

l'aimant se déplace à une vitesse $\vec{v} = -v \vec{u}_x, v > 0$

bobine de N spires de surface S.

$$\vec{S} = -S \vec{u}_x$$

Soit r la distance entre l'aimant et la bobine.

Soit \vec{B} le champ magnétique créé par l'aimant, au centre de la bobine (en $x=0$):

$$\vec{B} = -\frac{B}{r^\alpha} \vec{u}_x \quad \text{avec } \alpha > 0$$

(r = distance entre l'aimant et centre de la bobine)

D'après la loi de Faraday, $(U_{AB}) = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = e \rightarrow$ fém induite

$$\Phi(\vec{B}) = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \iint_S \frac{B}{r^\alpha} dS = \frac{NBS}{r^\alpha}$$

le sens de e dépend du sens de i \rightarrow trace & schéma équivalent

on cherche un résultat qualitatif, donc on peut considérer B uniforme sur S pour ce raisonnement.

donc $\Phi(\vec{B}) = \frac{NBS}{\mu^0} = \frac{NBS}{\mu^0 \mu r}$ donc $\Phi(\vec{B}) = f\left(\frac{1}{r}\right)$
 à travers la bobine

$r = v \times t$ (ici pb car lorsque $t \rightarrow r \rightarrow$ l'aimant entre dans la bobine)

C'est une fonction convexe (pour $r > 0$), positive et décroissante.
 lorsque $r \downarrow$

$\Phi(\vec{B}) \downarrow$, donc $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} < 0$

or, $\mathcal{U}_{AB} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = e$ donc $\mathcal{U}_{AB} < 0$



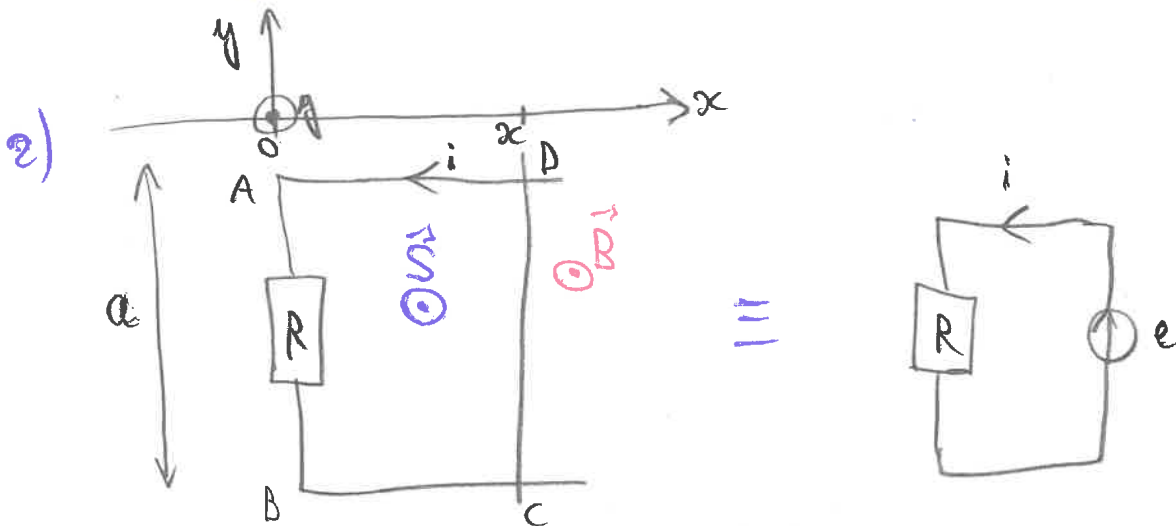
$\Phi(\vec{B})$ est convexe, donc $\frac{d^2\Phi(\vec{B})}{dt^2} > 0$,

donc $\frac{d\mathcal{U}_{AB}}{dt} \nearrow$

donc $\mathcal{U}_{AB} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \downarrow$ et négative,

donc $|\mathcal{U}_{AB}| \nearrow$ au

ou loi de Lenz : le courant induit s'oppose à l'augmentation du $\Phi(\vec{B})$... ils sont donc négatifs en respectant le choix d'orientation.



Loi de Faraday: $e = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = a B x = a x B_0 \cos(\omega t) \quad /$$

\vec{B} traversant le circuit

lorsque la barre est immobile, $x = a$. $/$

$$e = - B_0 a \frac{d \cos(\omega t)}{dt} = + a \omega B_0 \sin(\omega t) \quad /$$

$$\text{or, } e = R i \Leftrightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{a \omega B_0 \sin(\omega t)}{R} \quad /$$

force de Laplace: $\vec{F}_L = i \vec{l} \wedge \vec{B}$ $/$

$$\vec{F}_L = a i(t) \vec{u}_y \wedge B(t) \vec{u}_z = a i(t) B(t) \vec{u}_x \quad /$$

$$F_L = \|\vec{F}_L\| = a \frac{B_0 a \omega \sin(\omega t)}{R} \cdot B_0 \cos(\omega t) = \frac{a^2 B_0^2 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t)}{R}$$

