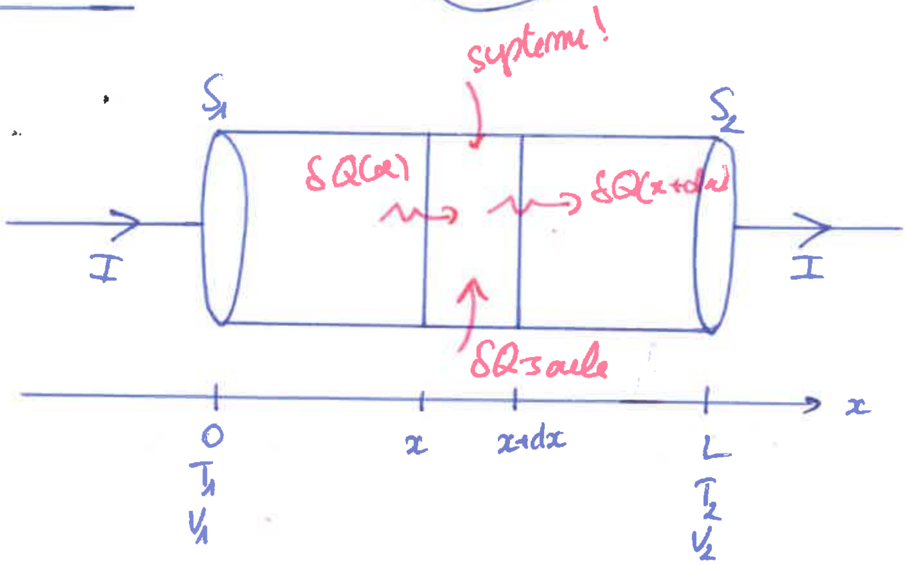
TD 18 : Exercice 1

Grp 1

1.



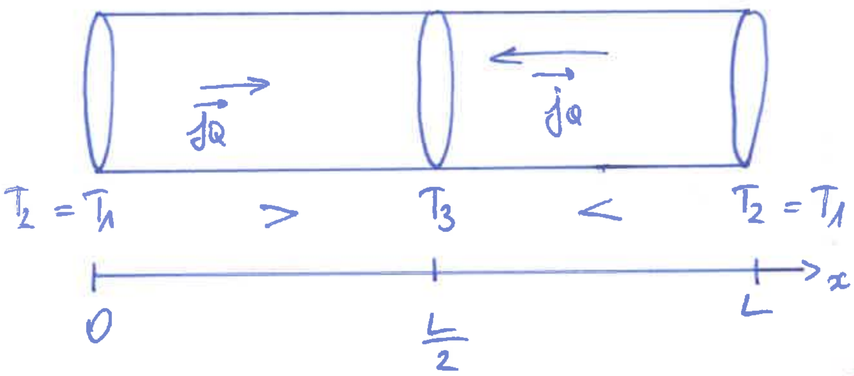
par définition $dP = dR\, I^2$ avec dR la résistance thermique élémentaire du système

$$dR = \frac{1}{\gamma}\frac{dx}{S}$$

$$\Rightarrow dP = \frac{dx}{\gamma S} I^2$$

2. a. La température dans le cylindre n'étant pas uniforme et $T_1 = T_2$ donc il y aura un ~~minimum~~ maximum de température pour $x = \frac{L}{2}$.
→ l'effet Joule "chauffe" le fil.

Et en divisant le cylindre en deux :



→ oui ! Mais il n'y a PAS que de la conduction !

B

Effet Joule →
1er principe en régime stationnaire $dU = 0$

$\delta Q = \delta Q_{conduction} + \delta Q_{Joule}$

$0 = \delta Q(x) - \delta Q(x+dx) + \delta Q_{J}$

$0 = j_Q(x)S - j_Q(x+dx)S + \frac{dx\, I^2}{\gamma S}$

$0 = -\lambda \frac{d^2T}{dx^2} S\, dx + \frac{dx\, I^2}{\gamma S}$

pour $x \in [0, \frac{L}{2}]$:

en régime stationnaire $P = cste = j_Q \cdot S$

$P = -\lambda \frac{dT}{dx} S$ d'après la loi de Fourier
conduction(s)

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{P}{\lambda S} \Rightarrow T(x) \text{ est une } \cancel{\text{fonction affine de pente } -\frac{P}{\lambda S}}$$

décroissante

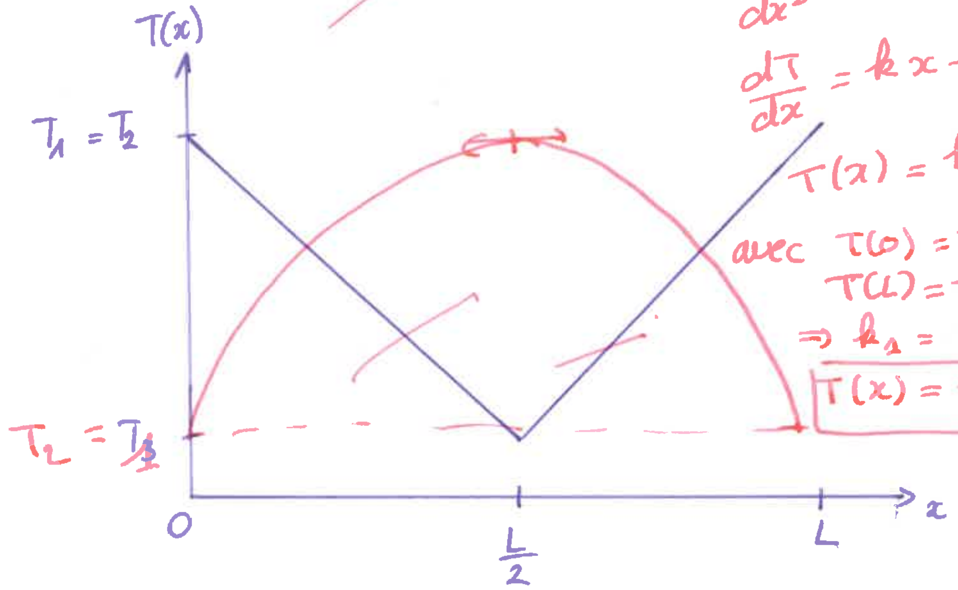
→ $P(x) - P(x+dx) + P_{Joule} =$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{I^2}{\lambda \gamma S^2} = k$$

