dans tous les aspects de la vie, que ce soit le commerce international, la production industrielle, la santé, la sécurité, la protection de l'environnement ou les sciences fondamentales. Il doit être pérenne, uniforme et accessible. Cet idéal d'universalité porté par le SI se retrouve dans sa devise « À tous les temps, à tous les peuples ».

Les nouvelles définitions des unités du SI sont établies à partir d'un ensemble de sept constantes de la physique.

##### *A – Rapide historique*

**Q 32.** Rappeler la définition du degré Celsius et du kelvin en vigueur jusqu'en 2018. À combien de kelvins correspond 0 °C ?

**Q 33.** Avant la réforme de 2018, la référence de température était un artéfact, une cellule au point triple de l'eau (figure 3). Quelles pouvaient être les sources d'incertitude dans cette expérience ?



**Figure 3** Cellule point triple de l'eau

## B – Méthode de la thermométrie acoustique à gaz

La méthode de la thermométrie acoustique à gaz est celle qui a donné les résultats les plus précis pour la mesure de la constante de Boltzmann avant 2018.

On rappelle le lien entre la constante des gaz parfaits  $R$  et la constante de Boltzmann  $k_B$ .  $R = k_B \cdot N_A$ .

Nous allons étudier la propagation des ondes sonores dans un gaz. Dans un premier temps on se limite au cas d'une propagation unidimensionnelle suivant l'axe  $(Ox)$ . L'écoulement est supposé parfait et l'influence de la pesanteur est négligée. Au repos, les champs de masse volumique  $\mu_0$  et de pression  $p_0$  sont uniformes et le champ des vitesses est nul. On note  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $v_1$  les écarts à ces valeurs de repos. On appelle  $\chi_S$  le coefficient de compressibilité isentropique. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

Q 34. Rappeler la signification de cette approximation.

Q 35. Donner l'équation d'Euler et la linéariser.

Q 36. Rappeler l'équation de conservation de la masse et la linéariser.

Q 37. À partir de la définition de  $\chi_S$ , obtenir une relation entre  $\mu_1$  et  $p_1$ .

Q 38. Établir l'équation de propagation pour la surpression  $p_1$ . Comment s'exprime la célérité  $c_s$  des ondes sonores ?

Q 39. En supposant que le gaz est parfait et que le coefficient adiabatique  $\gamma$  est constant, établir la nouvelle expression de la célérité  $c_s$  en fonction de  $T$ . Faire l'application numérique pour de l'air à  $T = 300$  K.

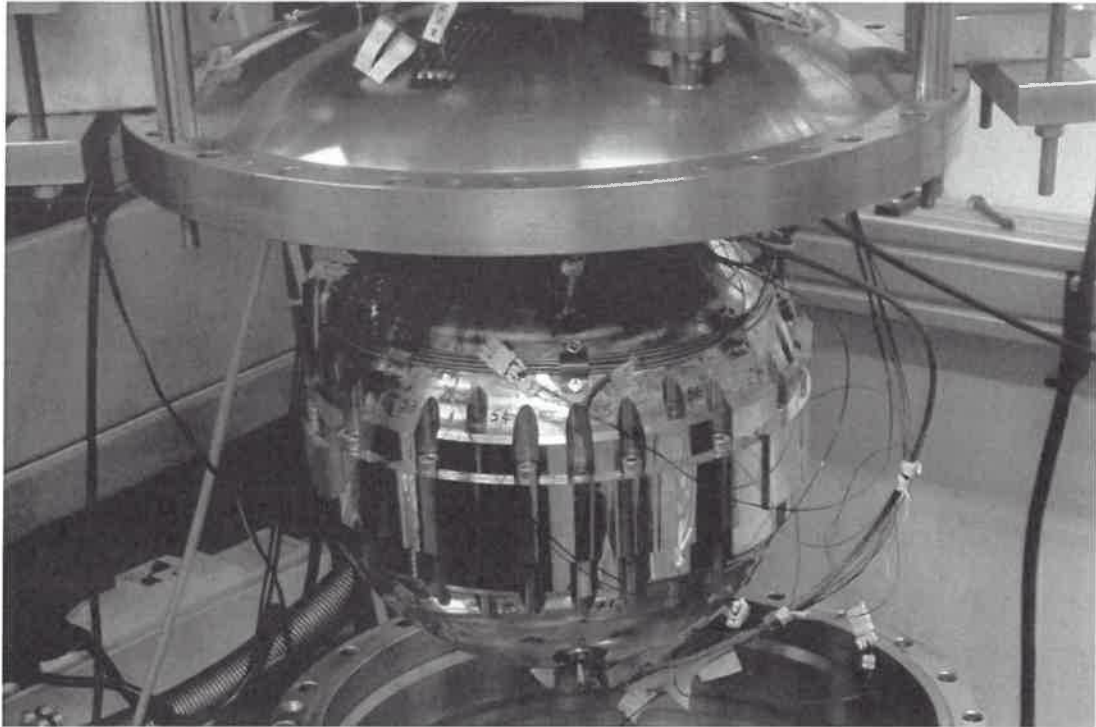
Pour mesurer  $c_s$ , on peut utiliser les modes propres d'une sphère creuse et une mesure précise du rayon  $r_s$  de cette sphère. C'est le dispositif mis en œuvre au LNE (figure 4).

