

APPLICATIONS DIRECTES**1. Rappels des notions fondamentales sur la diffusion particulière :**

1. Quelles sont les conditions nécessaires pour observer le phénomène de diffusion particulière ?
2. Définir le vecteur densité de courant particulière.
3. Enoncer la loi de Fick, identifier tous les termes et donner les unités.
4. Démontrer l'équation locale de la diffusion, reliant la dérivée de la densité moléculaire par rapport au temps, à sa dérivée seconde par rapport à la position.

2. Diffusion de la vapeur d'eau :

1. On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait. Calculer un ordre de grandeur de la concentration molaire C_0 de l'eau sous forme de vapeur pour une pression de 1 bar et la température de 100°C. $R = 8,31$ SI.

Un long tube vertical ouvert, de section $S = 12\text{cm}^2$, est maintenu sur une cuve à eau où l'eau est portée à ébullition, la pression étant égale à 1 bar. L'extrémité supérieure du tube est à la hauteur $h=90$ cm au-dessus de la surface libre de l'eau. Lorsque la vapeur d'eau, assimilée à un gaz parfait, s'évapore à travers le tube à la température supposée constante de 100°C, on suppose qu'il s'établit un régime stationnaire de diffusion.

Soit $\vec{j}_N$ le vecteur densité de flux molaire et D le coefficient de diffusion.

2. Faire un schéma. A quel endroit du tube la concentration en vapeur d'eau est-elle maximale ? Dans quelle direction et quel sens se déplacent les molécules de vapeur d'eau ? En déduire la direction et le sens de $\vec{j}_N$. Quelles sont les unités de j_N , vecteur densité de flux molaire ?
3. Sachant que la masse d'eau évaporée est de 90 mg par heure, déterminer un ordre de grandeur de la valeur de j_N dans le tube. $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g.mol}^{-1}$.
4. On rappelle que le régime stationnaire est atteint dans le tube. Montrer que le flux particulière est constant et uniforme dans le tube.
5. En déduire la concentration molaire $C(z)$ de la vapeur d'eau dans le tube en fonction de z , D , j_N et de C_0 .
6. En déduire l'expression de $C(h)$, au sommet du tube en fonction de ces mêmes variables.
7. Un courant d'air approprié permet d'éliminer complètement l'eau évaporée au sommet du tube en maintenant un état stationnaire de diffusion. Que vaut alors $C(h)$?
8. En déduire un ordre de grandeur du coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans les conditions de l'expérience.
9. En déduire la durée caractéristique de la diffusion

3. Diffusion de dihydrogène à travers une membrane

Soit un ballon de baudruche rempli de dihydrogène ; ce gaz diffuse à travers le caoutchouc de l'enveloppe, modélisé par un problème à une dimension en régime stationnaire. En $x = 0$ la concentration massique de H_2 est $c_0 = 80 \text{ g.cm}^{-3}$ et en $x = L$ (épaisseur du ballon) = 0,1 mm la concentration massique c_L est négligeable.

Le coefficient de diffusion D de H_2 à travers la membrane est $D = 10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. Quelle masse de H_2 perd un ballon de surface $S = 0,1 \text{ m}^2$ par unité de temps ?

EXERCICES :

I. Diffusion de neutrons

On étudie la diffusion de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section constante S, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On appelle $n(x,t)$ le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion $D = 22 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

D'autre part, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée dt , dans un élément de volume $d\tau(M)$, il apparaît $d^2N_p = K \cdot n(M,t) d\tau(M) dt$ neutrons où $K = 3,5 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ est une constante positive homogène à l'inverse d'un temps et caractéristique des réactions nucléaires.

On admettra dans en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités ($x = 0$ et $x = L$), en revanche on admettra que $n(x,t)$ ne s'annule pas à l'intérieur du cylindre.

1. Montrer que $n(x,t)$ est solution de l'équation $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Kn$.
2. Déterminer $n(x)$ à une constante multiplicative près en régime stationnaire. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de la longueur L du barreau, calculer L_s .
3. En régime quelconque, on cherche une solution de la forme $n(x,t) = h(x) \exp(-t/\tau)$. Déterminer $h(x)$ et τ . En déduire que $n(x,t)$ diverge si L est supérieur à L_s . Que se passe-t-il alors dans le réacteur ?

II. Stockage des déchets nucléaires

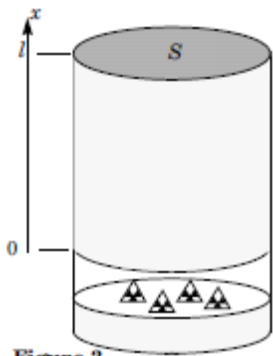


Figure 3

On considère des déchets nucléaires stockés sous une couche argileuse d'épaisseur $\ell = 50 \text{ m}$.

On étudie de manière très simplifiée une espèce contenue dans ces déchets susceptible de diffuser dans l'argile environnante.

Soit D le coefficient de diffusion de cette espèce dans l'argile.

On considère le problème unidirectionnel d'axe Ox.

1. Modélisation du phénomène :

En supposant le phénomène de diffusion stationnaire, déterminer l'expression de la concentration molaire c en fonction de l'abscisse x , de c_0 la concentration à l'abscisse $x = 0$ et c_ℓ la concentration à l'abscisse $x = \ell$ entre autres. Représenter graphiquement $c(x)$. En déduire l'expression du flux de l'espèce diffusante.

