

**Devoir surveillé n°7**  
**8h00 – 11h00 3 heures**

**Calculatrice NON autorisée**

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

**Le devoir se compose d'une partie physique et d'une partie chimie, dont les sous parties sont indépendantes entre elles**

**Partie physique**

**Quelques aspects de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière.**

Les notations et valeurs numériques des grandeurs utilisées dans ce problème sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	$c$	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

On note  $j$  le nombre complexe de partie imaginaire positive vérifiant  $j^2 = -1$ . En régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , on convient d'associer à toute grandeur sinusoïdale  $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi_a)$  deux grandeurs complexes :

- la première, notée  $\underline{A} = Ae^{j\varphi_a}$ , appelée amplitude complexe associée à  $a$  ;
- la seconde, notée  $\underline{a}(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi_a)} = \underline{A}e^{j\omega t}$ , appelée grandeur sinusoïdale complexe associée à  $a$ .

Dans le cas où la grandeur sinusoïdale est un champ  $a(M, t) = A \cos[\omega t + f(M) + \varphi_a]$ , dépendant de la date  $t$  et de la position  $\overrightarrow{OM}$  d'un point  $M$  via une fonction  $f$  nulle lorsque  $M$  est confondu avec  $O$ , on note  $\underline{a}(M, t) = \underline{A}e^{j[\omega t + f(M)]}$  la grandeur sinusoïdale complexe associée à  $a$ . À l'exception de  $j$ , les grandeurs complexes sont soulignées.

Les différentes parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres. Néanmoins, des notions et notations utiles sont introduites au fil du sujet. Aussi est-il conseillé de lire et de résoudre les parties du problème dans l'ordre de présentation.

# I Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, milieu supposé n'avoir ni charge ni courant. On introduit un repère cartésien orthonormé direct  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Un point M quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ .

**Q1.** Citer les quatre équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  dans ce milieu.

On rappelle que  $\text{rot}(\text{rot } \vec{\sigma}) = \text{grad}(\text{div } \vec{\sigma}) - \Delta \vec{\sigma}$ , où  $\vec{\sigma}$  est un champ vectoriel et  $\Delta$  est l'opérateur laplacien vectoriel.

**Q2.** Obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$ . En déduire la relation entre  $c, \epsilon_0$  et  $\mu_0$ .

On considère une onde électromagnétique solution de l'équation de d'Alembert de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde  $k$  et de pulsation temporelle  $\omega$ . On suppose qu'elle se propage dans la direction et le sens de  $\vec{e}_z$ .

**Q3.** Montrer que les champs électrique et magnétique de l'onde sont transverses à l'aide de la notation complexe. On suppose le champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde polarisé rectilignement selon  $\vec{e}_x$ . On note  $E_0$  son amplitude et  $\varphi$  sa phase à l'origine du temps et de l'espace.

**Q4.** Donner l'expression du champ électrique réel de l'onde en un point M à l'instant de date  $t$ , noté  $\vec{E}(M, t)$ . On fera notamment apparaître  $E_0, \omega$  et  $k$ .

**Q5.** Établir la relation entre  $k$  et  $\omega$ , appelée relation de dispersion.

**Q6.** Obtenir l'expression du champ magnétique réel de l'onde en un point M à l'instant de date  $t$ , noté  $\vec{B}(M, t)$ .

**Q7.** Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde en un point M à l'instant de date  $t$ , noté  $\vec{\Pi}(M, t)$ .

**Q8.** Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point M à l'instant de date  $t$ , notée  $w(M, t)$ , en fonction de  $E_0, \omega, k, \epsilon_0, t$  et de  $z$ .

**Q9.** On note  $T$  la période temporelle de l'onde plane progressive monochromatique. Montrer que les valeurs moyennes temporelles de  $\vec{\Pi}$  et de  $w$  vérifient  $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = c \langle w \rangle_T \vec{e}_z = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z$ .

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. La puissance de l'antenne émettrice du rover est  $P_e = 10 \text{ W}$ .