De même pour $x \in [\frac{L}{2}, L]$: $T(x)$ est une fonction affine croissante de pente $\frac{P}{\lambda S}$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = k$$

$$\frac{dT}{dx} = kx + k_1$$



$$T(x) = \frac{kx^2}{2} + k_1 x + k_2$$

avec $T(0) = T(L) = T_1 = k_2$

$T(L) = T_1 = \frac{kL^2}{2} + k_1 L + T_1$

$\Rightarrow k_1 = -\frac{kL}{2}$

$$\boxed{T(x) = k\frac{x^2}{2} + T_1 - k\frac{L}{2}x}$$

↳ fonction parabolique

le max en $x = \frac{L}{2}$

pour $x = 0$ et $x = L$: $T(0) = T(L) = 273K = T_{1}$ car la temperature est inférieure pour tout les autres points

pour $x = \frac{L}{2}$: on a $\frac{dT}{dx} = -\cancel{\frac{P}{\lambda S}} = 0$ → cas max.

$$\Rightarrow \frac{T(x=0) - T_3}{0 - \frac{L}{2}} = -\frac{P}{\lambda S} \Rightarrow T_3 = -\frac{P}{\lambda S}\frac{2}{L} + T(x=0)$$

$T_1 = T_2$

$$\frac{dT}{dx} = k\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

b. les flux thermiques sortant des sections terminales sont ~~nul~~ car le cylindre est dans un milieu parfaitement isolant.

$P(x=L) = j_Q(x=L)S = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)(L)S = -\lambda\left[kL - \frac{kL}{2}\right]S$

$P(x=0) = j_Q(x=0)S = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)(0)S \quad = +\lambda\left[\frac{I^2 L}{\gamma S^2 2}\right]S$

$= +\lambda k\frac{L}{2} = -\frac{I^2 L}{2\gamma S}$ → $-P(x=0) + P(x=0) = \frac{I^2 L}{\gamma S} = RI^2$

→ puissance Joule

TD 18

FRANCISCO Mathias
YENI Serhat
VUILLEMIN Célia

Exercice 2 : chauffage d'une voiture de TGV

Bien rattrapé ! des erreurs corrigées ensuite
Bonne rédaction.

1. Les valeurs des coefficients conducto-convectif verre l'air sont différents ~~car~~ pour l'extérieur et l'intérieur de la voiture car l'air ~~est~~ renouvelée, comme présenté ~~figure 12.~~ $h_i < h_e$ → conducto convection (F) forte à cause du mouvement du train.

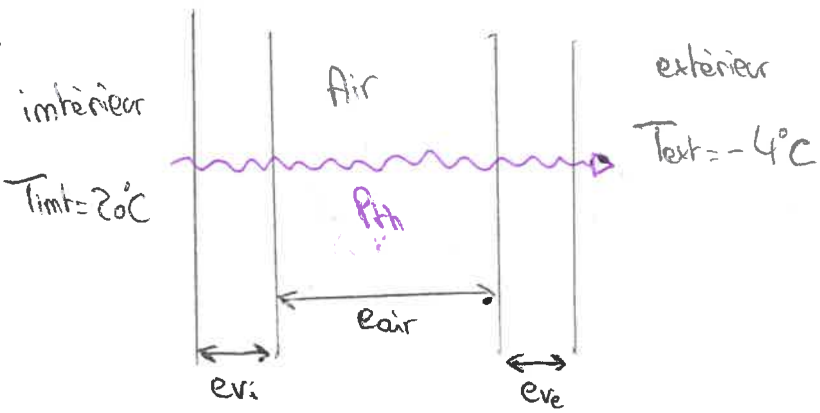
2. La situation qui nécessite le $\mathcal{P}_{ch}$ le plus grand correspond à la voiture vide car chaque passager émet une chaleur corporelle propre, sans cette chaleur la puissance $\mathcal{P}_{ch}$ à fournir est maximum.) B

non ! elles sont soumises à la même différence de T ⇒ associées en //!