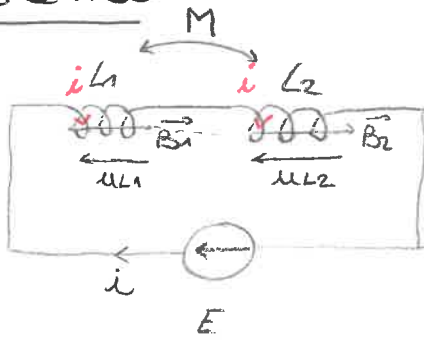
$$= \frac{a^2 B_0^2 \omega}{2R} \sin(2\omega t) \quad / \quad \underline{B}$$

$$\text{donc } \vec{F}_L = \frac{B_0^2 a^2 \omega x}{2R} \sin(2\omega t) \vec{u}_x$$

Il faut exercer sur la barre, une force opposée à \vec{F}_L , pour qu'elle reste immobile:

$$\vec{F}_{\text{opérateur}} = -\vec{F}_L = -\frac{B_0^2 a^2 \omega x}{2R} \sin(2\omega t) \vec{u}_x \quad \underline{\underline{B}}$$

• Schéma:



résistance interne négligeable

résistances des bobines négligeable

a) Les flux magnétiques créés par chacune des bobines s'additionnent si les champs magnétiques qu'elles fabriquent sont dans la même direction *sen*.

b) loi des mailles: $E = \mu L_1 + \mu L_2$

$$\Rightarrow E = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

$$\left(E = L_1 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \right) \times i$$

$$\Rightarrow E i = L_1 i \frac{di}{dt} + 2M i \frac{di}{dt} + L_2 i \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow E i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i^2 L_1 \right) + \frac{d}{dt} (M i^2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i^2 \right)$$

$$\Rightarrow E i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i^2 + M i^2 + \frac{1}{2} L_2 i^2 \right)$$

$$\mathcal{E}_B \text{ du circuit est : } \mathcal{E}_B = \left(\frac{1}{2} L_1 + M + \frac{1}{2} L_2 \right) i^2$$

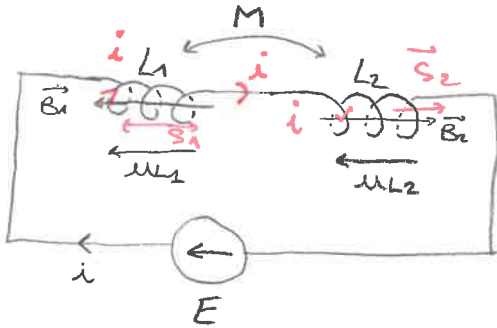
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} (L_1 + 2M + L_2) i^2}}$$

c) L'énergie magnétique d'une inductance L_{eq} est

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} L_{eq} i^2$$

Par identification $L_{eq} = (L_1 + L_2 - 2M)$ ✓

d) schéma



avec $n < 0$
 $i \vec{B}_1 \rightarrow 0$ car $\Phi(\vec{B}_2) = N_1 \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1$
 dans bob1 ↗ ↘
 les deux opposés

loi des mailles : $E = \mu_1 + \mu_2$

$$\Leftrightarrow E = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

idem $\Phi(\vec{B}_1) = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2$
 dans bob2

$$(E = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - 2M \frac{di}{dt}) \times i$$

$$\Leftrightarrow E i = L_1 i \frac{di}{dt} + L_2 i \frac{di}{dt} - 2M i \frac{di}{dt}$$

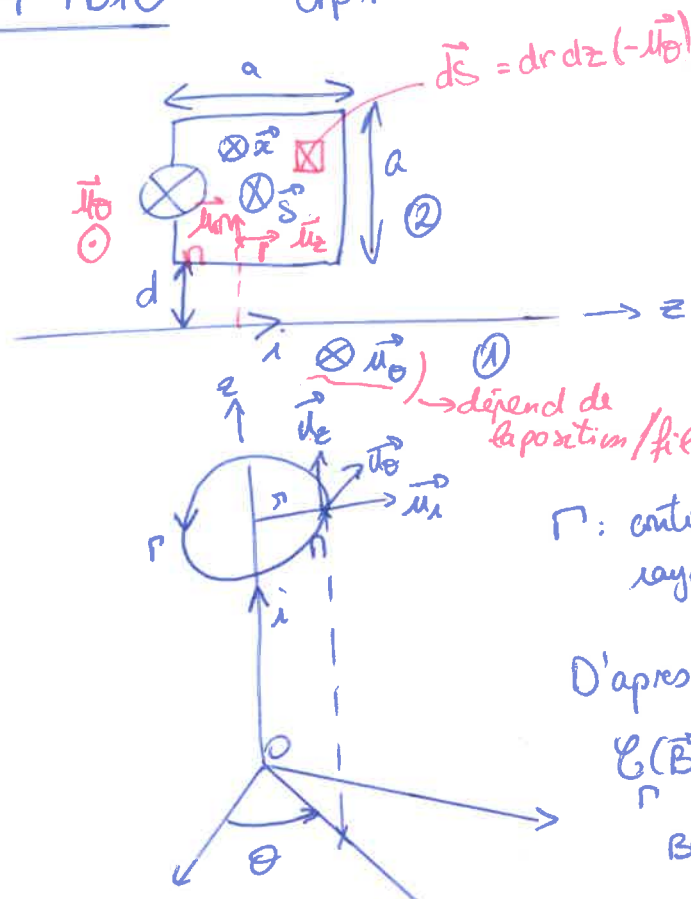
$$\Leftrightarrow E i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i^2 + \frac{1}{2} L_2 i^2 - M i^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_B = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 - 2M) i^2$$