On suppose que la puissance émise est isotrope. Le gain  $G_e$  de cette antenne est 1 000, tout comme le gain  $G_r$  à la réception. Le rapport entre puissance reçue  $P_r$  et puissance émise  $P_e$  est donné par :

$$\frac{P_r}{P_e} = \frac{S_r}{S} G_e \tag{1}$$

avec  $S = 4\pi d^2$  et  $S_r = \lambda^2 G_r / 4\pi$ ,  $d$  étant la distance Terre-Mars prise égale à 56 millions de km,  $\lambda$  étant la longueur d'onde d'émission de l'antenne émettant à 8,0 GHz.

**Q10.** Justifier que la puissance reçue décroît en  $1/d^2$  dans l'expression (1).

**Q11.** Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance  $P_r$  reçue par l'antenne terrestre. Commenter.

## II Pression de radiation

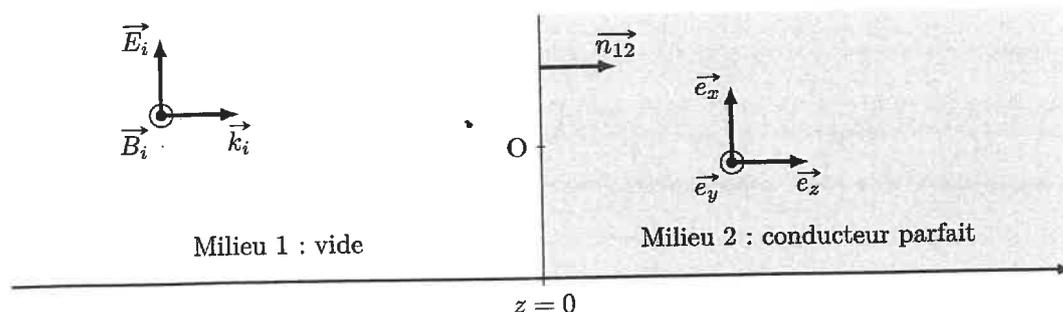


FIGURE 2 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait.

On considère la situation de la figure 2 où le demi-espace  $z < 0$  est le vide et le demi-espace  $z > 0$  est un conducteur parfait. Une onde incidente, identique à celle décrite dans les questions Q4 à Q6, est réfléchi sur la surface du conducteur. On notera respectivement  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{E}_i(M, t)$  et  $\vec{B}_i(M, t)$  le vecteur d'onde, le champ électrique et le champ magnétique de cette onde incidente en un point M à l'instant de date  $t$ . On donne les relations de passage utiles pour le problème. Entre deux milieux 1 et 2, on a :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

où  $\vec{n}_{12}$  est un vecteur unitaire orthogonal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, où les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$  (respectivement  $\vec{E}_2$  et  $\vec{B}_2$ ) sont les champs totaux dans le milieu 1 (respectivement dans le milieu 2) au voisinage de l'interface et où  $\vec{j}_s$  est le vecteur densité de courant de surface. On rappelle que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

**Q12.** Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi  $\vec{E}_r(M, t)$  en un point M à l'instant de date  $t$ . On supposera que l'onde électrique réfléchi conserve la même polarisation que l'onde incidente.

**Q13.** Déterminer l'expression du champ magnétique réfléchi  $\vec{B}_r(M, t)$  en un point M à l'instant de date  $t$ .

**Q14.** Que vaut le champ magnétique total en  $z = 0^-$  (dans le vide au voisinage du conducteur)? En déduire l'expression du vecteur densité de courant de surface  $\vec{j}_s(t)$  sur la surface du conducteur, à la date  $t$ .

On admet que  $\vec{B}(z = 0, t) = \frac{1}{2} [\vec{B}(z = 0^-, t) + \vec{B}(z = 0^+, t)]$ . En outre, en présence de courants surfaciques et d'un champ magnétique, la densité surfacique de la force de Laplace s'écrit  $\vec{f}_s = \vec{j}_s \wedge \vec{B}$ .

**Q15.** Exprimer la force de Laplace totale  $\vec{F}_L$  s'exerçant sur l'aire  $S$  de la surface du conducteur en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $E_0$ ,  $S$ ,  $\omega$  et de  $t$ .