3. Les 12 vitres sont parcourues par la ~~même~~ ~~puissance~~ thermique, on peut donc les associer en série.

$\boxed{\text{Pour une vitre :}}$ oui : association série

1 Vitre :



• $R_{th\,totale} = R_{th\,c.c\,ext} + R_{th\,c.c\,int} + R_{th\,verre}$

$$* \; R_{th\,c.c\,ext} = \frac{1}{h_e . S_v} = \frac{1}{h_e . L_v . H_v}$$

A.N $R_{th\,c.c\,ext} = \frac{1}{25.(2000.10^{-3} + 840.10^{-3})} \simeq 0{,}014 \; K.W^{-1}$

De même, $* \; R_{th\,c.c\,int} = \frac{1}{h_i . L_v . h_v} = \frac{1}{8.(2000+840).10^{-3}} = 0{,}044 \; K.W^{-1}$

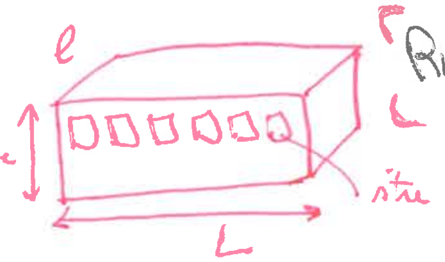
$$* \; R_{th\,verre} = \frac{1}{\lambda_v} . \frac{e_v}{L_v . H_v} = \frac{1}{1{,}15} . \frac{4.10^{-3}}{(2000+840).10^{-3}} \simeq 1{,}23.10^{-3} \; K.W^{-1}$$

Or, il y a ~~6~~ 12 vitres, donc $R_{th\,vitres} = 6 \times (R_{th\,totale\,v}) = 6 \times (0{,}014 + 0{,}044 + 1{,}22.10^{-3})$ → dans la voiture

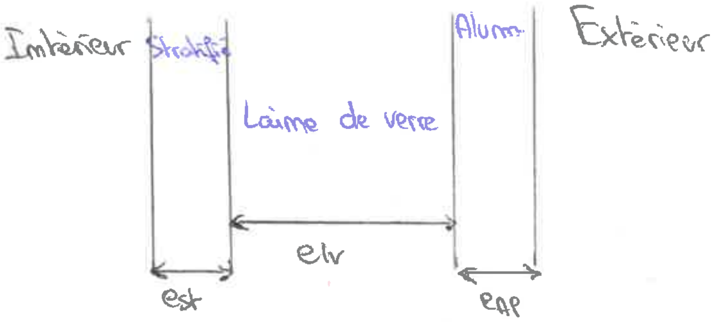
$$\frac{1}{R_{th\,vitre}} = \frac{12}{R_{th\,1\,vitre}}$$

$R_{th\,vitres} \simeq 3{,}5.10^{-1} \; K.W^{-1}$

fais 1 schéma de la voiture



* 1 paroi



• Les parois sont soumises à la même différence de température, on peut ainsi les associer en parallèles. De plus, les différentes couches du murs sont associés en série car soumis à la même puissance thermique.

$$\boxed{R_{th\,totale\,p} = R_{th\,AP} + R_{th\,lv} + R_{th\,st}}$$

$$* \; R_{th\,AP_1} = \frac{1}{\lambda_{AP}} \cdot \frac{e_{AP}}{(L \times h - 6L_f l_f)} = \frac{1}{237} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2100 \cdot 10^{-3} \times 22500 \cdot 10^{-3}} \simeq 3{,}57 \cdot 10^{-7} \; K.W^{-1}$$

attention ! il faut retirer à 1 paroi la surface des 6 vitres

$$* \; R_{th\,lv_1} = \frac{1}{\lambda_{lv}} \cdot \frac{e_{lv}}{L \times h - 6L_f l_f} = \frac{1}{0{,}051} \cdot \frac{24 \cdot 10^{-3}}{2100 \cdot 10^{-3} \cdot 22500 \cdot 10^{-3}} \simeq 9{,}96 \cdot 10^{-3} \; K.W^{-1}$$

$$* \; R_{th\,st_1} = \frac{1}{\lambda_{st}} \cdot \frac{e_{st}}{(L \cdot h - 6L_f l_f)} = \frac{1}{} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{2100 \cdot 10^{-3} \cdot 22500 \cdot 10^{-3}} \simeq 8{,}47 \cdot 10^{-5} \; K.W^{-1}$$

Ces calculs représentent la résistance d'un mur (résistance en série), il faut multiplier la résistance du mur par deux pour avoir le mur parallèle. ce sont les inverses qui s'ajoutent

$$R_{th\,mur_1} = \cancel{2\times}\left(R_{th\,AP_1} + R_{th\,lv_1} + R_{th\,st_1}\right) = \cancel{2\times}\left(3{,}57 \cdot 10^{-7} + 9{,}96 \cdot 10^{-3} + 8{,}47 \cdot 10^{-5}\right)$$

$$\boxed{R_{th\,mur\,1} = \cancel{1{,}00 \cdot 10^{-2}} \; 1{,}28 \cdot 10^{-2} \; K.W^{-1}}$$

(enlever les fenêtres)

• Sur le même raisonnement, pour les ~~murs~~ sol et toit de surface $S = \ell \times L$:

$$R_{th\,mur_2} = \cancel{2\times}\left(R_{th\,ae_2} + R_{th\,lv_2} + R_{th\,st_2}\right) = \cancel{2\times}\left(2{,}70 \cdot 10^{-7} + 7{,}52 \cdot 10^{-3} + 6{,}39 \cdot 10^{-3}\right)$$

$$\boxed{R_{th\,\cancel{mur_2}\,sol,toit} = \cancel{1{,}39 \cdot 10^{-2}} \; K.W^{-1}} = 7{,}59 \cdot 10^{-3} \; K.W^{-1}$$

• Enfin pour les ~~2~~ parois de surface $S = \ell \times h$: → parois latérales du wagon

$$R_{th\,murs\,3} = \cancel{2}\times\left(R_{th\,AP_3} + R_{th\,lv_3} + R_{th\,st_3}\right) = \cancel{2\times}\left(2{,}90 \cdot 10^{-6} + 8{,}06 \cdot 10^{-2} + 6{,}85 \cdot 10^{-4}\right)$$

$$\boxed{R_{th\,mur\,3} = 8{,}13 \cdot 10^{-2} \; K.W^{-1}}$$

Mathias
Serhat
Célia

• En parallèle, les conductances s'ajoutent : ~~ai~~

$$G_{th\,parois} = 2 \times G_{th\,mur\,1} + 2 \times G_{th\,mur\,2} + 2 \times G_{th\,mur\,3}$$

$$= \frac{2}{R_{th\,mur\,1}} + \frac{2}{R_{th\,mur\,2}} + \frac{2}{R_{th\,mur\,3}}$$