Ainsi $L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$ ✓

Ex IV
TD10

Grp 1



1. $\Pi_{\text{scoutant}} = (n, \vec{u}_1, \vec{u}_z)$
 $\vec{B}(r) \perp \Pi_{\text{scoutant}} \Rightarrow \vec{B}(r) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$
 les coutant sont invariants par translation selon z et rotation d'angle θ donc $B(r, \theta, z)$ indépendants de θ et z . $\vec{B}(r) = B(r) \vec{u}_\theta$

Γ : contour d'Ampère de centre O et de rayon r

D'après le théorème d'Ampère:

$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{enclosés}} \Rightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 i$

$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

champ dépendant de r donc non uniforme

2. $\Phi(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
 pour 1 spire $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
 $d\vec{S} = dr dz (-\vec{u}_z)$

$\Phi(\vec{B}) = N \iint_S \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot (-\vec{u}_z) dr dz = -\frac{\mu_0 i N}{2\pi} \int \frac{dr dz}{r}$

$\Phi = \frac{\mu_0 a^2}{2\pi d} = 9 \times 10^{-7} \text{ H}$

condition de flux max $\vec{u}_\theta \cdot \vec{e}_z = \pm 1$ uniquement si $\vec{u}_\theta = \vec{e}_z$
 dans votre schéma pour $\frac{r}{d} \ll 1$ chaque $\vec{u}_\theta = -\vec{e}_z$ donc $\Phi < 0$

~~Le plus proche du fil possible $r=d \Rightarrow \Phi(\vec{B}) \rightarrow \infty$~~

$\Phi = -\frac{\mu_0 N}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) a$

3. $\Phi(\vec{B}) = \Phi(\vec{B}) \times N$

d'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{\mu_0 a^2 N I \omega^2}{2\pi d} \sin(\omega t)$

$U_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 a^2 N I \omega}{2\pi d} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$
 $N = \frac{A \sqrt{2}}{\mu_0 a^2 I \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}$
 $A = \mu \omega I \sqrt{2}$
 donc \times spires 29.

$U_{\text{eff}} = 1,5 \text{ V}$

~~$a \ll d \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0}{2\pi d}$~~

$\Phi(\vec{B}) = B \cdot S = \mu_0 i \frac{N a^2}{2\pi d} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \approx \frac{a}{d}$
 $n = -\frac{\mu_0 \omega a^2}{2\pi d}$

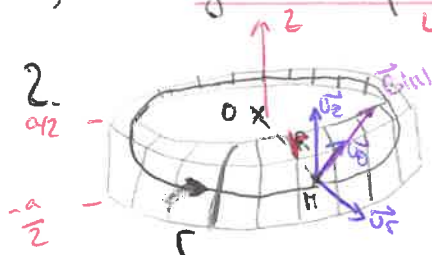
Champ équivalent à une distance d grande
 égal au champ de la question 1 pour $r=d$ donc
 champ uniforme

↳ on ne peut négliger que dans la somme

1. L-AROS (Approximation des Régimes Quasi-Stationnaire) implique que

le champ \vec{E} est uniforme sur le circuit. Or, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ d'après la loi d'Ohm

locale, donc \vec{j} est uniforme sur le circuit. De plus, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$



Symétrie des courants:

ici AROS magnétique $\Rightarrow \left\| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \vec{j}$

donc NA $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

\hookrightarrow les résultats obtenus avec un champ \vec{B} stationnaire sont valables lorsque \vec{B} dépend du temps

ou $\vec{B} \perp \Pi_S$

$\Pi_1: (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est le plan de symétrie (Π_S), donc \vec{B} colinéaire à \vec{u}_θ , car $\vec{B}(M) \perp \Pi_S$ des courants: $\vec{B}(r, \theta, z) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$

Invariance des courants:

Les courants sont invariants par ~~translation selon z~~ et par rotation d'angle θ , donc $B(r, \theta, z)$ est indépendant de θ et z .

