

Devoir surveillé n°7

Partie physique

8h00 – 9h30

1,5 heures

Calculatrice autorisée

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de deux problèmes indépendants entre eux

Données et formulaire en fin de sujet

Premier problème : détermination de la précision du repérage par GPS

La localisation d'un capteur GPS (Global Positioning system) s'appuie sur la mesure des temps de parcours de signaux émis par un ensemble de satellites situés à environ 20000 km d'altitude et reçus par le capteur GPS au sol. Les signaux sont émis sous la forme de paquets d'ondes dans deux fines bandes spectrales dédiées, centrées respectivement sur les fréquences $\nu_1 = 1575,4\text{MHz}$ et $\nu_2 = 1227,6\text{MHz}$.

L'information obtenue d'un premier satellite donne une position possible du capteur à la surface d'une sphère centrée autour de ce satellite. Un second permet de situer l'appareil sur le cercle intersection entre les deux sphères centrées autour de ces deux satellites. Un troisième permet de limiter la position à deux points, dont un seul est à la surface de la Terre. Un dernier permet de synchroniser l'horloge des satellites avec celle du capteur. Une incertitude dans l'estimation de la distance entre le capteur et un satellite se reporte sur la localisation au sol. Dans la suite nous ne considérons qu'un des satellites dont l'horloge est supposée parfaitement synchronisée avec celle du capteur, on néglige donc l'incertitude sur la mesure temporelle. On considère, en première approximation, que la précision de positionnement au sol est liée à l'incertitude de mesure de distance capteur-satellite et à un facteur géométrique, nommé DOP (Dilution of Precision). Ainsi le décalage maximal au sol est le produit de la valeur maximale du DOP et du décalage maximal de la distance capteur-satellite. La figure 8 présente un relevé du DOP pour le capteur utilisé.

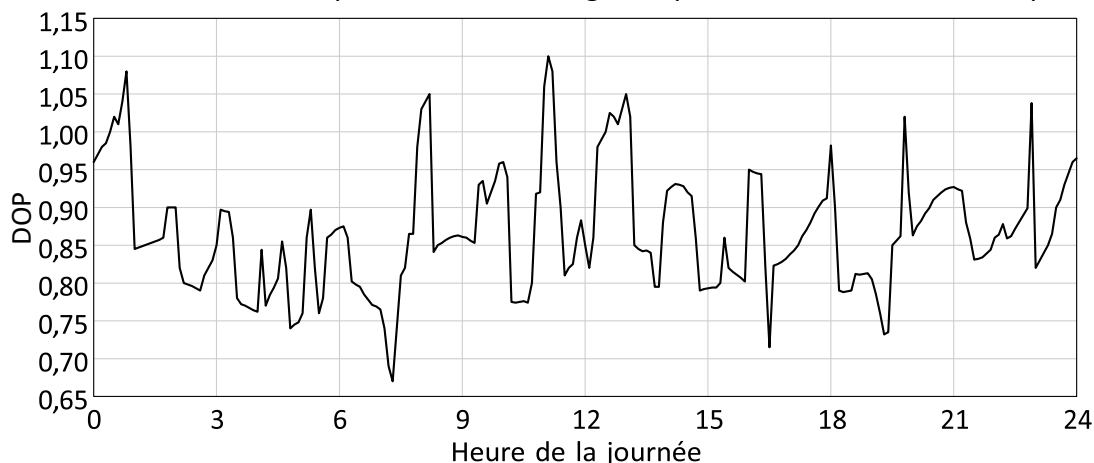


Figure 8 Variations typiques du DOP au cours d'une journée (d'après Jean-Marc Piéplu, GPS et Galileo Systèmes de navigation par satellites, Eyrolles, 2006)

Les ondes émises, avant d'atteindre le capteur au sol, traversent l'ionosphère (couche haute de l'atmosphère formée d'un gaz partiellement ionisé) et subissent, par rapport à la propagation dans le vide, un retard τ , dit retard ionosphérique. Celui-ci, en affectant l'estimation de la distance capteur-satellite, induit une incertitude de positionnement. En dehors de l'ionosphère, le milieu de propagation est non dispersif.