B

A.N : $G_{th\,parois} = 3{,}68 \cdot 10^{2}\ W \cdot K^{-1}$

De plus, les 12 vitres sont elles aussi en parallèles, donc : ~~ai~~

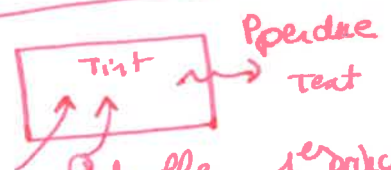
$$G_{tot} = \frac{12}{R_{th\,vitres}} + G_{th\,parois} = \frac{12}{3{,}5 \cdot 10^{-1}} + 3{,}68 \cdot 10^{+2} \simeq 4{,}02 \cdot 10^{2}\ W \cdot K^{-1}$$

• Donc $R_{th\,tot} = \frac{1}{G_{tot}} = \frac{1}{4{,}02 \cdot 10^{2}} \simeq \cancel{2{,}49 \cdot 10^{-3}}\ K \cdot W^{-1}$

$2{,}20 \cdot 10^{-3}\ K \cdot W^{-1}$

4. $R_{tot} = \frac{T_2 - T_1}{\cancel{P_{tot}}\ P_{perdue}}$ avec $P_{\cancel{tot}\ perdue} = P_{air\,neuf} + P_{ch}$

système = 1 wagon



$P_{air\,neuf}$ $P_{chauffe}$ 1er principe
→ en régime stat. ~~onn caire~~ $\Delta U = 0$
$P_{perdue} = P_{air\,neuf} + P_{ch}$

$\Rightarrow P_{ch} + P_{air\,neuf} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}}$

$\rightarrow P_{ch} = \frac{T_2 - T_1}{R_{tot}} - P_{air\,neuf}$ avec $P_{air\,neuf} = D_m \cdot C_p (T_{int} - T_{ext})$
$= D_v \cdot \rho_{air} \cdot C_p (T_{int} - T_{ext})$

$\bullet P_{ch} = \frac{20 + 4}{\cancel{2{,}49 \cdot 10^{-3}}} - 2100 \cdot 1{,}2 \cdot 1000 \cdot (20 + 4)$

$= \cancel{+6{,}05 \cdot 10^{7}\ W}$ → valeur prise algébriquement.

en fait on cherche $P_{air\,neuf} + P_{chauffe} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{tot}}$
$= 10{,}9\ kW$.

5. Avec une voiture pleine de passagers :

$P_{tot} = P_{ch} + P_{air\,neuf} + P_{pass\,tot}$

Avec $P_{pass\,tot}$ = Nombre de places assises × P_{pass}

$= 50 \times 60 = 3\,000\ W$

7.

$$\Rightarrow P_{ch} = \frac{T_2 - T_1}{R_{tot}} - P_{air\,neuf} - P_{pass\,tot}$$

$$= \frac{20+4}{2{,}49.10^{-3}} - 2100 \cdot 1{,}2 \cdot 1000\,(24) - 3000$$

$$= \cancel{6{,}05.10^{7}\ W}$$

Ici la valeur reste la même, les 3000 W sont négligeables.

Rem: problème de signe de Pch.

↳ car on veut Pch + Pair neuf

$$P'_{ch} = P_{ch} - 50\,P_{passager}$$

$$= 10{,}9 - 3 = 7{,}9\ kW$$

Exercice 3 - TD 18 - Groupe 2

faits 1 schéma !

1. Système : $\{$cylindre infinitésimal$\}$

$dU = \delta Q_{cond}$ → 1er principe. on peut utiliser directement $dU = 0$ car régime stationnaire.

$\Leftrightarrow \quad dm\, c\, dT = \delta Q(r) - \delta Q(r+dr)$

$\Leftrightarrow \quad \mu S dr c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt = j_Q(r)\, 2\pi r L\, dt - j_Q(r+dr)\, 2\pi (r+dr) L\, dt$

$\Leftrightarrow \quad \mu c \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r j_Q}{\partial r}\right)$

Loi de Fourier :

$$\Rightarrow \quad \mu c \left(\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}\right) = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

0 car on est en régime stationnaire.

Donc $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ Ne pas développer

Par résolution de l'équa-diff : $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \longleftarrow \quad r\frac{dT}{dr} = A$$

On intègre $\frac{dT}{dr}$. ce qui donne $T(r) = A\ln(r) + B$.

2. $j(r) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda \times -\frac{A}{r} = \frac{\lambda A}{r}$ $\quad j(r) \times S(r) = \frac{\lambda A}{r} \times 2\pi r L$

D'après la loi de Fourier

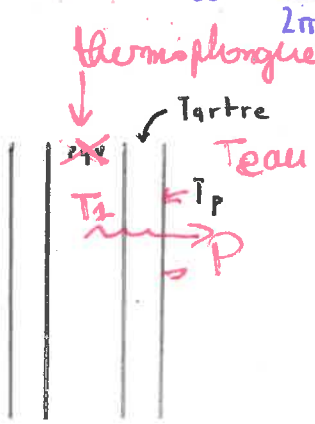
3. $R_t = \frac{-T_p + T_1}{P}$ $\quad T_1 > T_p$ $\quad = \frac{T_p - T_1}{j(r)S(r)} = \frac{T_p - T_1}{-\lambda A\, 2\pi L}$. oui car

4. $\Phi_{t\to e} = \int j_{cc}\, dS$

$$\Leftrightarrow \quad 2\pi(r_0 + e) L h (T_p - T_e) = j_{cc}\int dS$$
$$= P_{cc}$$

On a $R_{cc} = \frac{\cancel{T_p - T_e}}{2\pi(r_0+e)Lh(\cancel{T_p - T_e})} = \frac{1}{2\pi(r_0+e)Lh}$.