\hookrightarrow non! si $|z| > \frac{a}{2}$ il n'y a plus de courants

$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_\theta$

fermé **CONTOUR**

Théorème d'Ampère: on choisit un cercle comme surface d'Ampère.

$$\oint_{\text{sur } \Gamma \text{ fermé orienté}} (\vec{B}) = \mu_0 \cdot I_{\text{enclosé par } \Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot N \cdot i(t) = B \cdot \rho$$

$$\Rightarrow B(r) \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i(t) \cdot \vec{u}_\theta}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i(t)}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Δ ici r est 4 variable à priori \vec{B} NEST PAS uniforme dans le tor

Remi: Pour $r > R$, le champ est nul, de même. On considère le champ \vec{B} nul en dehors de la tore

\hookrightarrow car à l'extérieur du tore $i_{\text{enclosé}} = 0$

$$\begin{aligned} 3. \Phi \text{ à travers 1 spire} &= \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i(t) \cdot \vec{u}_\theta}{2\pi r} \cdot \vec{u}_\theta \cdot dS \\ &= \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi} \int \frac{1}{r} dr dz \\ &= \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi} \int_{R-a}^{R+a} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{1}{r} dz dr \\ &= \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) a \\ \Phi \text{ à travers la bobine} &= N \cdot \Phi \text{ à travers 1 spire} \\ &= N \cdot \frac{\mu_0 N i(t) \cdot a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) = L \cdot i(t) \end{aligned}$$

Donc l'inductance du tore $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi R} \times \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right)$

A.N. Pour $N=100$: $L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2 \cdot (4 \cdot 10^{-2})}{2\pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})} = 4 \mu\text{H}$
 $3,6 \mu\text{H}$ $\times \ln\left(1 + \frac{1}{5}\right)$

Pour $N=1000$: $L = 400 \mu\text{H}$
 360

4. Si $R \gg a$, $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi R}$ A.N.: $L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2}{2\pi \cdot (5 \cdot 10^{-2})} = 0,04 \mu\text{H}$
 $\ln\left(1 + \frac{a}{R}\right) = \frac{a}{R}$

• $B(r) \cdot \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 N i l}{2\pi R} \cdot \vec{u}_\theta$. Le champ magnétique ne dépend que des caractéristiques μ_0, N, i et R , il est donc indépendant de a : l'expression reste la même.

et $\Phi = LI = NBS$ si B uniforme

$$B = \frac{LI}{NS} = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} \times \frac{I}{N a^2}$$

5. Densité volumique d'énergie:

$\epsilon_B = \frac{d\epsilon_B}{dt} = \frac{B^2}{2\mu_0}$, par définition en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$
 $\text{en dehors du tore } B=0$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$$

Champ à distance R du fil.

$\epsilon_B = \epsilon_B \times \frac{\text{volume du tore}}{\text{moyen}} = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi R a^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \pi R a^2$

Energie totale: $\epsilon_B = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} \right) \cdot i^2$
 $= \mu_0 \frac{N I a^2}{4\pi R}$
 $= \frac{L I^2}{2}$

Or $B = \frac{\mu_0 N i l}{2\pi R}$
 $\Rightarrow i(l) = \frac{B \cdot 2\pi R}{\mu_0 N}$

Donc $\epsilon_B = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 a^2}{2\pi R} \right) \cdot \left(\frac{B \cdot 2\pi R}{\mu_0 N} \right)^2$

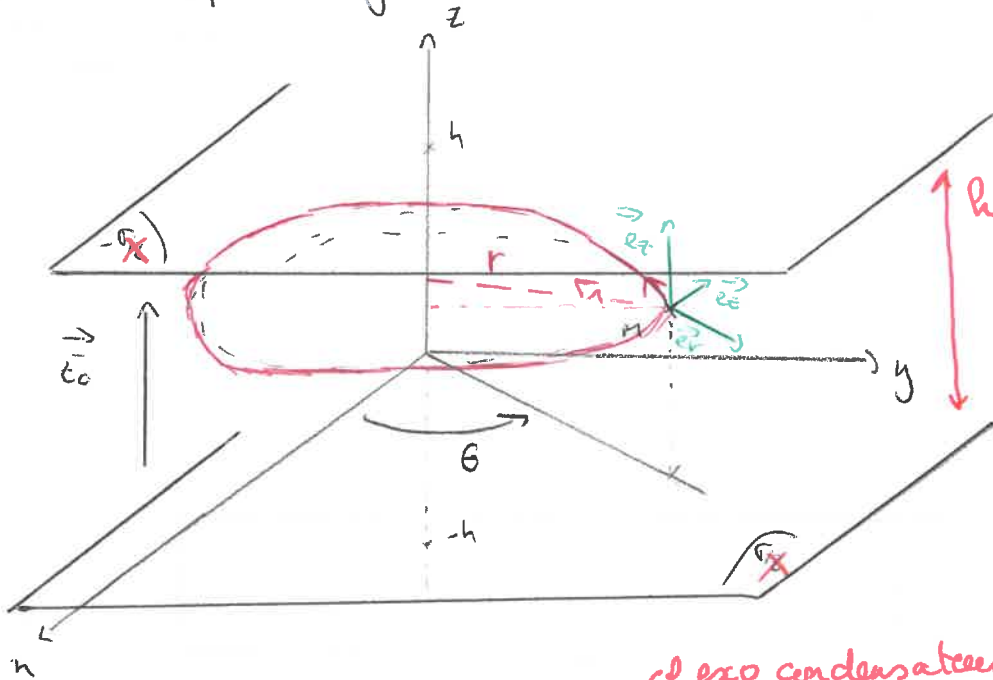
~~$\epsilon_B = \frac{1}{2} N a B$ em J~~ ← pas homogène!

quelque soit le mode de calcul de ϵ_B on retrouve la même expression.

