

2024/2025

Thème : échantillonnage

APPLICATION DIRECTE :**1. Echantillonnage**

a. Remplir le tableau ci-dessous pour les 3 cas présentés, où T_{acq} est la durée d'acquisition du signal, N le nombre d'échantillons, T_e la période d'échantillonnage, f_e la fréquence d'échantillonnage, T_o la période du signal, f_o la fréquence du signal, f_s la fréquence du signal échantillonné, la résolution spectrale (le plus petit intervalle de fréquence mesurable) $\Delta f = f_e / N$. Préciser les relations qui existent entre les grandeurs.

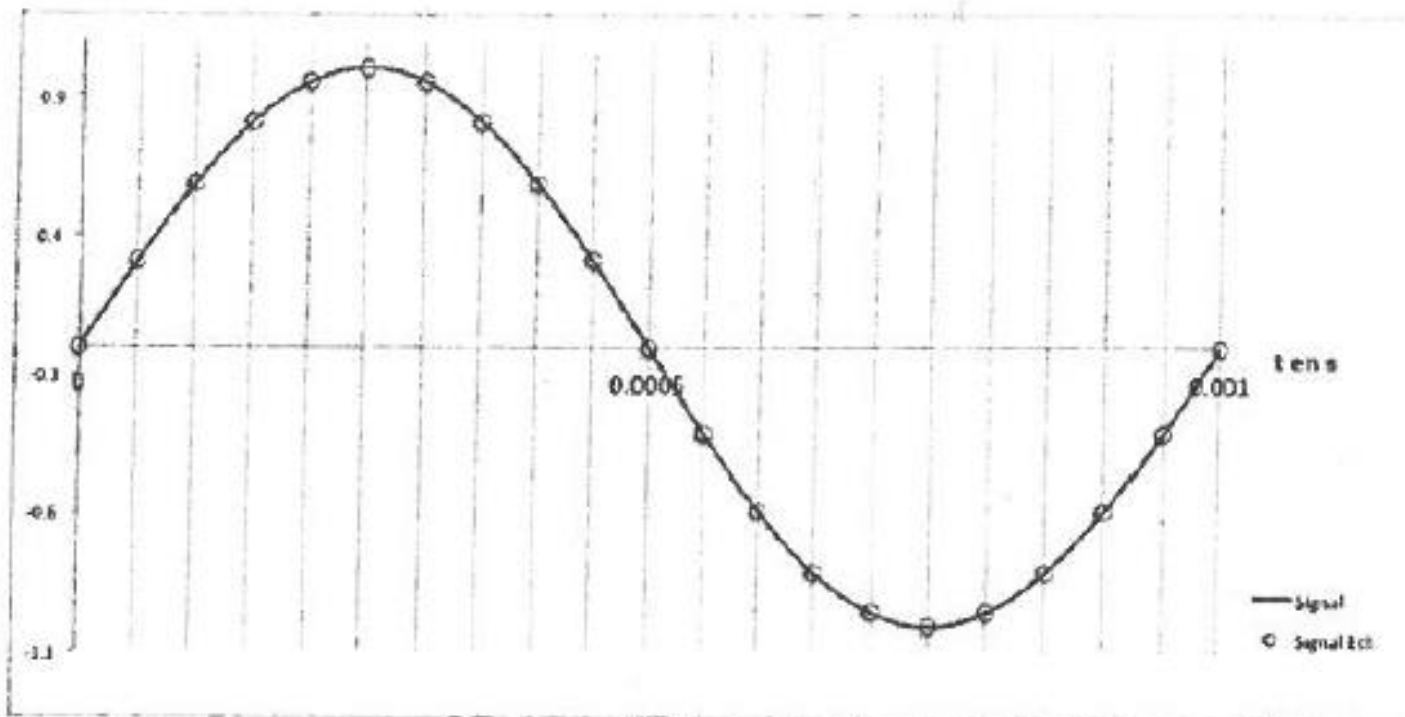
	T_{acq}	N	T_e	f_e	T_o	f_o	f_s	Δf
Cas 1								
Cas 2								
Cas 3								

b. Enoncer le critère de Shannon relatif à la fréquence d'échantillonnage minimale pour effectuer un calcul correct de FFT (Fast Fourier Transform) et conclure la question a.