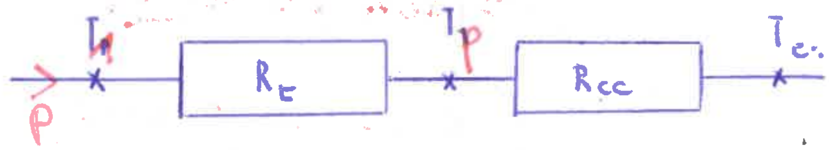
5.



Cela s'apparente à des résistances en série car parcourues par la même puissance thermique

donc $R_{eq} = R_t + R_{cc}$

En effet:



6. $e_{min}\,(r_0 = 1{,}0\text{ cm})$: $\frac{d}{h} < r_0$ $\qquad R_{eq} \approx 0{,}55\ K.W^{-1}$

$\simeq 0{,}5\, r_0$ $\qquad$ (→ Par lecture graphique)

$= 0{,}5$ cm ||

$e_{min}\,(r_0 = 0{,}8\text{ cm})$: $\qquad R_{eq} = 0{,}40\ K.W^{-1}$

$= 0{,}25\, r_0$ $\qquad \frac{d}{h} > r_0$

$= 0{,}2$ cm ||

$e_{min}\,(r_0 = 0{,}5\text{ cm})$: $\qquad R_{eq} = 0{,}32\ K.W^{-1}$

$= \cancel{0{,}2 \times r_0}$ $\simeq 0$ car Réq(r0) est toujours croissante

$= \cancel{0{,}1\text{ cm}}$ ||

si $e > e_{min}$

7. On voit d'après le graphique que la resistance thermique augmente quand l'épaisseur du tartre augmente la temperature du thermoplongeur augmente jusqu'a la surchauffe. Pour éviter la surchauffe on prend $r_0 < \frac{\lambda}{h}$ pour éviter une trop grosse resistance termique. B

8. Exprimer D en fonction de λ, μ, c.

$$[D] = \frac{\lambda}{\mu c} = \frac{W.m^{-1}.\cancel{K^{-1}}}{\cancel{kg}.m^{-3}.J.kg^{-1}.\cancel{K^{-1}}} \Rightarrow m.s^{-1}$$ oui

9. $D = \frac{L^2}{\tau}$

$$\frac{\tau_a}{\tau_t} = \frac{D_t}{D_a} = \frac{d_t}{d_a} \times \frac{\mu_a}{\mu_t} \times \frac{c_a}{c_t} = \frac{0{,}9}{15} \times \frac{500}{900} \times \frac{8000}{2500}$$

$= 0{,}1$

$\tau_a = \frac{L^2}{D_a}$ $\qquad$ AN: $\tau_a = \dfrac{(50 \times 10^{-2})^2}{\left(\dfrac{15}{8000 \times 500}\right)} = \dfrac{2000}{3} = 6{,}6 \times 10^{4}$ s.

avec $L_a \simeq r_0$

$\tau_t = \frac{L^2}{D_t}$ $\qquad$ AN: $\tau_b = \dfrac{(50 \times 10^{-2})^2}{\left(\dfrac{0{,}9}{2500 \times 900}\right)} = 6{,}3 \times 10^5$ s.

avec $L_t = e = r_0$

Donc $\tau_a/\tau_b = \dfrac{6{,}6.10^4}{6{,}3.10^5} = \cancel{1{,}0 \times 10^{-2}}$ 0,1

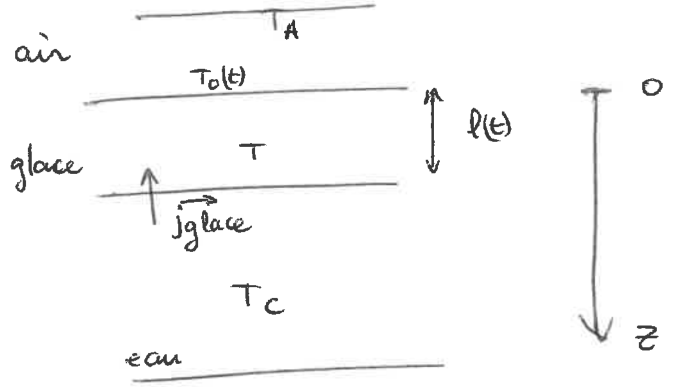
TD 18 Ex IV

TB

Groupe 8

1) T_c correspond à la température de congélation donc $T_0 = 0\,°C$

2)



L'eau, l'air et la glace sont traversés par la même puissance thermique et ~~non~~ pas la même différence de température donc ils peuvent être associés en série.