Exercice VI TD n°10

Condensateur alimenté en haute fréquence

Considérons tout d'abord un schéma du condensateur en associant les disques à des plans infinis :



cf exo condensateur...

1. Dans un condensateur, $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$ avec σ la densité surfacique de charge d'une plaque si elles sont configurées comme ci-dessus.

2. a. Champ résultant dans le condensateur électrique ; c'est σ qui dépend du temps

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\vec{E} = \left[E_0 \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right] \vec{u}_z$$

L'équation de Maxwell-Ampère nous indique que :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j}_{el} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \text{ avec, ici, } \vec{j}_{el} = \vec{0}$$

Donc si on note Γ un contour fermé orienté, d'après le Théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(\Gamma)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

surface délimitée par Γ

⚠ Ne pas oublier des éléments différentiel de intégrale.

Ainsi $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S(\Gamma)} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

On considère Γ le contour d'Ampère représenté en rouge sur le schéma.

Ainsi, comme \vec{B} est colinéaire à \vec{e}_θ (en effet $\text{rot}(\vec{B})$ est colinéaire à \vec{e}_z)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} B(r,t) r d\theta &= 2\pi r B(r,t) = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S(\Gamma)} \left(\frac{\partial E_{\text{cos}}(\omega t)}{\partial t} \right) \vec{e}_z \cdot dr \cdot r d\theta \vec{e}_z \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \iint_{S(\Gamma)} -\omega E_0 \sin(\omega t) \cdot r dr d\theta \\ &= -\omega \mu_0 \epsilon_0 E_0 \sin(\omega t) \pi r^2 \end{aligned}$$

De ce fait, $\vec{B}_1(r,t) = \frac{-\omega \mu_0 \epsilon_0 E_0 r \sin(\omega t)}{2} \vec{e}_\theta$

b. L'équation de Maxwell - Faraday nous indique que $\text{rot}(\vec{E}_2) = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$, ce qui nous informe sur l'existence de \vec{E}_2 en \vec{B}_1 déterminé ci-dessus ne dépend pas du temps.

De plus $\text{rot}(\vec{E}_2) = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ avec, cette fois-ci $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ colinéaire à \vec{e}_r . De fait, \vec{E}_2 est colinéaire à \vec{e}_z .

\rightarrow théorème de Stokes
 $B(\vec{E}) = -\frac{d}{dt} \Phi(\vec{B})$
 Γ fermé orienté

Notons que le rotationnel \vec{E}_2 dans le système de coordonnées cylindriques s'écrit $\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}, \frac{d}{r d\theta}, \frac{d}{dz} \right) \wedge \vec{E}_2(r) = \left(\frac{d}{dr}, \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}, \frac{d}{dz} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(r) \end{pmatrix} = \text{rot}(\vec{E}_2(r)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial E_2}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}$

\rightarrow cette opération n'est valable que en cartésiennes

Ainsi, comme $-\frac{r E_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega \sin(\omega t)}{2} \vec{e}_r + \frac{r E_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{2} \vec{e}_\theta = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} E_2(m) = \frac{-r \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_\theta}{2} \\ -\frac{d}{dr} E_2(m) = \frac{r \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

ici vous trouvez le bon résultat malgré le mauvais départ

Le point M défini dans le schéma de la première page était immobile; $\vec{E} = 0$ et donc :

$$\begin{cases} 0 = \frac{-r \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0}{2} \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} E_2(m) \Rightarrow E_2(m) \text{ ne dépend pas de } \theta \\ \frac{dE_2(m)}{dr} = \frac{r \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{2} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

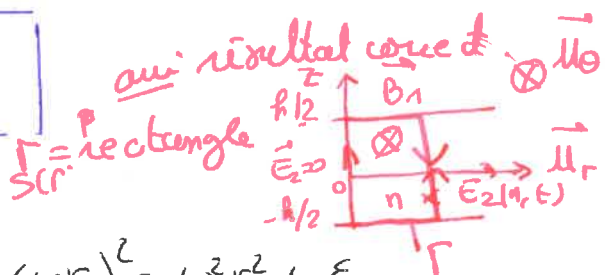
↳ l'idée était de dire que les charges étant invariante par rotation d'angle θ , $E_2(m)$ est indépendant de θ .