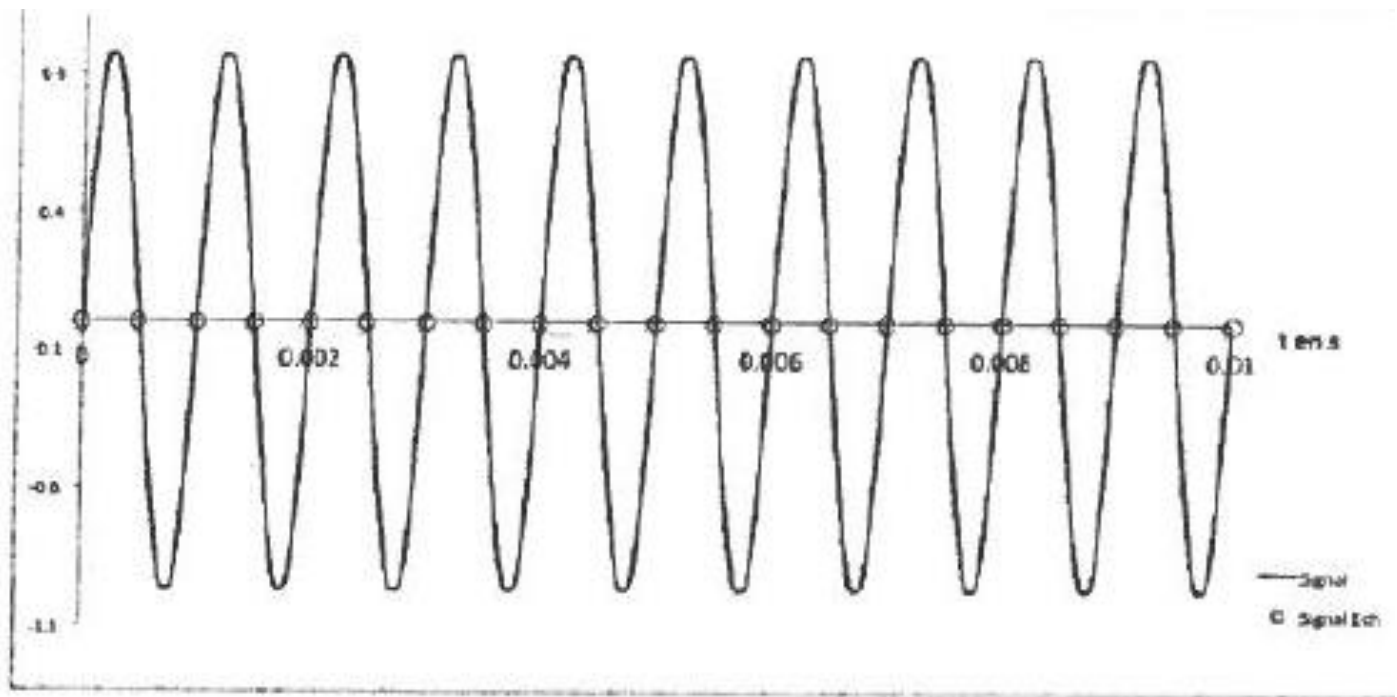
c. Le calcul de la FFT est muni d'un filtre anti-repliement qui sélectionne les signaux dont les fréquences sont comprises entre 0 et $f_e/2$. Tracer les spectres des 3 signaux.

d. En déduire la fréquence d'échantillonnage minimale pour calculer par FFT le spectre du signal 3.