3) En appliquant le premier principe à une couche de glace d'épaisseur dz et en négligeant la capacité thermique massique de celle-ci, on obtient :

$$\delta Q_{conduction} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

(équation de diffusion de la chaleur avec T ne dépendant que de z)

$$\Rightarrow T(z,t) = Az + B$$

Or $T(z=0^-) = T(z=0^+) = T_0(t) = B$

$T(\ell(t)) = T_c$

Ainsi on trouve $\boxed{T(z,t) = \frac{T_c - T_0(t)}{\ell(t)} z + T_0(t)}$

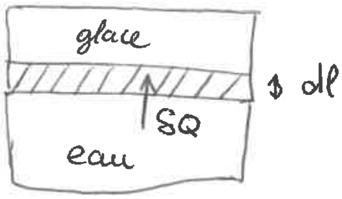
où T est ~~es~~ une fonction affine.

De plus, $\vec{j}_{glace} = -\lambda \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \frac{dT}{dz} \vec{u}_z$

$$\boxed{\vec{j}_{glace} = -\lambda \frac{T_c - T_0(t)}{\ell(t)} \vec{u}_z}$$

4)

a)



Comme l'altitude de l'interface glace / air est constante la ~~transformation~~ va avoir lieu à l'interface eau / glace.
congélation de la glace

Application du 1er principe à un élément d'épaisseur dl pendant dt :

eau(l) → glace

$$dH = \delta Q_{\text{reçue par la glace}} = -\delta Q_{\text{dégagée par l'eau}} = -\rho L S dl$$

b) $\Rightarrow$

$$-\rho L S dl = \phi(\vec{j_g})\,dt$$

$$-\rho L S dl = -\lambda \frac{T_c - T_0(t)}{l(t)} S\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho L}{\lambda} \frac{dl}{dt} = \frac{T_c - T_0}{l(t)}}$$

c) ~~Comm~~ Les milieux sont en série donc

$$h(T_0(t) - T_A)S = \phi(\vec{j}_{glace})$$

$$h(T_0(t) - T_A) = \frac{\lambda(T_c - T_0(t))}{l(t)}$$

$$T_0(t) = \frac{\frac{\lambda T_c}{l(t)} + hT_A}{h + \frac{\lambda}{l(t)}} = \frac{\lambda T_c + l(t) h T_A}{l(t) h + \lambda}$$

d) En injectant l'expression de $T_0(t)$, on a :

$$\frac{\rho L}{\lambda}\,\ell(t)\,\frac{d\ell}{dt} = T_C - \frac{(\lambda T_C + \ell(t) h T_A)}{\ell(t) h + \lambda}$$

$$\frac{\rho L}{\lambda}\,\cancel{\ell(t)}\,\frac{d\ell}{dt} = \frac{\cancel{\ell(t)} h\,(T_C - T_A)}{\ell(t) h + \lambda}$$

On note $\underline{B = \dfrac{\rho L}{h(T_C - T_A)\lambda}}$ $\quad [B] = \cancel{\dfrac{g\cdot m^{-3}\cdot J\cdot g^{-1}}{J\cdot s^{-1}\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}\times K\times J}} = s\cdot m^{-1}$

Ainsi on a : $\underline{\dfrac{d\ell}{dt} = \dfrac{1}{B}\,\dfrac{1}{(\ell(t) h + \lambda)}}$

5) $$\int_0^{\ell(t)} (\ell(t) h + \lambda)\, d\ell = \int_0^t \frac{dt}{B}$$

$$\frac{\ell^2(t) h}{2} + \lambda \ell(t) = \frac{t}{B}$$

donc $$\boxed{t = B\,\ell(t)\left(\frac{\ell(t) h}{2} + \lambda\right)}$$

A.N : $$B = \frac{0{,}9 \times 334}{\frac{2{,}5\times 25}{(3600)^2}\,(273 - 253)} = 3{,}1 \times 10^{6}\ \cancel{s\cdot m^{-1}}\ K\cdot s^2\cdot J^{-1}$$

$$t = 3{,}1\times 10^6 \times 1\left(\frac{1\times 2{,}5}{2\times 3600} + \frac{25}{3600}\right)$$

$\underline{t = 6{,}3 \text{ heures}}$ oui

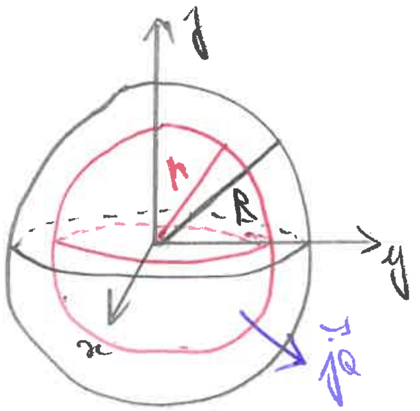
$$T_0(t) = \frac{25\times 273 + 1\times 2{,}5\times 253}{1\times 2{,}5 + 25} = 271\ K$$

$\underline{= -2\ °C}$

TB

⚠ des confusions dans les méthodes d'intégration.

1) La puissance thermique sortant de la terre est la puissance thermique de conduction.



$$P_{th} = \Phi(\vec{j_Q}) = \iint_S \vec{j_Q}\, dS = j_Q \cdot 4\pi r^2$$

donc $j_Q = \dfrac{P_{th}}{4\pi r^2}$

D'après la loi de Fourier, $\vec{j_Q} = -\lambda\, \vec{\text{grad}}\, T$ T ne dépend que de r.