En intégrant $E_2(m,t) = \frac{r^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{4} + C$

Car E_2 ne dépendant que de r et comme d'après l'énoncé $E(r,t) = 0$:

$$\vec{E}_2(r,t) = \frac{r^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{4} \vec{e}_z$$

→ par application du théorème de Stokes
 c. $-E_2(r,t)h = -\frac{d}{dt} \iint_{\Gamma} B_1(r,t) dr dz$



On donne que $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow n^2 = \left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 = \omega^2 r^2 \mu_0 \epsilon_0$

$$-E_2(r,t)h = \frac{\omega \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_0}{2} \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (\cos(\omega t)) \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^r r dr = -\frac{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_0}{2} \cos(\omega t) h \frac{r^2}{2}$$

De fait, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_2 = \left[E_0 \cos(\omega t) + \frac{E_0 n^2}{4} \cos(\omega t) \right] \vec{e}_z$

on retire le résultat de b.

$$\vec{E} = E_0 \left(1 + \frac{n^2}{4} \right) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

B signe

De plus à très basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ et donc $\vec{E} \approx E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

Subséquentement avec les dimensions données :

$$\frac{\text{amplitude quelque soit la fréquence}}{\text{amplitude à basse fréquence}} \left(\frac{1 - \frac{n^2}{4}}{1} \approx 1 \right) \text{ avec } n \approx \frac{10^{-1} \cdot 2\pi \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}$$

On va déterminer le rapport $E_0 \left(\frac{1 - \frac{n^2}{4}}{1} \right)$ ← amplitude quelque soit la fréquence
 $E_0 (1)$ ← amplitude à très basse fréquence

Déjà, $n = \frac{r\omega}{c} = \frac{2\pi \cdot 10^{-1} \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8} \approx 0,02 = 2 \cdot 10^{-2}$.

Donc $\frac{E_0 \left(\frac{1 - \frac{n^2}{4}}{1} \right)}{E_0} = 1 - \frac{n^2}{4} = 1 - (10^{-2})^2 \approx 1$.

postérieurement chercher l'erreur relative.

De ce fait lorsqu'on assimile le champ à son expression à basse fréquence, on commet une erreur ^{relative} de l'ordre de 10^{-4} .

on peut chercher l'erreur relative $\frac{E(x) - E_0}{E_0} = \frac{x^2}{4} = 10^{-4}$

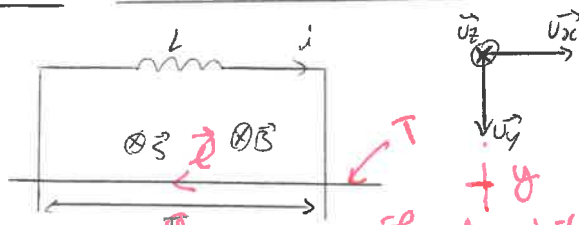
d. $n \ll 1 \Leftrightarrow \frac{r\omega}{c} \ll 1 \Leftrightarrow r\omega \ll c$.

Cette condition s'identifie à la condition de non-relativité du système.

Si on avait eu $r\omega = c$; on aurait eu $\vec{E} = \frac{3}{4} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ (car $n = 1$).

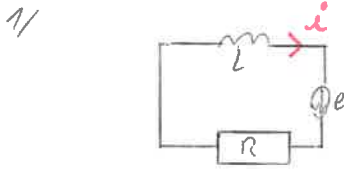
Même, si on se rapproche de c , on ne peut plus considérer dans l'ARQS et il va falloir considérer la propagation des ondes électromagnétique pour une solution exacte.

B



$\vec{B} = B \vec{u}_z$

schéma électrocinétique équivalent



On a la bobine liée au montage, la résistance liée au montage, et la force électromotrice induite par le champ magnétique \vec{B} .

Loi des mailles:

(E) $L \frac{di}{dt} + Ri = e$ or $e = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ et $dS = a dy$

$\Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = -B a \frac{dy}{dt}$ et $\Phi(\vec{B}) = B a y$

$L \frac{di}{dt} + Ri = -B a v$

2) Étude mécanique: système = tige T

- * Force de Laplace } Bilan des actions
- * Poids

On applique le principe fondamental de la dynamique à la tige:

$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{Laplace}} + \vec{P}$

$F_{\text{Laplace}} = i \vec{l} \wedge \vec{B} = i l B \vec{u}_y$ avec $l = a$
 $\vec{P} = + m g \vec{u}_y$

\Rightarrow (M): $m \frac{dv}{dt} = i a B \vec{u}_y + m g \vec{u}_y$

3) On veut des équations en puissance:

$0 = (E) \times i \Leftrightarrow L i \frac{di}{dt} + R i^2 + B a i \frac{dy}{dt} = 0$ et $0 = (M) \times v \Leftrightarrow m v \frac{dv}{dt} - i a B v + m g v = 0$

On voit que dans les deux équations il y a $P_{\text{Laplace}} = i a B v$.

Alors, $L i \frac{di}{dt} + R i^2 = + m g v - m v \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow \frac{d \Sigma E}{dt} + P_J = + P_{\text{poids}} - \frac{d E_c}{dt}$: (P)

$P_{\text{poids}} = P_J + \frac{d}{dt} (E_B + E_c)$
 La puissance du poids est liée formée en effet Joule et fait varier l'énergie magnétique du circuit et l'énergie cinétique de la tige.