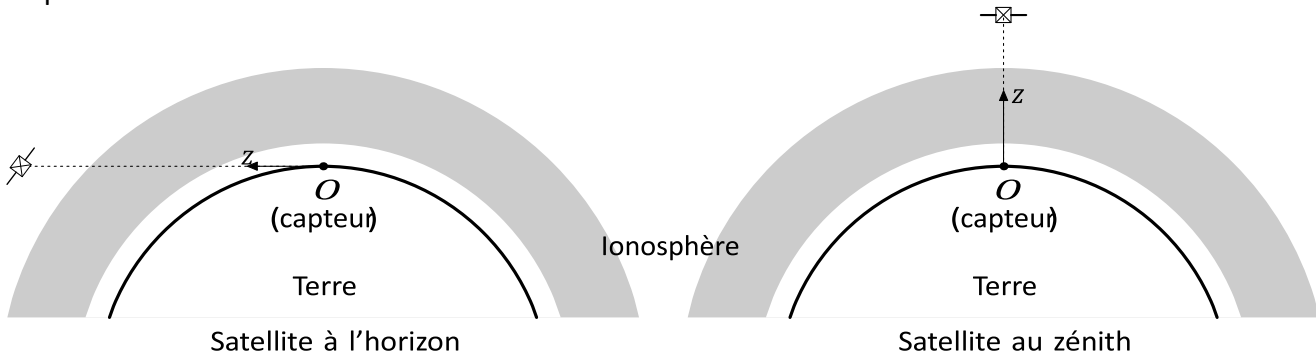


Figure 9 Terre, ionosphère et positions du satellite sur l'horizon et au zénith

Pour caractériser l'interaction entre l'onde électromagnétique émise par le satellite et l'ionosphère, cette dernière est modélisée par une couche uniforme, d'épaisseur d constante, située entre 80 et 800 km d'altitude et formée d'un plasma peu dense. Ce plasma est composé de cations considérés fixes (du fait de leur masse très supérieure à celle des électrons) et d'électrons libres de densité particulière constante $n = 1,0 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}$, de charge $-e$ et de masse m_e . À la densité particulière n , les interactions électrons-électrons et électrons-cations sont négligeables. Le plasma est supposé localement neutre et les électrons sont non relativistes (leur vitesse V est très inférieure à c , la célérité de la lumière dans le vide). Leur poids est négligeable devant la force de Lorentz. On note ϵ_0 la permittivité du vide.

L'axe (Oz) est l'axe capteur-satellite. Le champ électrique de l'onde émise par le satellite à la distance z du capteur est modélisé par l'écriture complexe $\vec{E}(z, t) = E_0 \exp(i(\omega t + kz)) \vec{e}_x$ où E_0 est une constante réelle, ω est la pulsation de l'onde monochromatique et k est une constante complexe dépendant de ω ainsi que des caractéristiques du plasma.

Q 1. En formulant une hypothèse sur l'une des composantes de la force de Lorentz, sans la discuter à ce stade, montrer que la conductivité complexe du plasma peut se mettre sous la forme

$$\sigma = -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

où ω_p est la pulsation plasma que l'on exprimera en fonction de ϵ_0 , m_e , n et e .

Q 2. Établir l'équation aux dérivées partielles portant sur $E_x(z, t)$ caractérisant la propagation de l'onde dans le plasma.

Q 3. En déduire la relation de dispersion caractéristique du plasma sous la forme $k^2 = f(\omega)$. Indiquer dans quel cas et pourquoi on parle de domaine de transparence du plasma.

Q 4. Montrer que les deux bandes spectrales utilisées par le GPS se situent dans le domaine de transparence du plasma.

Q 5. Exprimer la vitesse de phase V_ϕ .

Q 6. Rappeler la signification de la vitesse de groupe V_g à une pulsation ω et l'exprimer.

Q 7. Tracer l'allure de V_ϕ et de V_g en fonction de ω . Commenter au regard des fréquences utilisées pour les signaux GPS.

- Q 8.** Exprimer, en notation complexe, le champ magnétique $\vec{B}$. Justifier l'hypothèse faite à la question 1.
- Q 9.** En supposant que le satellite est à la verticale du capteur, donner une expression approchée du retard ionosphérique à la traversée de l'ionosphère en fonction de ω , ω_p , c et de l'épaisseur d d'ionosphère traversée.
- Q 10.** En négligeant l'altitude du bas de l'ionosphère devant son épaisseur et la réfraction ionosphérique, proposer une expression approchée de τ lorsque, depuis le point où se trouve le capteur, le satellite est sur l'horizon. Donner ainsi une estimation numérique du retard maximum subi à la traversée de l'ionosphère.
- Q 11.** Justifier que ne pas tenir compte de la différence entre V_g et c dans le plasma induit un décalage de positionnement au sol.
- Q 12.** En utilisant le résultat des questions précédentes et la figure 8, estimer la valeur numérique du décalage maximal de positionnement au sol, puis l'incertitude-type sur ce décalage. On procédera à une évaluation de type B sur une distribution uniforme que l'on précisera.
- Q 13.** En déduire, en supposant que la seule source d'incertitude est ce défaut de positionnement, une estimation de l'incertitude-type relative sur la mesure de la vitesse d'un objet sur terre. Commenter sur l'impact potentiel d'un défaut de localisation GPS pour un parcours de 5 km.