⚠ fonction dérivable

donc $j_Q(R) = -\lambda \dfrac{dT}{dr}(R) = -\lambda \dfrac{\Delta T}{\Delta r} = +\lambda \times \dfrac{1}{32} = +\lambda K$ vrai uniquement à la surface de la terre

$$\boxed{K = +\frac{1}{32}}$$

⚠ on est en conduction radiale donc $j_Q(r)$

On calcule la puissance thermique libérée à l'intérieur de la terre. pour une sphère de rayon r :

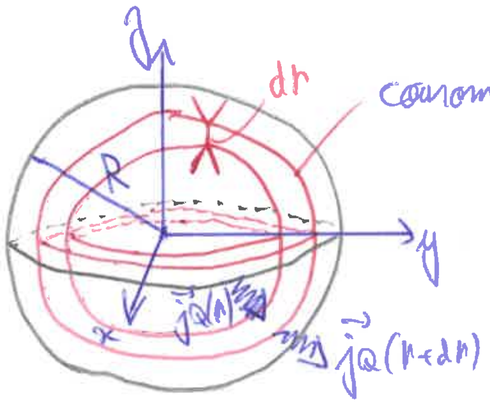
$$P_{th}(R) = p_v \cdot V(R) = p_v \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = j_Q(R)\, S(R)$$

Si la température de la terre est constante, le régime est stationnaire,

et $P_{th\,libérée} = P_{th\,\text{~~conduction~~}} = P_{th} = P_{th}(R)$

alors, $p(R) = \dfrac{3 P_{th}}{4\pi R^3} = \dfrac{3\, j_Q \cdot 4\pi r^2}{4\pi R^3} = \dfrac{3 j_Q}{R} = \boxed{\dfrac{+3\lambda K}{R}}$

↳ il faut bien comprendre qu'on se place en $r = R$



couronne sphérique d'épaisseur dr

volume de la couronne sphérique
= surface x épaisseur
= $\boxed{4\pi r^2 \times dr}$

Bilan thermique à la couronne sphérique (syst élémentaire)

1er principe : $dU + d\cancel{E_m} = \cancel{\delta W} + \delta Q$

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_{\text{créé}}$$
$$= \delta Q(r) - \delta Q(r+dr) + \delta Q_{\text{créé}}$$
$$\cancel{= \left(j_Q(r) - j_Q(r+dr)\right)}$$
$$= \left(j_Q(r) S(r) - j_Q(r+dr) S(r+dr)\right) dt + p \times \text{Volume} \times dt$$
$$= \left(j_Q(r)\, 4\pi r^2 - j_Q(r+dr)\, 4\pi (r+dr)^2\right) dt + p\, 4\pi r^2 dr\, dt$$
$$= -\left(\frac{\partial r^2 j_Q}{\partial r}\right) 4\pi\, dr\, dt + p\, 4\pi r^2 dr\, dt$$
$$= \left(p r^2 - \left(\frac{\partial r^2 j_Q}{\partial r}\right)\right) 4\pi\, dr\, dt$$

$dU = C\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) dt = 0$ (régime stationnaire)

donc $\left(p r^2 - \frac{\partial r^2 j_Q}{\partial r}\right) 4\pi\, dr\, dt = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial r^2 j_Q}{\partial r}\right) = p r^2$

$$\boxed{\frac{d\, r^2 j_Q}{dr} = p r^2}$$

B

donc $d r^2 j_Q = \rho r^2 dr$

On intègre.

$$\int_0^r d r^2 j_Q = \int_0^r \rho r^2 dr$$

mauvais choix, on vous demande de donner l'expression de $j_Q(r)$ à 1 constante près ⇒ prendre une primitive + cont

$$\Leftrightarrow [r^2 j_Q]_0^r + cte = \rho\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^r \cancel{+ cte'}$$

pas de constante lorsqu'on intègre entre des bornes.

$$\Leftrightarrow r^2 j_Q(r) = \rho \frac{r^3}{3} + C$$

ou direct

$$\Leftrightarrow \boxed{j_Q(r) = \frac{\rho r}{3} + C/r^2}$$

3) Loi de Fourier : $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dr}$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{j_Q}{\lambda} \Leftrightarrow \int_0^T dT = -\frac{1}{\lambda}\int_0^r j_Q\, dr$$

même remarque

$$\Leftrightarrow T = -\frac{1}{\lambda}\int_0^r \left(\frac{\rho r}{3} + \frac{C}{r^2}\right) dr \quad + cte \quad = \cancel{-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho r^2}{6} + C \times r\right) + C'}$$

$$\boxed{T(r) = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho r^2}{6} \mp \frac{C}{r}\right) + C'}$$

$\lim_{r \to 0}$ $T(r)$ est une grandeur finie ⇒ $C = 0$.

$$T(6400.10^3) = 298 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho(6400.10^3)^2}{6} \cancel{+ C(6400.10^3)}\right) + C' = 298$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C' = 298 + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho(6400.10^3)^2}{6} \cancel{+ C(6400.10^3)}\right)}$$

4) ~~au centre de la terre~~, $T = T(0)$ $\cancel{\boxed{T(0) = C'}}$

$$T(R) = T_0 = -\frac{\rho R^2}{6\lambda} + C'$$

$$C' = -\frac{\rho R^2}{6\lambda} + T_0 \qquad \text{avec } \rho = \frac{3\lambda K}{R}$$

$$C' = T_0 - \frac{1}{2} K R$$

et $\boxed{T(r) = \frac{1}{2} K \left(\frac{r^2}{R} - R \right) + T_0}$

4) $T(r=0) = \frac{KR}{2} + T_0$

$$= \underbrace{\frac{6\,400 \times 10^3}{2 \times 32}} + T_0$$

$$= 10^5 \text{ K} \quad (+T_0)$$

$\simeq$

négligeable !

un peu fort !

groupe 5 – TD 18, exercice 6

(1) On modélise $T_{sol}(t)$ par une fonction sinusoïdale de la forme :

$$T_{sol}(x,t) = T_{moy} + A e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

or dans notre cas T_{sol} ne dépend que de t donc on note :