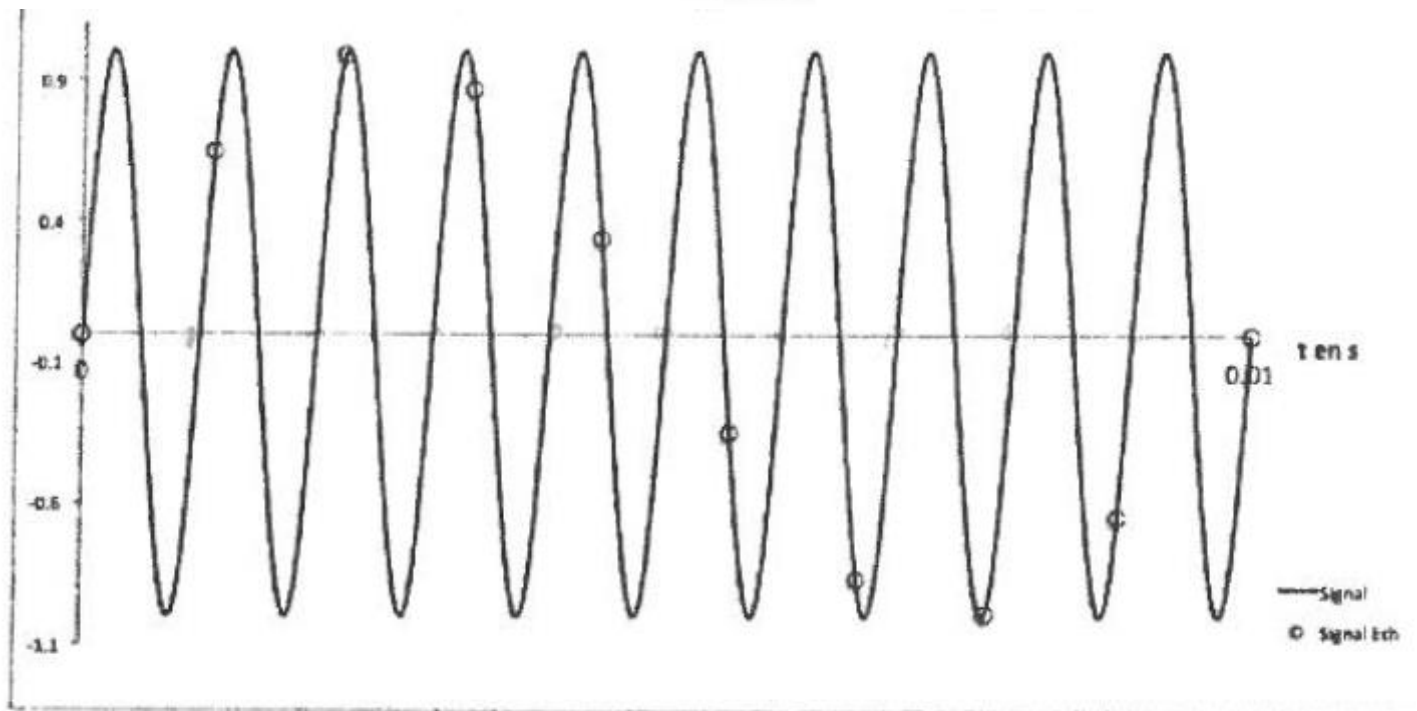
e. Effectuer le produit $T_{acq} \cdot \Delta f$ et conclure.



cas 1



cas 2



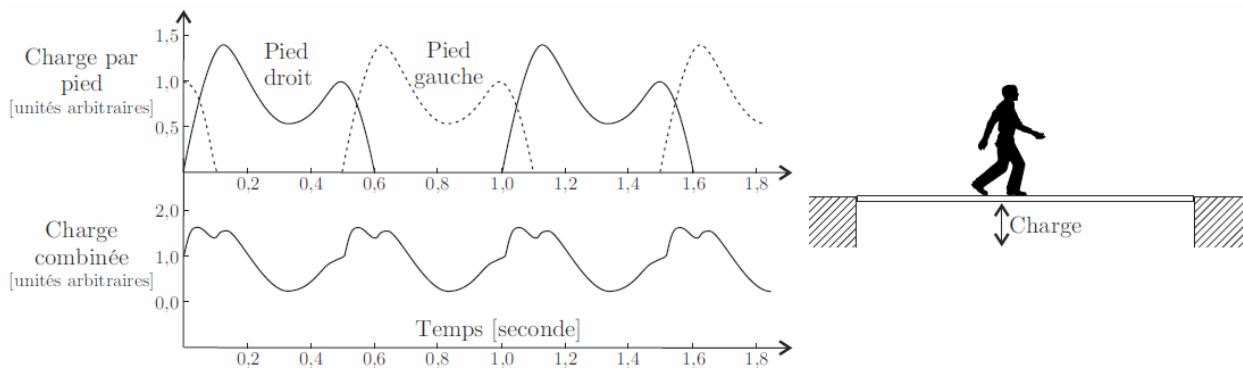
cas 3

EXERCICES :