Deuxième problème : chauffage de l'eau d'un spa

Un spa est équipé d'une unité de contrôle composée notamment d'une pompe de chauffage permettant de faire circuler l'eau à travers une source chaude. La vitesse de ce système de chauffage indiquée sur le manuel du spa est de $v_c = 2^\circ\text{C}\cdot\text{h}^{-1}$ jusqu'à une température maximale de 40°C .

Q14. Estimer la durée nécessaire pour atteindre la température maximale de 40°C depuis une température initiale de 20°C .

La puissance de chauffage de l'unité de contrôle indiquée sur le manuel est $P_c = 2,5 \text{ kW}$: est-ce cohérent avec le résultat précédent ?

Il est également possible de laisser naturellement chauffer l'eau du spa en plein soleil, sans utiliser la pompe de chauffage. Mais cela dépend de la météo, de l'heure d'exposition, et même a priori de l'altitude.

Q15. À quel moment de la journée le chauffage par le Soleil est-il le plus efficace ? Justifier la réponse.

On cherche à savoir si l'eau chauffe plus vite en plein soleil si le spa est installé à haute altitude sans considérer une éventuelle baisse de la température due à cette élévation. Lorsqu'elle est éclairée par une onde électromagnétique $\vec{E} = E_0 \cos[\omega(t - x/c)] \hat{e}_z$ issue du rayonnement solaire, une molécule d'air (essentiellement N_2 ou O_2) se polarise selon le moment dipolaire $\vec{p} = p_0(\omega) \cos(\omega t) \hat{e}_z$, avec $p_0(\omega) = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ où $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, e et m étant respectivement la charge et la masse de l'électron.

Q16. Justifier qualitativement le fait que l'on puisse écrire l'onde électromagnétique issue du rayonnement solaire sous cette forme.

Comment expliquer la création du moment dipolaire $\vec{p}$? On se contentera d'une réponse qualitative.

On admet que chaque molécule d'air rayonne la puissance moyenne $P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$.

Q17. Montrer que, pour une pulsation donnée, l'éclairement (ici assimilé à la puissance surfacique moyenne) décroît selon l'axe de propagation du rayon solaire selon une loi du type $\mathcal{E}_\omega(x) = \mathcal{E}_\omega(0) \exp(-x/H_\omega)$.

On introduira n , le nombre de molécules d'air par unité de volume. Après avoir exprimé H_ω en fonction de n , e , μ_0 , m et ω/ω_0 on vérifiera la cohérence dimensionnelle de son expression.

Q18. Sachant que le maximum d'émission du Soleil est centré sur la longueur d'onde d'un rayonnement vert, estimer la valeur de H_0 .

Sachant que l'épaisseur caractéristique de l'atmosphère est de l'ordre de 100 km, que peut-on dire de l'effet d'une augmentation d'altitude sur le chauffage de l'eau du spa ?

Données et formulaire

Constantes diverses

Permittivité du vide
Charge élémentaire
Masse de l'électron
Célérité de la lumière dans le vide
Rayon terrestre
Accélération de la pesanteur
Masse volumique de l'air
Masse volumique de l'eau
Capacité thermique massique de l'eau

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8,9 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \\ e &= 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \\ m_e &= 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ c &= 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ R_T &\approx 6400 \text{ km} \\ g &= 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ \rho_{\text{air}} &= 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ \rho_{\text{eau}} &= 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ c_e &= 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}\end{aligned}$$

Expression des opérateurs usuels

En coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\text{— Gradient : } \overrightarrow{\text{grad}}(a) &= \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial a}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{— Divergence : } \text{div}(\vec{A}) &= \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \text{— Laplacien scalaire : } \Delta(a) &= \nabla^2 a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \\ \text{— Laplacien vectoriel : } \Delta(\vec{A}) &= \nabla^2 \vec{A} = \Delta(A_x) \vec{e}_x + \Delta(A_y) \vec{e}_y + \Delta(A_z) \vec{e}_z\end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\text{— Gradient : } \overrightarrow{\text{grad}}(a) &= \frac{\partial a}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{— Rotationnel : } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z\end{aligned}$$

Relations entre opérateurs

$$\begin{aligned}\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(a)) &= \Delta(a) \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(a)) &= \vec{0} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta(\vec{A}) \\ (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} &= \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \wedge \vec{A} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A}^2)\end{aligned}$$

Évaluation des incertitudes

Évaluation de type A :

Si l'on dispose de N mesures y_i d'une grandeur y , alors

Valeur moyenne	Incertitude-type sur une mesure	Incertitude-type sur la moyenne
$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$	$u(y) = \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$	$u(\langle y \rangle) = \frac{u(y)}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \langle y \rangle)^2}$

Évaluation de type B :

Si la grandeur mesurée y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, l'incertitude-type est alors

$$u(y) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$