**Q16.** Calculer la valeur moyenne de cette force sur une période temporelle  $T$  de l'onde. En déduire que l'on peut lui associer une pression  $p$ , dite pression de radiation, dont l'expression est  $p = \epsilon_0 E_0^2$ .

On appelle intensité  $I$  du champ électromagnétique la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. On rappelle qu'en vertu de la relation démontrée dans la question Q9, on a  $I = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2}$ .

**Q17.** Calculer numériquement la pression de radiation pour la lumière venant du soleil ( $I_1 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ ) et pour celle d'un laser de haute intensité ( $I_2 = 1 \text{ GW} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

On veut désormais retrouver l'expression de la pression de radiation en décrivant la lumière de manière corpusculaire, en la modélisant par un ensemble de photons se déplaçant dans un faisceau cylindrique d'axe  $\vec{e}_z$  et de section  $S$ . On prendra une longueur d'onde  $\lambda$  de 600 nm et on appelle  $E_\gamma$  l'énergie d'un seul photon.

**Q18.** On note  $n_\gamma^*$  la densité volumique de photons dans le faisceau (on se place dans le cadre d'un modèle simple où cette densité est uniforme). Exprimer  $n_\gamma^*$  en fonction de  $E_\gamma$ ,  $c$  et de  $I$  puis calculer sa valeur numérique dans le cas du laser d'intensité  $I_2$ .

**Q19.** Exprimer la quantité de mouvement  $\vec{p}_\gamma$  d'un photon en fonction de son énergie  $E_\gamma$ .

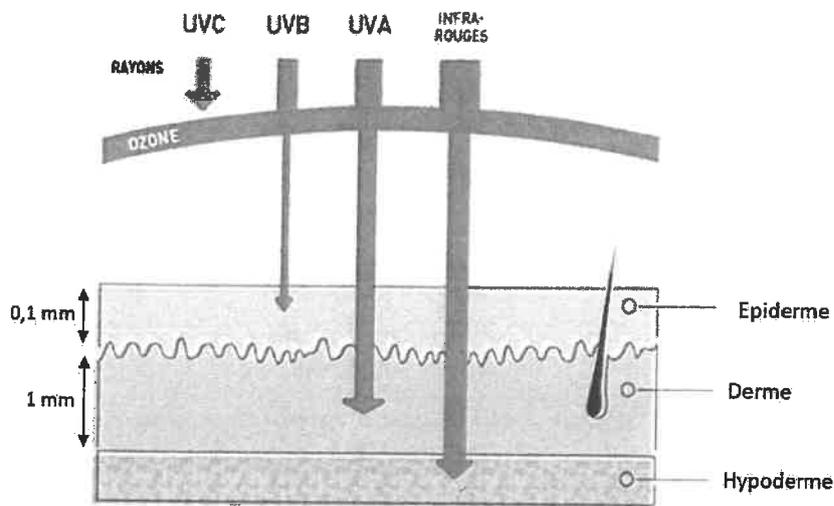
**Q20.** Déterminer l'expression vectorielle de la variation  $\Delta \vec{p}_\gamma$  de la quantité de mouvement d'un photon lors d'un rebond sur la surface métallique en fonction de  $E_\gamma$  et de  $c$ . On fait l'hypothèse d'un rebond élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique.

**Q21.** Exprimer la variation de quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}_{dt}$  de l'ensemble des photons qui rebondissent sur la surface métallique d'aire  $S$  pendant une durée infinitésimale  $dt$  en fonction de  $I$ ,  $S$ ,  $dt$  et de  $c$ .

**Q22.** En déduire la force exercée par les photons sur l'aire  $S$  pendant une durée  $dt$  et retrouver l'expression de la pression de radiation.

### III - La pénétration des rayonnements dans la peau

On dispose en figure 9 d'une illustration de la pénétration différenciée des rayonnements ultraviolets (UVA, UVB et UVC) et infrarouges dans les trois couches constitutives de la peau. Des informations sur ces rayonnements sont données dans le document 1.