I. Analyse spectrale de la marche

On étudie la marche d'un piéton sur une passerelle qui est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. On a enregistré l'amplitude des vibrations subies par la passerelle au cours du temps. Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés ci-dessous.

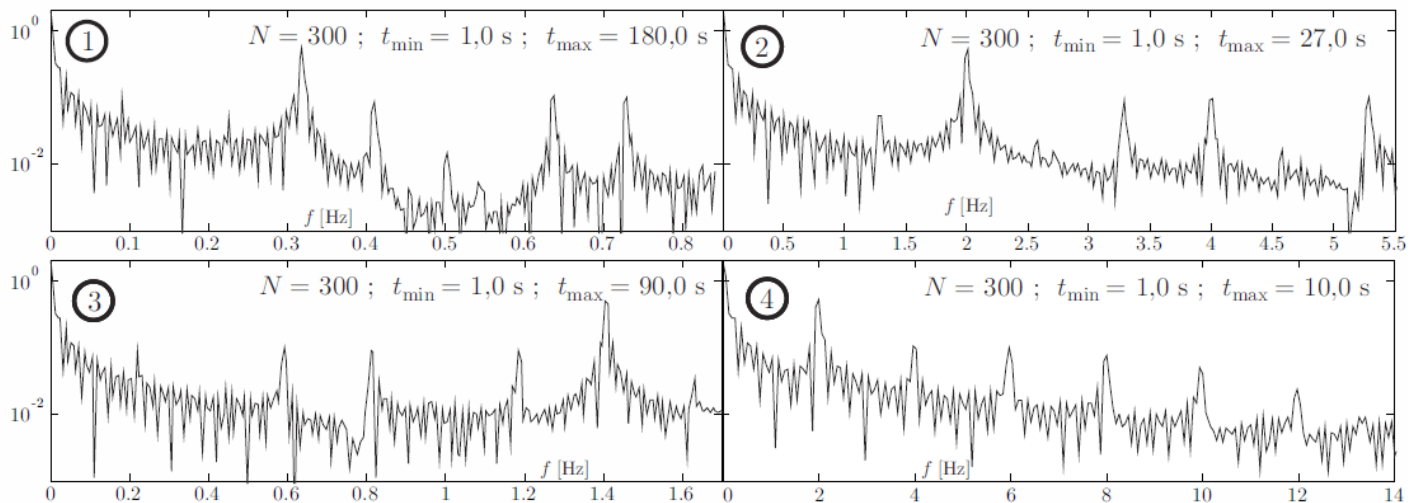


Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton

On étudie la marche d'un piéton sur une passerelle qui est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. On a enregistré l'amplitude des vibrations subies par la passerelle au cours du temps. Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés ci-dessous.

Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables ? Lequel vous paraît le plus pertinent ? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?



Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

II. Spectre des signaux carré et triangulaires

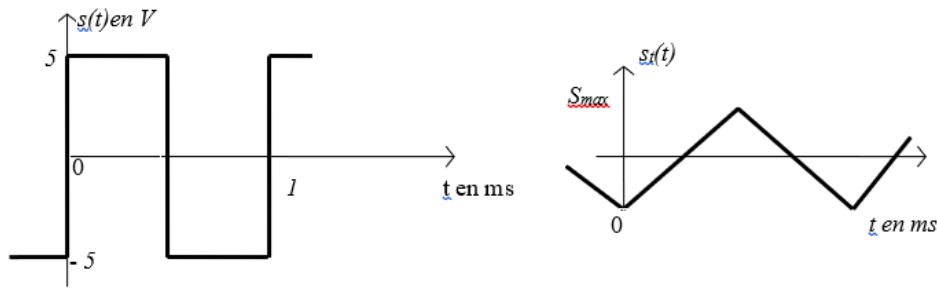
On rappelle que toute fonction périodique $s(t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, définie sur $\mathbb{R}$, ne présentant par période qu'un nombre fini de discontinuités, est égale à la somme d'une série trigonométrique appelée **série de**

Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n \omega t) + b_n \sin(n \omega t)] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t).$$

Soit le signal carré symétrique représenté ci-dessous, dont on a représenté une période.