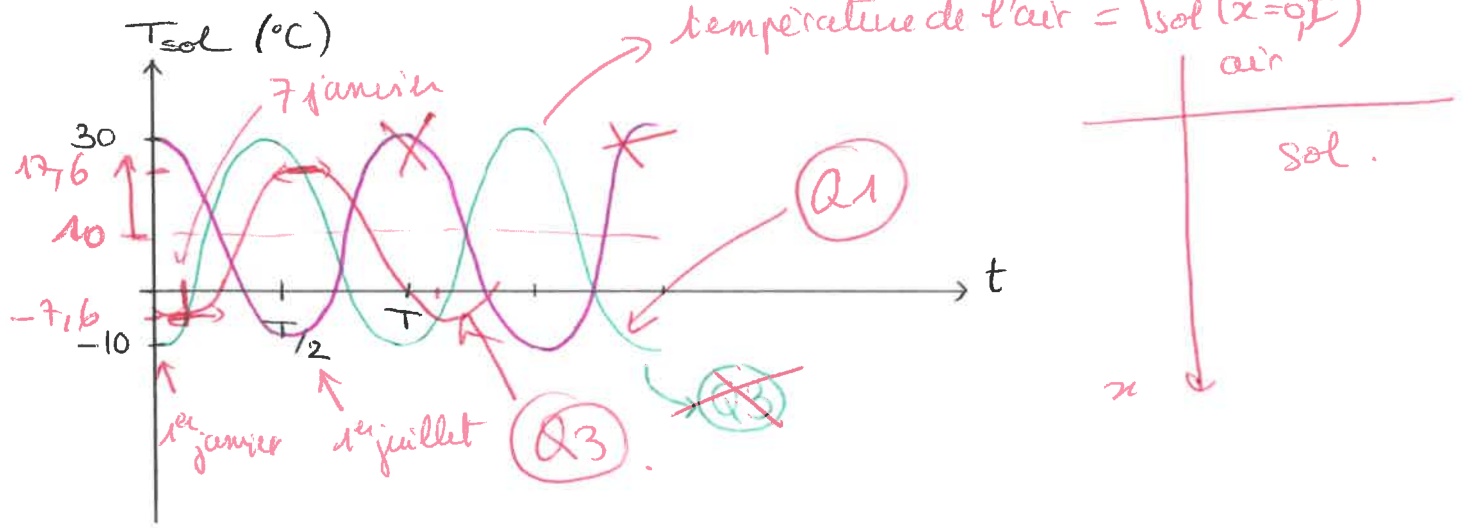
$$T_{sol}(t) = T_{moy} + A \cos(\omega t)$$

préciser juste que vous cherchez $T(x=0,t)$

avec $T_{moy\ air} = \dfrac{T_{max} + T_{min}}{2} = \dfrac{30 + (-10)}{2} = 10°C$ et $A = \dfrac{30 + 10}{2} = 20°C$

et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ avec $T = 1an$

Traceront



(2) Reprenons $T_{sol}(x,t) = T_{moy} + \underbrace{Ae^{-\frac{x}{\delta}}}_{B} \cos\left(\omega t - \underbrace{\frac{x}{\delta}}_{\varphi}\right)$

À la profondeur $x = 2m$,

$B = 20 \times e^{-2/16} = 17,65\ °C$

$\varphi = \dfrac{2}{16} = 0,125$ ~~m~~ rad.

$T_{sol}(x,t)$ est minimale quand $\cos(\omega t - \varphi) = -1$,

donc $\boxed{T_{sol\,min}} = T_{moy} + B \times (-1)$
$= T_{moy} - B$
$= 10 - 17,65$
$= \boxed{-7,65\,°C}$

les ondes thermiques se propagent à la vitesse v telle que $\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\delta\omega}\right)\right) = \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right)$

donc $v = \delta\omega = \frac{16 \times 2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 3,2 \cdot 10^{-6}\,m.s^{-1}$

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

donc le minimum arrive en $x = 2\,m$ à $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{2}{3,2 \cdot 10^{-6}} = 6,27 \times 10^5\,s = 7,2$ jours

soit le 7 janvier

~~Cherchons à quelle date cela correspond :~~

~~$\cos(\omega t - \varphi) = -1 \iff \omega t - \varphi = \pi$~~
~~$\iff t = \frac{\pi + \varphi}{\omega}$~~

~~AN : $t = \frac{\pi + 0,125}{\frac{2\pi}{365}} = 190$ jours $\approx$ 6 mois~~

~~↳ aux alentours de début juin (très incohérent)~~

③ voir graphe, tracé ~~vert~~ rouge.

④ On a maintenant $T = 1$ jour et toujours $x = 2\,m$,
avec cette période, δ va diminuer car dépend de T.
Ainsi B (l'amplitude) diminue aussi et est quasiment négligeable.
Donc les variations de températures quotidiennes sont fortement absorbées par le sol.

↳ dans le cours on a montré que $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$

pour l'alternance jour-nuit $\delta' = \sqrt{\frac{2D}{\omega'}}$

$\delta' = \delta\sqrt{\frac{T'}{T}} = 16 \times \sqrt{\frac{1}{365}} = 0,84\,m.$

$B' = Ae^{-x/\delta'} = 20 \times e^{-2/0,84} = 1,8\,°C$) → faible variation de température

et $v' = \delta'\omega' = \frac{0,84 \times 2\pi}{24 \times 3600} = 6,1 \times 10^{-5}\,m.s^{-1}$

$\Delta t' = 3,3 \times 10^4\,s = 9\,j \gg T'$

↳ n'a pas de sens.