**Figure 9** - Illustration de la pénétration du rayonnement solaire dans la peau (<https://www.newpharma.fr/cnt/art/186/rayons-uv-uva-uvb-et-uvc-la-difference.html>)

**\*Les UVA (320 à 400 nm)**

Ils représentent environ 95 % des radiations UV qui atteignent la surface de notre planète. Ils pénètrent le derme en activant la mélanine présente dans notre peau, ce qui la fait bronzer. Mais dans la durée, ils provoquent aussi une altération moléculaire du derme du fait des radicaux libres qu'ils produisent, ce qui les rend responsables du photo-vieillessement et de cancers de la peau.

**\*Les UVB (290 à 320 nm)**

Ils représentent 5 % des rayons UV qui atteignent la surface de la Terre. Ils pénètrent seulement l'épiderme mais sont plus dommageables que les UVA. Ils sont responsables des coups de soleil.

**\*Les UVC (100 à 280 nm)**

Les UVC sont intégralement absorbés par la couche d'ozone et n'atteignent pas la surface de la Terre, où ils rendraient la vie impossible.

**\*Les infrarouges (800 à 2 000 nm)**

Leurs grandes longueurs d'onde leur permettent d'atteindre les couches les plus profondes de la peau, mais ils sont beaucoup moins nocifs que les ultraviolets.

**Document 1 - Informations sur les rayonnements UV et infrarouges**

Afin d'étudier la pénétration cutanée des rayonnements UV, on propose un modèle sommaire dans lequel les propriétés de conduction électrique des différentes couches de la peau sont décrites par un milieu conducteur ohmique unique, de conductivité électrique  $\gamma$  uniforme, réelle et indépendante de la longueur d'onde, de permittivité diélectrique  $\epsilon_0$  et de perméabilité magnétique  $\mu_0$ , égales à celles du vide, dans lequel le courant de déplacement négligeable devant le courant de conduction.

**Q23.** Quelle(s) modification(s) les hypothèses précédentes entraînent-elles dans les équations de Maxwell écrites en Q1 ? En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ  $\vec{E}$ . Quel nom donne-t-on à ce type d'équation ? Justifier que le phénomène décrit n'est pas réversible.

Soit  $\vec{E}(M,t) = E_0 \vec{e}_x \cdot \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})]$  la représentation complexe du champ électrique en un point  $M$  de la peau. Dans cette expression,  $i^2 = -1$ ,  $E_0$  et  $\omega$  sont des constantes réelles strictement positives et  $\vec{k} = k \vec{e}_z$  est le vecteur d'onde complexe, avec  $k$  une constante complexe.

**Q24.** Préciser la direction de propagation et la polarisation de l'onde.

Exprimer  $k^2$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $c$ ,  $\gamma$  et de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ .

En déduire, en justifiant, l'expression de  $k$  qui convient.

Faire apparaître une longueur caractéristique  $\delta$  d'évolution de l'amplitude de  $\vec{E}$ .

Quel nom donne-t-on à  $\delta$  ?

**Q25.** Expliquer si ce modèle semble conforme à la pénétration différenciée des rayonnements illustrée en figure 9.

### Partie chimie

Les applications numériques seront réalisées avec les valeurs approchées suivantes :

- $\ln 10 \approx 2,3$
- $\frac{RT}{F} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$  à 298 K

Potentiels standard d'oxydo-réduction à  $pH = 0$  et à 298 K :

	$Zn_{(aq)}^{2+}/Zn_{(s)}$	$H_{(aq)}^+/H_{2(g)}$	$Fe_{(aq)}^{2+}/Fe_{(s)}$	$O_{2(g)}/H_2O_{(l)}$
$E^\circ / V$	-0,76	0	-0,44	1,23

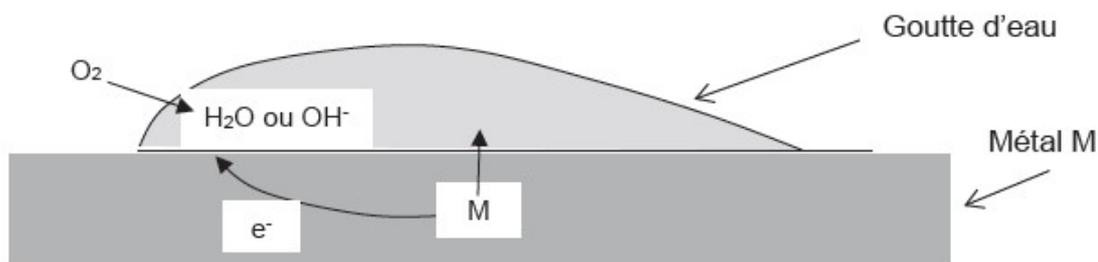
Quelques constantes thermodynamiques d'équilibre en solution aqueuse à 298 K :

Les constantes sont exprimées sous la forme  $pK = -\log_{10} K$ .