1. Justifier $a_0 = 0$.
2. Quelle est la parité du signal carré ? En déduire que $a_n = 0$.
3. Les valeurs de b_n sont données par $b_n = \frac{2S_{\max}}{n\pi} [1 - (-1)^n]$. Ecrire explicitement le développement en série de Fourier de $s(t)$ pour $n \leq 5$. Tracer le spectre de Fourier de ce signal.



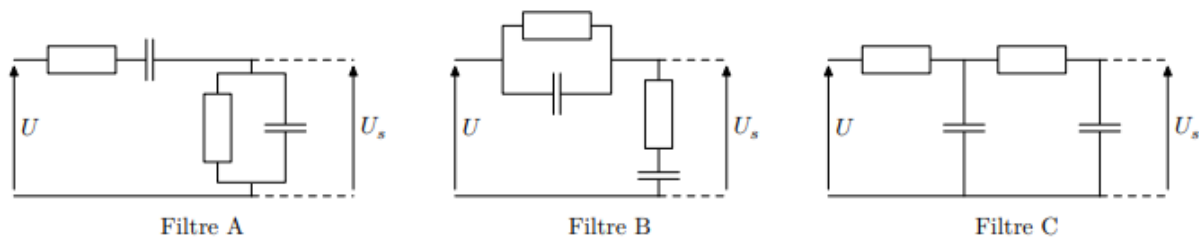
Le signal triangulaire $s_t(t)$ a été obtenu en intégrant le signal carré.

4. Proposer un montage simple qui permet de réaliser cette opération, ainsi que les valeurs numériques des composants choisis.
5. En déduire l'expression analytique du développement en série de Fourier pour $n \leq 3$, puis la généraliser.
6. Tracer le spectre de Fourier de ce signal.
7. On souhaite calculer par FFT le spectre d'un signal triangulaire de fréquence 100 Hz jusqu'à l'harmonique de rang 7. Déterminer la fréquence d'échantillonnage, le nombre d'échantillons nécessaires et la durée d'acquisition.

III. Traitement du signal

Un accéléromètre fournit un signal analogique de tension U , pollué par du bruit dont les composantes spectrales de fréquence supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures sans apporter aucune information. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

1. Parmi les trois types de filtres A, B et C représentés ci-dessous, lequel convient ?



Les deux résistors présentent la même résistance R et les deux condensateurs la même capacité C . 2. Montrer que la fonction de transfert $\underline{H}_F(j\omega)$ du filtre s'écrit :

$$\underline{H}_F(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega+(jRC\omega)^2}$$

3. Quelles valeurs proposez-vous pour R et C ?

Certains modèles d'accéléromètres ne sont pas munis d'un filtre analogique, mais seulement d'un filtre numérique. Le signal U fourni par l'accéléromètre est échantillonné à la fréquence de 10,24 Hz puis traité numériquement pour obtenir un signal filtré U_s . Soit $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ les valeurs échantillonnées du signal et $\{U_{Sk}, k \in \mathbb{N}\}$ celles que l'on obtient à la sortie du filtre.

4. Proposer un traitement numérique permettant de passer des $\{U_k\}$ aux $\{U_{Sk}\}$ selon la méthode d'Euler. Vous explicitez les opérations à effectuer et donnez la valeur numérique d'éventuelles constantes.

Après divers traitements, le signal final est échantillonné à la fréquence de 2,56 Hz. Toutes les 200 secondes, 512 échantillons sont envoyés à un microprocesseur qui calcule le spectre des hauteurs de vagues.

5. Sur quel intervalle de fréquence convient-il d'afficher le spectre obtenu ?