2. Phénomène de sorption

Simultanément à la diffusion, une partie des déchets se fixe dans l'argile (phénomène de sorption). On écrit donc la concentration totale de l'espèce considérée (en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$) sous la forme

$$c_t(x,t) = c(x,t) + c_f(x,t)$$

où $c(x,t)$ et $c_f(x,t)$ représentent respectivement la concentration en espèce mobile et la concentration en espèce fixée. Ces deux concentrations sont liées par $c_f(x,t) = K_s \cdot c(x,t)$, où K_s est une constante.

- a. A l'aide d'un bilan de matière dans un système élémentaire montrer que $c(x,t)$ vérifie une

équation de diffusion : $D' \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}$ où l'on exprimera D' en fonction de D et K_s .

- b. On impose les conditions aux limites : $c(0,t) = C_0$; $c(\ell,t) = 0$ et $c(0 < x < \ell, 0) = 0$

Quelle signification physique donnez vous à ces conditions ?

- c. Justifier que la solution $c_0(x)$ de l'équation de diffusion en régime stationnaire est une fonction affine de x . Expliciter complètement cette solution.

- d. On pose $c(x,t) = c_0(x) - c'(x,t)$. Donner l'équation et les conditions aux limites vérifiées par $c'(x,t)$.

III. Diffusion de macromolécules sous l'action d'un gradient de concentration

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ , dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique ρ_o ($\rho_o > \rho$).

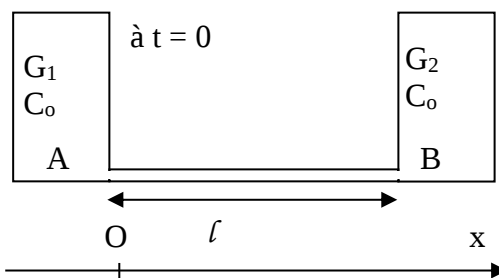
En supposant ces macromolécules de forme sphérique, nous nous proposons de calculer leur rayon moyen R et leur masse m à partir des résultats de l'expérience suivante. La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date $t = 0$. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposons un mouvement unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises entre autres, à une force de type visqueux $\vec{F} = -f\vec{v}$ (f constante positive, $\vec{v}$ vitesse des molécules).

1. Donner l'équation différentielle de la vitesse d'une macromolécule.
2. Montrer que les particules atteignent une vitesse limite $\vec{v}_1$ que l'on exprimera en fonction de $m, \vec{g}, f, \rho$ et ρ_o .
3. La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement donner l'expression de la densité du flux d'entraînement molaire $\vec{j}_E$ des macromolécules à la côte z où leur concentration est $C(z)$. L'axe Oz est vertical ascendant, l'origine O coïncide avec le fond du récipient.
4. La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion dans le sens ascendant apparaît. On admet que le flux de diffusion molaire $\vec{j}_D$ est donné par la loi de Fick. Quelles sont les dimensions du coefficient de diffusion ?
5. Quelle relation a-t-on entre $\vec{j}_E$ et $\vec{j}_D$ régime stationnaire ? En déduire la loi de variation de C avec z .
6. Des mesures optiques montrent que à 25°C , $\frac{C(z=0)}{C(z=2\text{cm})} = 2$. Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ? Avez-vous une idée d'un principe possible pour ces mesures optiques ?

Données : $D = \frac{k_B T}{f}$, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann, $\frac{\rho}{\rho_o} = 0,80$, $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

IV. Diffusion à travers un fin tuyau entre deux récipients :

Deux récipients A et B de volume V_A et V_B contiennent initialement deux gaz parfaits différents, purs, respectivement G_1 dans A et G_2 dans B.



Les deux gaz sont à la même température et sous la même pression, leurs concentrations molaires initiales sont donc identiques, égales à C_o .

Les deux gaz ont même diffusivité D , si bien qu'ils se mélangent suivant les lois de l'autodiffusion.

Les deux récipients sont reliés par un tube de longueur l et de section s , par lequel se fait la diffusion. On admet que, le long du tube, le régime de diffusion est stationnaire.

1. Expliquer qualitativement ce qu'il va se passer dans le récipient A, puis dans le récipient B. Tracer l'allure de $C_{1A}(t)$, concentration du gaz 1 dans le récipient A, ainsi que celle de $C_{2A}(t)$, concentration du gaz 2 dans le récipient A.
2. Exprimer $C_1(x)$, concentration molaire du gaz 1 dans le tube, notamment en fonction de $\Delta C_1 = C_{1A} - C_{1B}$. Où C_{1A} est la concentration de G_1 dans A et C_{1B} est la concentration de G_1 dans B. De quel paramètre dépendent C_{1A} et C_{1B} ?
3. Idem pour $C_2(x)$ en fonction notamment de $\Delta C_2 = C_{2B} - C_{2A}$.
4. Exprimer le vecteur densité de courant particulaire du gaz 1 dans le tube pour la diffusion de gauche à droite en fonction de ΔC_1 .

5. En effectuant un bilan de particules du gaz 1 dans le réservoir A pendant une durée dt , exprimer la variation de C_{1A} en fonction du temps. En effectuant un bilan de particules du gaz 1 dans le réservoir B pendant une durée dt , exprimer la variation de C_{1B} en fonction du temps. En déduire une équation différentielle vérifiée par $\Delta C_1(t) = C_{1A}(t) - C_{1B}(t)$, la résoudre. En déduire $\Delta C_2(t)$. On posera $V_0 = V_A V_B / (V_A + V_B)$.
6. Application : les gaz sont CO et N_2 , $V_A = V_B = 1L$, $l = 10 \text{ cm}$, $s = 1 \text{ cm}^2$, $D = 1,74 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la constante de temps τ du phénomène et le temps t_0 au bout duquel la concentration d'un gaz dans l'un des récipients est égale à la moitié de la concentration de ce gaz dans l'autre récipient.