- Produit de solubilité de  $Zn(OH)_{2(s)}$  :  $pK_s = 17$
- Produit ionique de l'eau :  $pK_e = 14$
- L'acide sulfurique  $H_2SO_4$  est un diacide dont les deux acidités sont considérées comme fortes, il s'ionise donc deux fois totalement en solution aqueuse.
- Produit de solubilité de  $PbSO_{4(s)}$  :  $K_s = 1,6 \cdot 10^{-8}$

### I - Phénomène de corrosion

Lorsqu'une goutte d'eau stagne à la surface d'un métal, noté M, on observe qu'un phénomène de corrosion se développe principalement au centre de la goutte (**figure 4**).



**Figure 4** - Corrosion d'un métal par une goutte d'eau

Le métal est oxydé au centre en ions  $M^{n+}$ . Les électrons libérés circulent dans le métal. Ils sont récupérés par le dioxygène, plus concentré en périphérie, qui se réduit.

**Q26.** Quels sont les porteurs de charge qui assurent le rebouclage du courant électrique dans la goutte ? Pourquoi le phénomène de corrosion est-il plus prononcé en milieu marin que dans les terres ?

**Q27.** On considère le phénomène d'oxydation par une goutte d'eau d'un ensemble constitué d'une pièce de ferronnerie (assimilable à du fer) reliée électriquement à une autre pièce en zinc. Écrire l'équation chimique de la réaction d'oxydo-réduction qui a lieu. Comment se nomme ce type de protection ?

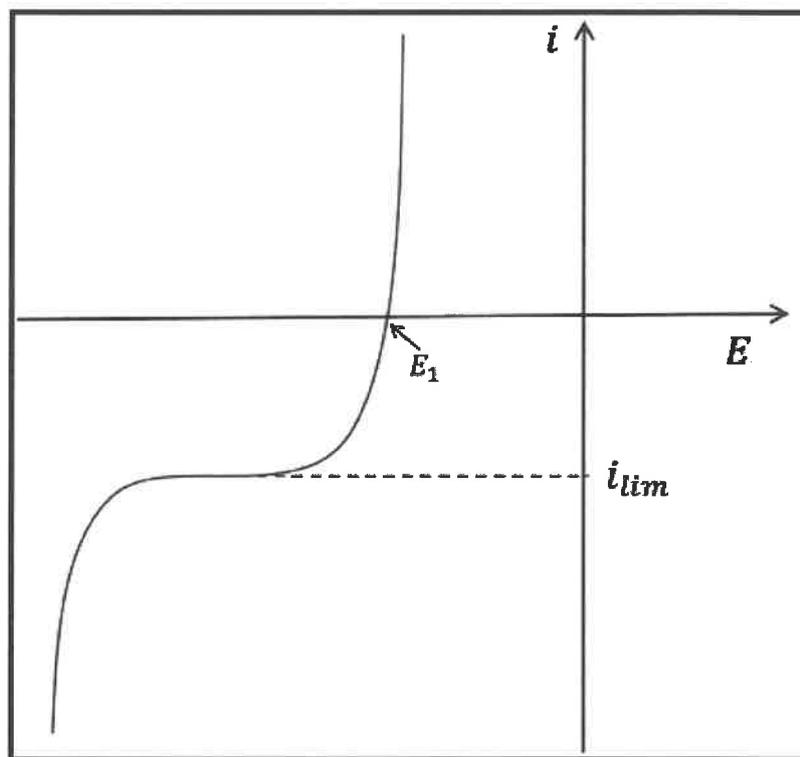
## II - Utilisations du chlorure d'ammonium comme « sel de fond »

Le chlorure d'ammonium, de formule  $NH_4Cl$ , est un solide constitué d'ions  $NH_4^+$  et  $Cl^-$ .