Q 40. Au LNE, le gaz utilisé est un gaz rare tel que l'hélium ou l'argon. Calculer la valeur numérique de  $c_s$  pour l'hélium à la température du point triple de l'eau.

Q 41. Comment peut-on déduire de la mesure de  $c_s$  et de la relation établie à la question 29, une valeur pour la constante de Boltzmann ?

Q 42. On cherche à résoudre l'équation de propagation pour la surpression  $p_1$  dans le cas de la sphère. Que devient cette équation dans le cas général ?

Q 43. Montrer que, en l'absence de dépendance angulaire, les fonctions solutions  $r p_1(r, t)$  peuvent se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de deux termes. Donner la signification physique de chacun des termes.



**Figure 4** Résonateur quasi sphérique utilisé par l'équipe du LNE-CNAM (Laboratoire National de métrologie et d'Essais - Conservatoire National des Arts et Métiers) pour mesurer la constante de Boltzmann par thermométrie acoustique. Le résonateur, de volume intérieur  $D \approx 3,1$  L, est rempli de gaz rare (hélium ou argon) et placé dans un cryostat pour maintenir sa température constante.

**Q 44.** Pourquoi peut-on se limiter à l'étude des solutions de la forme, en notation complexe,

$$p_1(r, t) = \frac{A}{r} \exp(i(\omega t - kr)) + \frac{B}{r} \exp(i(\omega t + kr)),$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  et  $k$  sont des constantes ?

**Q 45.** En déduire le champ des vitesses correspondant, en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$ ,  $k$  et  $r$ .

**Q 46.** Vers quoi tend le débit volumique à travers une sphère de rayon  $r$  quand  $r$  tend vers 0 ? Que peut-on en déduire ?

**Q 47.** Montrer que l'équation vérifiée par les modes propres est  $\tan(kr_s) = krs$ . Proposer une résolution graphique.

**Q 48.** Montrer qu'il y a une fréquence de résonance  $f_n$  par intervalle  $\left[2n \frac{c_s}{4r_s}, (2n+1) \frac{c_s}{4r_s}\right]$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r_s$  le rayon de la sphère. Pour  $n \gg 1$ , exprimer de façon approchée  $f_n$ .

**Q 49.** Calculer approximativement la fréquence du mode fondamental pour la sphère du LNE.

#### *C – Mise en pratique de la nouvelle définition du kelvin*

**Q 50.** Citer quelques sources d'incertitude de la méthode utilisée au LNE.

**Q 51.** En fait, il y a cinq sources principales d'incertitude et leurs valeurs relatives respectives sont pratiquement toutes égales. Expliquer pourquoi la thermométrie acoustique des gaz a atteint une limite qu'il sera très difficile de dépasser.

Cette mesure a permis de connaître la constante de Boltzmann avec une précision relative de l'ordre de  $4,8 \times 10^{-7}$  dans l'ancien SI.

**Q 52.** À partir de l'unité de  $k_B$ , expliquer pourquoi fixer définitivement la valeur de la constante de Boltzmann, permet de redéfinir le kelvin.

**Q 53.** Les valeurs de  $h$ ,  $e$ ,  $k_B$  et  $N_A$  étant fixées, rassembler dans un tableau les grandeurs qui sont à présent mesurables, alors qu'elles étaient fixées par convention avant la réforme du SI de 2018.

# Données et formulaire

## Valeurs numériques

Charge électrique élémentaire

$$e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Constante de Planck

$$h \approx 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

Constante de Boltzmann

$$k_B \approx 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$$

Constante d'Avogadro

$$N_A \approx 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Célérité de la lumière dans le vide

$$c \approx 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} \approx 9,19 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Masse de l'électron

$$m_e \approx 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Accélération de la pesanteur à Paris

$$g \approx 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Température du point triple de l'eau

$$T \approx 273,16 \text{ K}$$

Masse molaire de l'hélium

$$M_{\text{He}} \approx 4,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire de l'azote

$$M_{\text{N}} \approx 14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire de l'oxygène

$$M_{\text{O}} \approx 16 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire de l'air

$$M_{\text{air}} \approx 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

## Formulaire

$$\gamma_{\text{air}} = 1,4 \quad \gamma_{\text{He}} = 1,7$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

En coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{a}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{a}(r, \theta, z) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques

$$\Delta f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

## Définition de la seconde

On pose  $\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}$ , ce qui permet de définir la seconde qui correspond donc à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé.

• • • FIN • • •