4) On cherche (K) une équation différentielle en $i(t)$:

On a: $\frac{dy}{dt} = -\frac{L}{B a} \frac{di}{dt} - \frac{R}{B a} i(t)$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{L}{B a} \frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{R}{B a} \frac{di}{dt}$ et $\frac{dv}{dt} = \frac{i a B}{m} + g$

Alors, $\frac{i\dot{a}B}{m} + \frac{R}{Ba} \frac{di}{dt} + \frac{L}{Ba} \frac{d^2i}{dt^2} = -g$

(=) $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{B^2 a^2}{Lm} i(t) = -g \times \frac{Ba}{L}$

↳ équa. diff d'un système d'ordre 2 en régime transitoire
 ↳ 3 régimes possibles

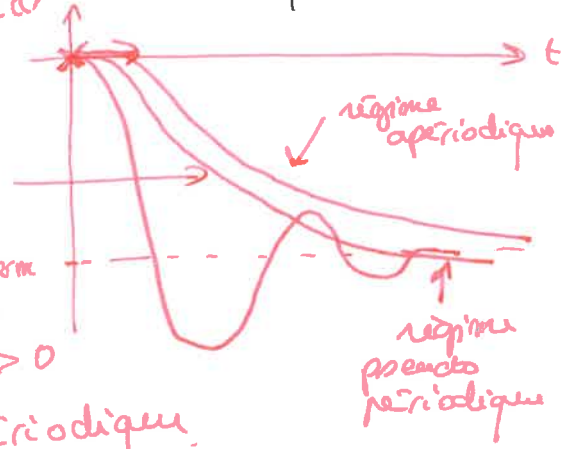
5) Dans le cas de R "très grand" ($\approx 100 \Omega$), on remarque:

$\frac{R}{L} \frac{di}{dt} = -g \frac{Ba}{L} > 0$

Alors, $i(t)$ est affine croissante.

Si R "très grand": dis à l'infini de l'équation caractéristique

(E): $Ri = -Ba v(t)$
 $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{B^2 a^2}{Lm} > 0$
 ⇒ régime aperiodique



Ainsi, on remarque, $v(t)$ une fonction affine décroissante.
en régime permanent

Et de plus, à $t=0$, $v_0 = + \frac{R i_0}{Ba}$ et (E) en régime permanent $R i_0 = -Ba v_0$

et $i_0 = m g \times \frac{1}{Ba} = i_{perm} < 0$

donc $v_0 = + m R g \times \left(\frac{1}{Ba}\right)^2$ oui

Ce couple représente les valeurs du régime permanent, donc du mouvement rectiligne uniforme de la tige. oui

6) Dans le cas de R négligeable, $i(t)$ est solution de:

$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{(Ba)^2}{Lm} i(t) = -g \frac{Ba}{L}$

→ équa. diff d'un oscillateur harmonique.

et $\omega_0^2 = \frac{(Ba)^2}{Lm}$

$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = -g \frac{Ba}{L}$

(=) $\omega_0 = \frac{Ba}{\sqrt{Lm}}$

Alors, $i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + m g \times \frac{1}{Ba}$

et $v(t) = \frac{R i(t)}{Ba} + \frac{L}{Ba} \frac{di}{dt}$

$i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + i_0$

donc $v(t) = \frac{R}{Ba} A \cos(\omega_0 t) + \frac{R}{Ba} B \sin(\omega_0 t) + \frac{R m g}{Ba} + \frac{L}{Ba} (-A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t))$

De plus, $i(0) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0) = 0$ car $(E) \text{ à } t=0$ (3/3)
 $L \left(\frac{di}{dt} \right) (t=0) = -Ba v(t=0) = 0$ car $v(t=0) = 0$.

Donc $A = \frac{+mg}{Ba}$ et $B\omega_0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$

D'où $i(t) = \frac{-mg}{Ba} (1 - \cos(\omega_0 t)) = +i_0 (1 - \cos(\omega_0 t))$

De plus, $\frac{dv}{dt} = \frac{iaB}{m} + g$ (d'après (1))

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-mg a B}{Ba m} (1 - \cos(\omega_0 t)) + g$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = -g (1 - \cos(\omega_0 t)) + g$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \cancel{-g} + g \cos(\omega_0 t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g (\cancel{-1} + \cos(\omega_0 t))$$

Alors, $v(t) = \cancel{g} t + \frac{g}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \underbrace{v(0)}_{=0}$

Enfin, $y(t) = \cancel{\frac{g}{\omega_0^2}} t^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \underbrace{cste}_{y(0)=y=0}$
 $= \frac{g}{\omega_0^2} (1 - \cos(\omega_0 t))$

$$y(0) = \frac{-g}{\omega_0^2} + cste = 0$$

$$cste = \frac{g}{\omega_0^2}$$

On remarque que le mouvement est sinusoidal autour d'une position d'équilibre, ceci est dû à un échange entre les énergies magnétique et mécanique, sans pertes. permanent

$$P_{\text{paids}} = \frac{d}{dt} (E_B + E_C)$$

(il n'y a plus d'effet Joule)

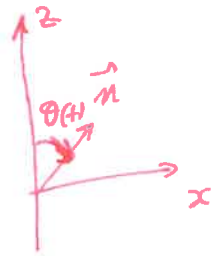
Ex VIII TD10

Groupe 8
Refaites le schéma

$$1) \Phi_{2 \rightarrow 1}(\vec{B}_2) = \vec{B}_2 \cdot \vec{S} \times N_1 = \mu_2 i_2 \mu_0 \vec{u}_z \cdot S \vec{m} \times N_1$$

or $\vec{m} = \sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_z$

donc $\Phi_{2 \rightarrow 1}(\vec{B}_2) = \mu_2 i_2 S N_1 \cos \theta = \Phi_{2 \rightarrow 1}$