Le chlorure d'ammonium peut être utilisé comme « sel de fond » en électrochimie. Jusqu'à la fin du sujet, la température de travail est de 298 K.

On note (S) une solution de sulfate de zinc (II)  $(Zn^{2+}, SO_4^{2-})_{(aq)}$  à  $1,0 \times 10^{-1} mol.L^{-1}$ , et de chlorure d'ammonium, acidifiée par de l'acide sulfurique.

La Figure 3 représente la courbe courant-potentiel enregistrée pour la solution (S) sur une électrode de zinc. Les ions  $SO_4^{2-}$ ,  $NH_4^+$  et  $Cl^-$  sont électro-inactifs.



**Q28.** Écrire l'inégalité impliquant les concentrations  $[Zn^{2+}]$  et  $[OH^-]$  dans la solution (S) pour que le précipité  $Zn(OH)_2(s)$  ne se forme pas. En déduire que le  $pH$  de la solution (S) doit alors être inférieur à une valeur qu'on calculera. On supposera cette condition sur le  $pH$  vérifiée pour le reste du sujet.

**Q29.** Représenter le schéma du montage qui a permis le tracé de cette courbe. On précisera explicitement les grandeurs mesurées et le lien avec les grandeurs représentées sur la courbe.

**Q30.** Reproduire la courbe de la Figure ci-dessus sur la copie et indiquer les processus se déroulant sur chaque section.

**Q31.** Calculer la valeur attendue pour le potentiel  $E_1$ , défini sur la Figure ci-dessus.

**Q32.** Indiquer deux grandeurs auxquelles  $i_{lim}$ , défini sur la Figure 3, est proportionnel.

**Q33.** Indiquer pourquoi la courbe n'admet pas de palier de courant pour  $i > 0$ .

On souhaite utiliser la solution (S) pour déposer du zinc ultra-pur sur l'électrode de zinc par électrolyse en utilisant également une électrode de carbone graphite.

**Q34.** Ecrire la réaction électrochimique se déroulant sur l'électrode de zinc et indiquer, en justifiant, si cette dernière joue le rôle d'anode ou de cathode.

**Q35.** Schématiser le montage d'électrolyse en indiquant sans ambiguïté les branchements du générateur et le déplacement des électrons.

**Q36.** Etablir l'expression de la masse  $m_{Zn}$  de zinc théoriquement déposée sur l'électrode en fonction de la masse molaire du zinc  $M_{Zn}$ , de l'intensité  $I$  du courant constant utilisé, de la durée de l'électrolyse  $\Delta t$  et de la constante de Faraday  $F$ .

**Q37.** En réalité, la masse obtenue expérimentalement est inférieure à celle précédemment calculée car le rendement faradique est strictement inférieur à 1. En augmentant la tension d'électrolyse, le rendement faradique diminue. Expliquer.

**Q38.** Indiquer l'intérêt d'utiliser du chlorure d'ammonium comme « sel de fond » lors de cette électrolyse.

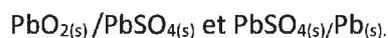
### III. Accumulateur au plomb en fonctionnement générateur

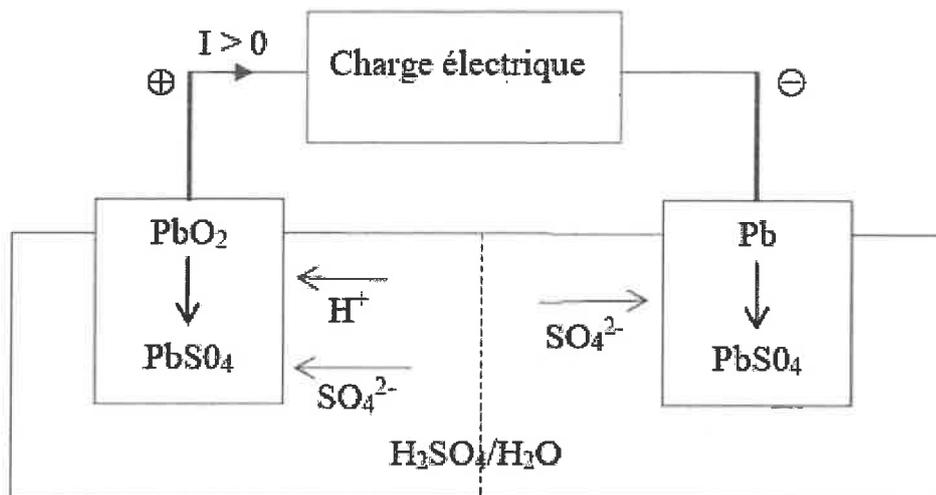
*Mise au point par le Français Gaston Planté en 1859, la batterie au plomb est encore aujourd'hui très compétitive et reste la principale technologie utilisée dans les véhicules thermiques. En effet, elle est capable de fournir un courant crête de grande intensité, nécessaire pour le démarrage électrique des moteurs à combustion interne.*

#### Solubilité du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique

**Q39.** Déterminer, en faisant l'(es) approximation(s) qui s'impose(nt), la solubilité  $s$  du sulfate de plomb dans une solution d'acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . Conclure.

Les couples oxydants réducteurs qui interviennent dans l'accumulateur au plomb (figure 4) sont





**Figure 4 – Accumulateur au plomb**

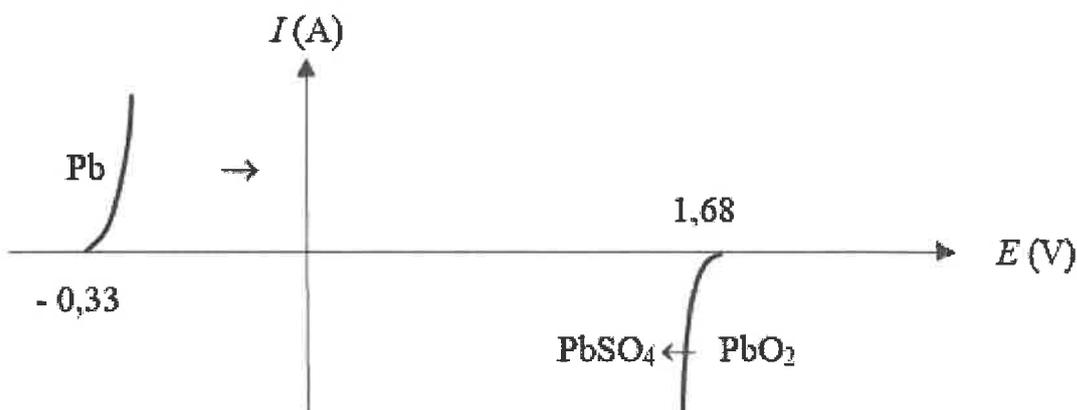
**Q40.** Écrire les deux demi-réactions chimiques, en fonctionnement générateur, en précisant celle qui a lieu à l'anode et celle qui a lieu à la cathode. En déduire la réaction globale de fonctionnement de l'accumulateur.

**Q41.** La tension ou force électromotrice d'un accumulateur au plomb dépend-elle du pH ? Si oui, est-il préférable d'utiliser dans l'accumulateur au plomb de l'acide sulfurique très concentré ou non ?

#### Masse d'une batterie au plomb

On désire réaliser une batterie au plomb dont la tension à vide  $U_0$  est supérieure à 12 V et dont la capacité  $Q$  est supérieure à 50 A.h.

On donne sur la figure 5, les courbes intensité-potentiel d'un élément de la batterie utilisé en mode décharge.



**Figure 5 – Courbes intensité-potentiel**

**Q42.** Quelle(s) grandeurs(s) électrique(s) de la batterie est (sont) modifiée(s) par la mise en série de plusieurs éléments ? Quelle(s) grandeurs(s) électrique(s) de la batterie est (sont) modifiée(s) par la mise en parallèle de plusieurs éléments ?

**Q43.** Combien faut-il associer d'éléments, en série, pour satisfaire le cahier des charges ?