2) Comme $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \Phi_{1 \rightarrow 2} = \Phi = \mu_2 S N_1 \cos \theta$

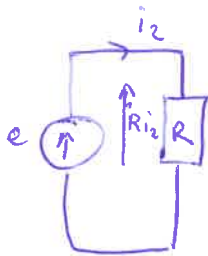
on a $\Phi_{1 \rightarrow 2}(\vec{B}_1) = \Phi_{1 \rightarrow 2} = \mu_2 S N_1 \cos \theta i_1$

d'après Faraday: $e = - \frac{d \Phi_{1 \rightarrow 2}(\vec{B}_1)}{dt}$

$$= - \mu_2 S N_1 i_1 \dot{\theta} (-\sin \theta)$$

$$e = \mu_2 S N_1 i_1 \dot{\theta} \sin \theta$$

3)



On veut que l'impédance de la bobine soit négligeable devant la résistance.

Par loi de maille, on a: $e = R i_2$

4) $\vec{m}_1 = i_1 \vec{S} = i_1 N_1 S \vec{m}$

5) $\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = \vec{m}_1 \wedge \vec{B}_2$

$$= i_1 S N_1 \vec{m} \wedge \mu_2 i_2 \vec{u}_z = i_1 S N_1 \mu_2 i_2 \vec{m} \wedge \vec{u}_z$$

$$= i_1 S N_1 \mu_2 i_2 (\cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u}_x) \wedge \vec{u}_z$$

$$= -i_1 S N_1 \mu_2 i_2 \sin \theta \vec{u}_y$$

or, $e = R i_2$ d'où $i_2 = \frac{e}{R} = \frac{1}{R} \mu_2 S N_1 i_1 \dot{\theta} \sin \theta$

d'où,

$$\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = - \frac{(i_2 S N_1 \mu_2)^2}{R} \dot{\theta} \sin^2 \theta \vec{u}_y$$

Avec l'approximation des petits angles, on obtient: $\sin \theta \approx \theta$

$$\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} = - \frac{(i_2 S N_1 \mu_2)^2}{R} \dot{\theta} \theta^2 \vec{u}_y = -h \dot{\theta} \theta^2 \vec{u}_y \text{ où } h = \frac{(i_2 S N_1 \mu_2)^2}{R}$$

loi de lenz

$\vec{\Gamma}_{2 \rightarrow 1} \odot$ et un couple de rappel couple de Laplace s'oppose au mouvement des vagues

$$6) \theta(t) = A_0 \cos(\omega t) \quad \dot{\theta}(t) = -\omega A_0 \sin(\omega t)$$

$$\Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = -k \dot{\theta} \theta^2$$

$$= +k\omega A_0 \sin(\omega t) A_0^2 \cos^2(\omega t)$$

$$= k A_0^3 \omega \sin(\omega t) \cos^2(\omega t)$$

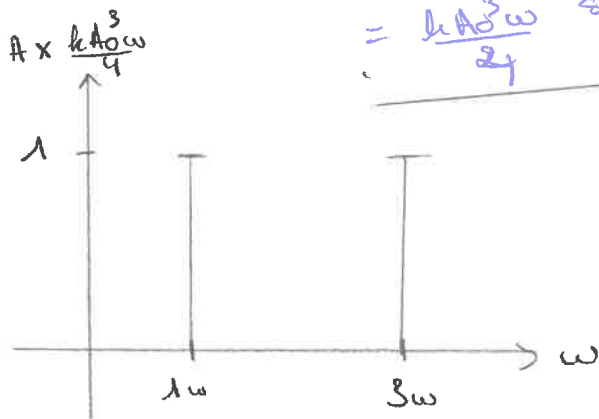
$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$$

$$\bullet \sin(\omega t) \cos(2\omega t) = \frac{1}{2} (\sin(3\omega t) + \sin(-\omega t))$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(3\omega t) - \sin(\omega t))$$

$$\text{Donc, } \Gamma_{2 \rightarrow 1}(t) = \frac{k A_0^3 \omega}{2} \sin(\omega t) + \frac{k A_0^3 \omega}{4} \sin(3\omega t) - \frac{k A_0^3 \omega}{4} \sin(\omega t)$$

$$= \frac{k A_0^3 \omega}{2} \sin(\omega t) + \frac{k A_0^3 \omega}{4} \sin(3\omega t)$$



7) couple de même fréquence que $\theta(t)$

donc la puissance moyenne transférée

$$\text{et } \mathcal{P} = \langle \mathcal{P}(t) \rangle = \left\langle \Gamma \frac{d\theta}{dt} \right\rangle$$

et seule le fondamental assure le transfert de puissance

$$\left\langle \Gamma(3\omega) \cdot \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = 0.$$

donc l'harmonique de rang 3 est à l'entier.